DE LA INTEGRAL DE RIEMANN AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO: UN ACERCAMIENTO CON EL APPLET DESCARTES

Eduardo Tellechea Armenta
Universidad de Sonora
etellech@gauss.mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un acercamiento gráfico al concepto de Integral con el fin de que el estudiante transite gradualmente desde las sumas de Riemann al estudio de la Integral como una función del extremo superior y sus propiedades. Utilizaremos un trazador de la Función Integral construido con el Applet Descartes, para arribar de manera visual a la relación entre una función y su función Integral, es decir, al Teorema Fundamental del Cálculo. Se aprovechan las capacidades del software para que el alumno interactúe de manera gráfica y numérica con la computadora al nivel de poder comprobar resultados, predecir propiedades y conjeturar sobre situaciones de más generalidad. La utilización de este tipo de recursos computacionales en que el alumno manipula dinámicamente las gráficas, es de gran ayuda antes de abordar un enfoque abstracto. Esta propuesta se enmarca en el contexto de un nuevo modelo educativo que actualmente se implementa en la Universidad de Sonora.

Introducción

El avance de la tecnología en los últimos años, el número creciente de computadoras personales y la cada vez mayor cantidad de profesores que incorporan el uso de esta herramienta como apoyo en sus cursos, resalta la importancia de la utilización de herramientas computacionales en la enseñanza de las Matemáticas. La Universidad de Sonora ha modificado los planes de estudio de casi todas las carreras, destacándose que aproximadamente el 20% del tiempo dedicado a cada curso de matemáticas, se impartirá en un laboratorio de cómputo con el uso de software educativo. En este contexto los profesores tenemos el reto de diseñar actividades didácticas, creando para ello ambientes computacionales de aprendizaje en los que la interactividad con la computadora permita al alumno verificar sus resultados, explorar de manera gráfico-numérica, detectar patrones de comportamiento, analizar situaciones medulares y conjeturar resultados más generales, todo ello como una preparación para acceder a un enfoque más abstracto. En este trabajo se presenta una propuesta de actividades interactivas para el laboratorio de cómputo, las cuales pueden ser utilizadas también a través del Internet. Se hace la observación que por restricciones de espacio, solo se presentarán la descripciones generales de cada una de las actividades a partir de las cuales se podrían generar hojas de trabajo que sirvan de guía al alumno.

En la sección 1, se presenta al estudiante, el applet básico para el estudio de sumas de Riemann, el cual muestra además el valor numérico de las sumas correspondientes. Este mismo applet permite considerar funciones con valores negativos y funciones discontinuas para analizar en general el valor de la Integral de la función en un intervalo dado. En la sección 2, se introduce la integral como función del extremos superior, y se analizan sencillos casos de funciones constantes, escalonadas, lineales y seccionalmente lineales, para verificar resultados obtenidos en clase. Posteriormente se analizan sencillas funciones discontinuas, y continuas no derivables con el fin de conjeturar sobre la continuidad o derivabilidad de la función integral. En la sección 3, se describe la construcción del trazador de la Función Integral, partiendo de funciones escalonadas y aproximándola por medio de funciones continuas seccionalmente lineales. Finalmente en la sección 4 se construye gráficamente la derivada de la función integral, verificándose visualmente el Teorema Fundamental del Cálculo.

1. Sumas de Riemann

En esta primera actividad se presenta al estudiante un applet como en la Figura 1, que grafica y calcula las Sumas de Riemann con alturas en los extremos de los intervalos de la partición (sumas superiores e inferiores para funciones monótonas) presentando ambas en la misma pantalla. Es posible modificar libremente la función, los extremos del intervalo de integración y el número de subdivisiones de la partición.

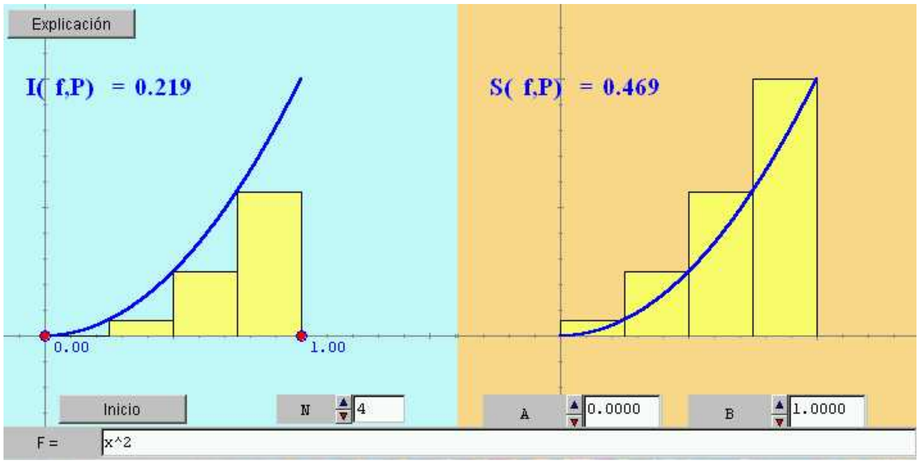


Figura 1

Al interactuar con este applet el estudiante se familiarizará con el concepto de Integral como límite de sumas de Riermann, iniciando con funciones no negativas que le permitirán interpretar a la integral como el área bajo la gráfica de la función y encima del eje de las abscisas. También explorará sumas de Riemann e integrales de funciones discontinuas y funciones con valores positivos y negativos. En la Figura 2 se muestra una secuencia de sumas inferiores para $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 1] y para subdivisiones del intervalo en 15, 30 y 1000 partes iguales, respectivamente.

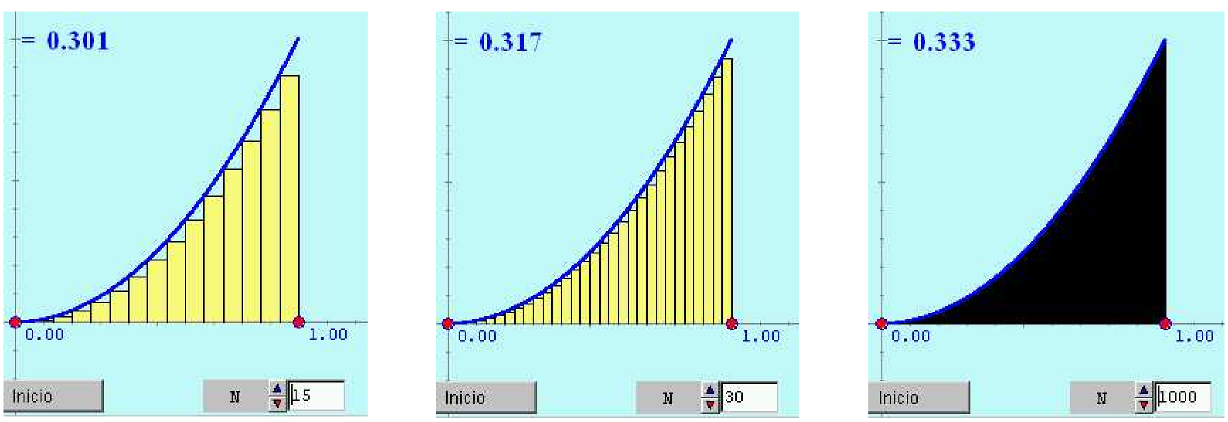


Figura 2

En las dos primeras imágenes de la Figura 3 se muestran las sumas superiores para $f(x) = 1 - x^2$ en los intervalos [0, 1] y [0, 1.5] para una subdivisión del intervalo correspondiente en 10 partes iguales; y en la otra, una suma de Riemann para una función discontinua.

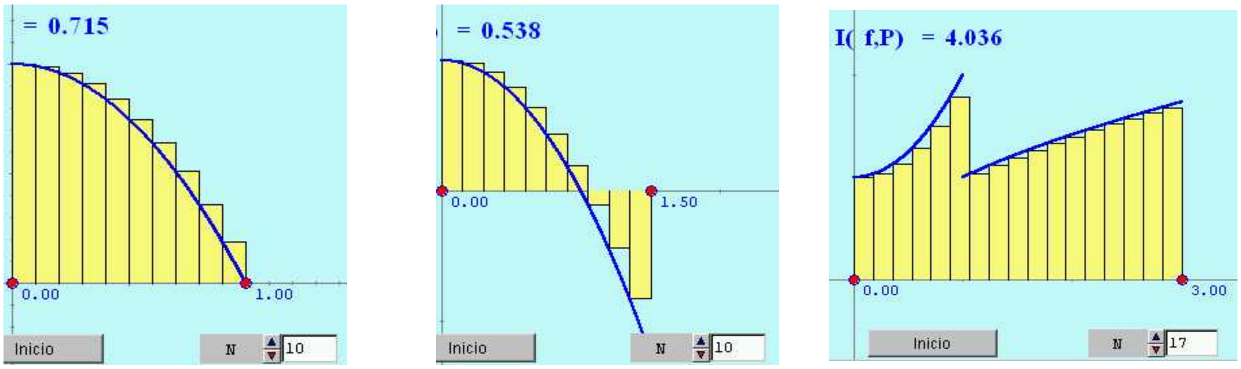


Figura 3

2. La función Integral *I*(*x*) para funciones *f*(*x*) constantes, escalonadas y lineales y seccionalmente lineales.

El objetivo de esta actividad es que el estudiante se familiarice con la integral como una función del extremo superior

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

e interactuando con la computadora, pueda descubrir de manera visual las condiciones bajo las cuales la integral resulta una función continua o derivable, teniendo así un primer acercamiento gráfico al Teorema Fundamental del Cálculo.

En la Figura 4 se muestran tres applets, en los dos primeros, el alumno modifica el extremo superior del intervalo y el programa muestra el área acumulada así como la gráfica de la función integral. En el tercer applet, se muestra la integral de una función escalonada en la cual los puntos P, R y S pueden modificarse en pantalla, arrastrándolos con el mouse.

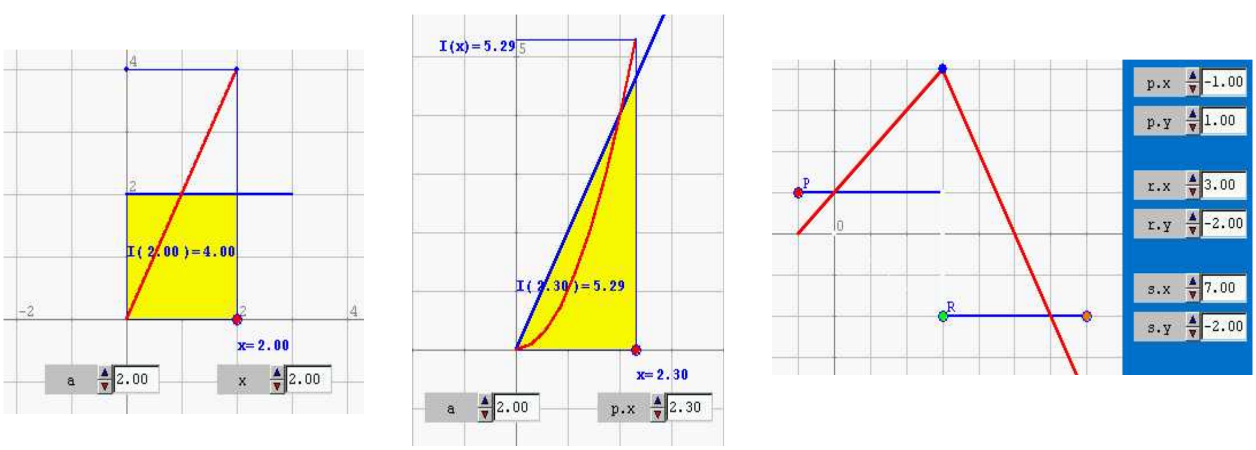
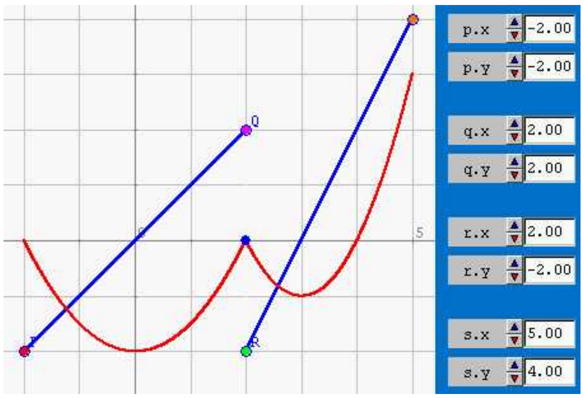
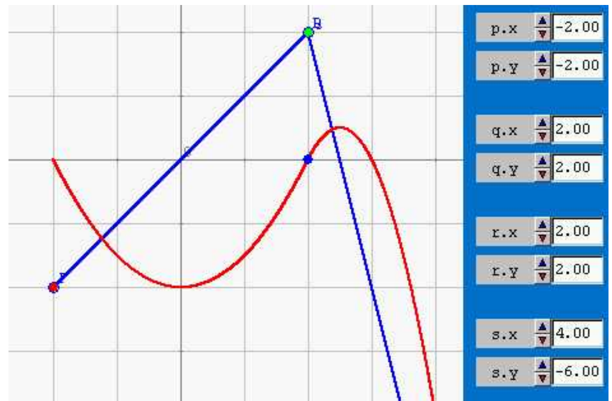


Figura 4

Para explorar el comportamiento de la función Integral (continuidad y derivabilidad) se le presenta al estudiante un applet con una función poligonal de dos secciones en el que puede manipularse en pantalla los puntos P, Q, R y S directamente arrastrándolos con el mouse, o modificando numéricamente las coordenadas de dichos puntos. En la figura 5, se muestra la función Integral para una función continua y otra discontinua.



Función integral NO DERIVABLE



Función integral DERIVABLE

Figura 5

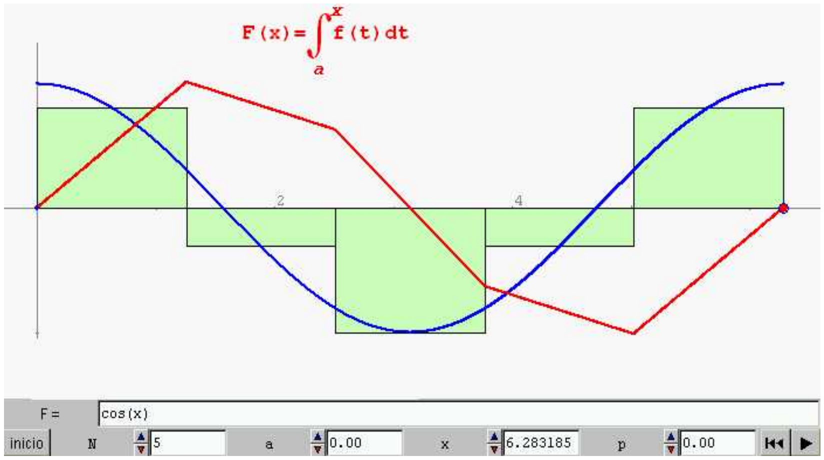
Al modificar los puntos P Q, R y S, el alumno verificará que las características observadas en la función integral no dependen del caso particular de función seccionalmente lineal de que se trate.

El alumno podrá conjeturar que la integral es siempre continua y que si la función original es continua, la integral será derivable.

Con el fin de visualizar el Teorema Fundamental de Cálculo (TFC), para este tipo de funciones, podemos encontrar visualmente, en cada punto, la derivada de la Integral, haciendo zoom a la imagen en el punto deseado y ver si la función se comporta como una recta y en ese caso, determinar la derivada con la ayuda de la cuadrícula y encontrar la relación entre la derivada de la integral y la función original, arribando de manera visual al TFC. En la Figura 5, puede visualizarse que la derivada de la Integral en los puntos de derivada cero, coincide ésta, con el valor de la función en dicho punto y lo mismo sucede en la segunda gráfica de esta figura en $x = 3$, haciendo zoom.

3. Construcción de un trazador de la función Integral.

Con el fin de continuar con la exploración del TFC, para otro tipo de funciones como trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc., construimos un Trazador de la función Integral aproximando la función f, integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, por medio de funciones escalonadas, siendo las correspondientes integrales de estas escalonadas, una buena aproximación a la integral de la función para valores "grandes" de N, En la Figura 6 se muestra la construcción del trazador para la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ para N =5.



.

Figura 6

En la figura 7 se muestran otras dos aproximaciones a la integral de la función $f(x)=\cos x$ en el intervalo $[0,2\pi]$, con N =10 y N =30, respectivamente.

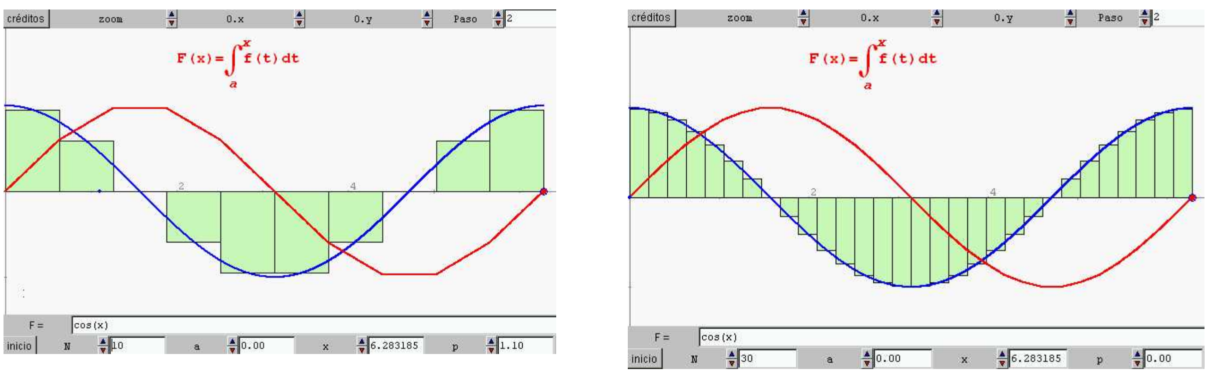


Figura 7

Obsérvese que a para N =30, puede visualizarse que la integral corresponde a una función muy parecida a la función $f(x)=\sin x$, es decir, al parecer

$$\int_0^x \cos t \, dt = \operatorname{sen} x$$

El estudiante explorará las integrales de otras funciones pidiendo al programa que sólo muestre la función Integral para un valor grande de N.

4. Trazando la derivada de la función Integral

Una vez que contamos con un trazador de integrales, podemos explorar la relación entre la función y su integral, construyendo gráficamente la derivada de la función integral en cada punto y ver si nuestras conjeturas persisten cuando consideramos un tipo más general de funciones. En la figura 8 se muestra la integral de la función coseno. El segmento AB es de longitud uno, de tal manera que el segmento dirigido, BC representa la derivada en el punto correspondiente.

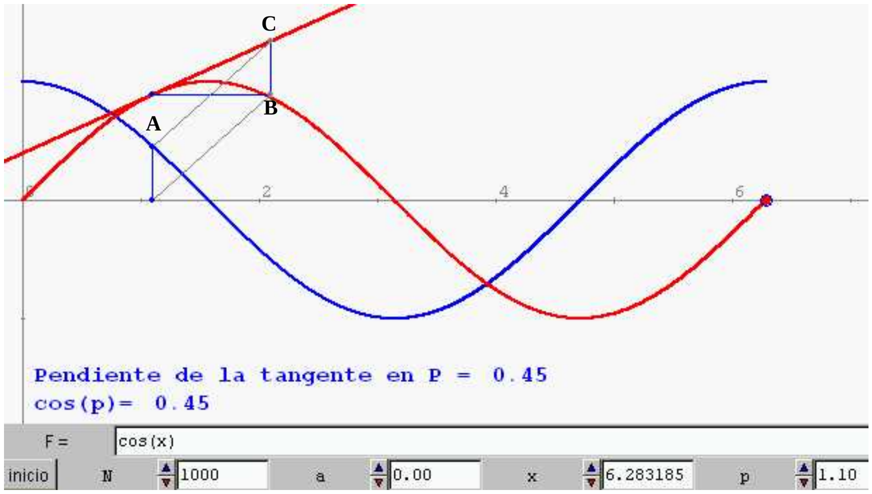


Figura 8

Así pues, con la ayuda de este applet verificamos de manera visual el resultado del TFC.

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t\, dt = \cos x$$

Análogamente podemos verificar este resultado para otro tipo de funciones:

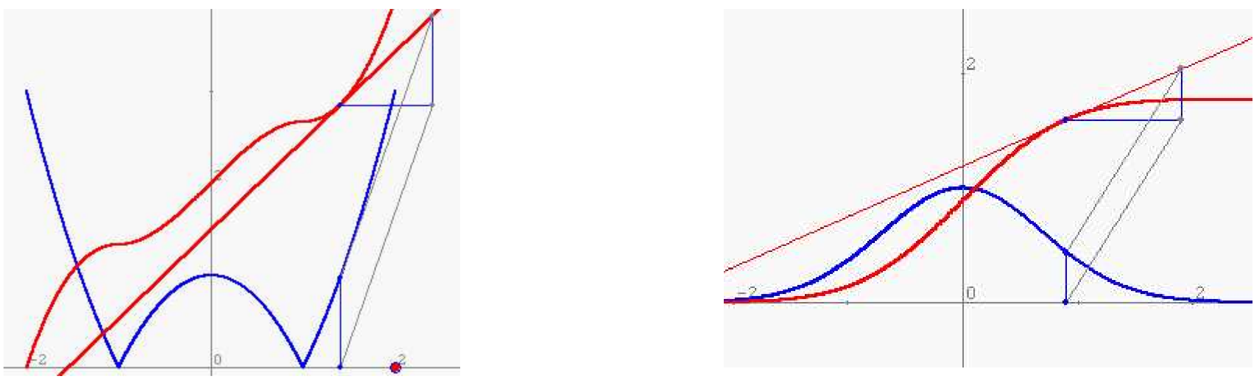


Figura 9

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \left| t^2 - 1 \right| dt = \left| x^2 - 1 \right|$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2}$$

Referencias:

ABREU, J.L. – OLIVERÓ, M. (2003) Applet Descartes (software), Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España.

PROYECTO DESCARTES, Página web: http://descartes.cnice.mecd.es/

TELLECHEA, A.E. (2004), El Applet Descartes en el diseño de actividades interactivas de Matemáticas Notas de curso para profesores. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.

TELLECHEA, A.E.- ROBLES, A,G (2004) Un Aparato Virtual para trazar la función Derivada y su utilización en la enseñanza del Cálculo DiferencialL

http://descartes.cnice.mec.es/Analisis/Funcion_derivada/index.htm