LA DERIVADA A PARTIR DE CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS DE LA RECTA TANGENTE

(1) Eduardo Tellechea Armenta – (2) Gabriela Robles Arredondo

(1) etellech@gauss.mat.uson.mx **– (2)** gaby@gauss.mat.uson.mx

Universidad de Sonora. MÉXICO

RESUMEN

Este trabajo es producto del "Proyecto de seguimiento de los cursos de Cálculo Diferencial en la División de Ingeniería", de acuerdo al nuevo modelo educativo implementado en la Universidad de Sonora, del cual los autores son responsables. Este nuevo modelo centra el aprendizaje en el estudiante, y se apoya en el uso de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. Con la ayuda de Cabri Geometre II Plus, se construye un archivo en el que se muestra la gráfica de una función y la recta tangente en un punto, construida ésta como aproximación de secantes. Se diseñan actividades escritas para que el estudiante, de manera guiada, interactúe con los archivos descubriendo que, para las funciones más importantes del cálculo, es posible encontrar propiedades gráficas de las rectas tangentes que nos permitirán determinar su pendiente, es decir la derivada de la función en el punto dado y, posteriormente, generalizarlo para obtener la expresión analítica de la función derivada. Es importante señalar que estas actividades fomentan en el estudiante el desarrollo de habilidades de exploración, generalización y conjetura.

INTRODUCCIÓN

En el primer curso de Cálculo que la Universidad de Sonora ofrece a los estudiantes de Ciencias e Ingeniería, estamos utilizando representaciones gráficas de carácter dinámico, con el fin de promover entre los estudiantes la conversión entre diferentes representaciones del mismo objeto matemático. En el marco de la teoría de R. Duval (1998) sobre registros de representación semiótica, esta conversión es una actividad cognitiva necesaria para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Consideramos que una enseñanza que privilegia las representaciones algebraicas, arroja como consecuencia natural el descuido de las gráficas. En la sección 2 se describe el contexto en el que se ha desarrollado la presente propuesta y se plantean los principios sobre los cuales está construida. En la sección 3 se incluye la descripción del archivo construido con Cabri, con el que se desarrollarán una serie de actividades. La sección 4 contiene una descripción de las actividades propuestas a los estudiantes, a partir de las cuales, mediante la interactividad con el archivo presentado en la sección 3, obtendrán la derivada puntual y la función derivada de las más importantes funciones que se trabajan en el Cálculo.

CONTEXTO Y FUNDAMENTOS DE LA PROPUESTA

El concepto de derivada se introduce usualmente en los libros de texto mediante una breve motivación gráfica, para pasar luego a su formulación algebraica. En dicha introducción gráfica se plantea el problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto, como uno de los principales problemas del cálculo. Sin embargo, esta aproximación resulta insuficiente para establecer una base de significación gráfica en el estudiante, porque una vez presentado y definido, el resto del tema se desarrolla de manera fundamentalmente algebraica.

El problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado, es un problema local y, como algunas investigaciones en educación matemática han mostrado, el establecimiento de la relación general entre una función y su derivada no es cognitivamente un problema simple. La diferencia, tal como lo ha señalado Sfard (1992), estriba en concebir a la función como un proceso o como un objeto. Es conveniente destacar la importancia de introducir los conceptos matemáticos, no en términos estructurales, sino procedimentales y permitir al estudiante avanzar tanto como el software lo permita. Tal como Sfard (ibidem) lo ha planteado: “No debe exigirse una concepción estructural mientras que el estudiante pueda hacer bien las cosas sin ella”.

Gracias al surgimiento de lo que hoy se conoce como paquetes computacionales de geometría dinámica, es posible profundizar en las aproximaciones gráficas-numéricas a los conceptos matemáticos. Particularmente en el presente trabajo, se utiliza el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II Plus, para proponer actividades de aprendizaje mediante construcciones gráficas-numéricas manipulables directamente en pantalla.

Las ideas expuestas aquí no pretenden sustituir el desarrollo analítico del tema, sino más bien servir como soporte intuitivo a este desarrollo. El acercamiento que se presenta ha sido formulado conforme a los dos principios generales siguientes:

- Un ambiente computacional diseñado para la enseñanza, debe permitir al estudiante interactuar con las representaciones gráficas y numéricas proporcionadas por la computadora, al nivel de poder modificarlas, como una manera de detectar patrones de comportamiento y formular conjeturas sobre los objetos representados y sus características.
- Una primera aproximación gráfica a los conceptos matemáticos, puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de examinar estos conceptos a un nivel más abstracto y la manipulación de las representaciones gráficas dinámicas puede ayudar a construir dicha base de significación.

DESCRIPCIÓN DEL ARCHIVO

Esta propuesta está basada en un archivo que se utiliza para determinar la pendiente de la recta tangente, analizando los cortes de ésta con el eje de las abscisas.

A continuación se presentan las instrucciones generales para construir dicho archivo con Cabri, de manera que el estudiante podrá con él visualizar la derivada de manera no sólo puntual, sino también globalmente, es decir, como una función.

Graficamos la función derivable $f(x)$, cuya derivada se pretende calcular, y localizamos los puntos x, y $x+h$ en el dominio de la función f. (Figura 1)

Trazamos la secante R_S, que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$

Hacemos h = 0.000001, de tal manera que la recta secante pueda considerarse como la recta tangente a la gráfica de f, en el punto $(x, f(x))$. (Figura 2)

Localizamos, de manera numérica, la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas.

En el triángulo que se muestra en amarillo (Figura 2), calculamos la pendiente de la recta tangente, obteniendo de esta manera la derivada en el punto dado.

El alumno podrá interactuar libremente con el archivo, pudiendo modificar en pantalla, la expresión de la función y el valor de x, arrastrando el punto correspondiente.

Hechas estas modificaciones, se mostrarán en pantalla, los cambios gráficos y numéricos, correspondientes que permitirán detectar patrones de comportamiento.

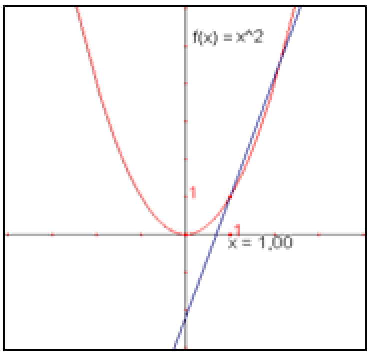

Figura 1

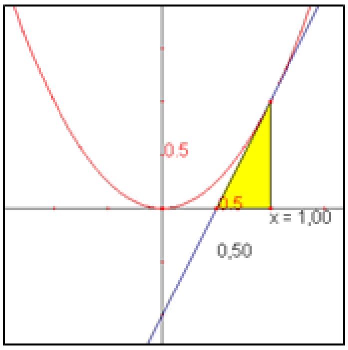

Figura 2

Descartes, como los antiguos griegos, sabía que si en una parábola se toma el segmento OB igual al segmento OC y se dibuja la recta que pasa por los puntos A y C, se obtiene la recta tangente a la parábola en el punto A y, consecuentemente, el segmento DE es siempre la mitad del segmento OE, pues los triángulos DAE y OCD son congruentes. Ver Figura 3

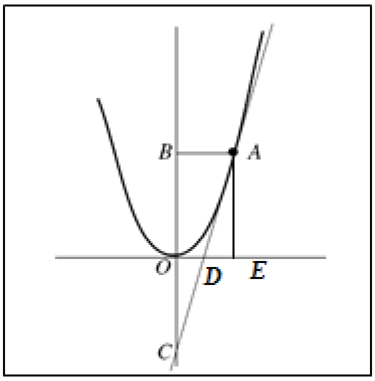

Figura 3

El diseño de nuestro archivo se basa precisamente en este antecedente, para propiciar que el alumno descubra, en este caso, que la longitud de DE es la mitad de OE.

DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

En nuestro Proyecto se han diseñado actividades guiadas para que el estudiante analice el comportamiento de las rectas tangentes a funciones dadas y, en base a esto, determine sus pendientes, es decir, su derivada. A continuación daremos una breve descripción de estas actividades.

<u>Actividad 1.</u> Se le proporciona al alumno un archivo, como el de la Figura 4, en el que se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y se le pide que interactúe con él, analizando el comportamiento de las rectas tangentes en varios casos particulares. Mediante esta exploración, el alumno descubrirá que el corte con el eje de las abscisas siempre se da en el punto medio del segmento *Ox*, independientemente de la parábola que se trate, visualizando de esta manera, **la derivada puntual** y **la función derivada** de una parábola, como la razón del cateto opuesto al cateto adyacente, en el triángulo de color amarillo.

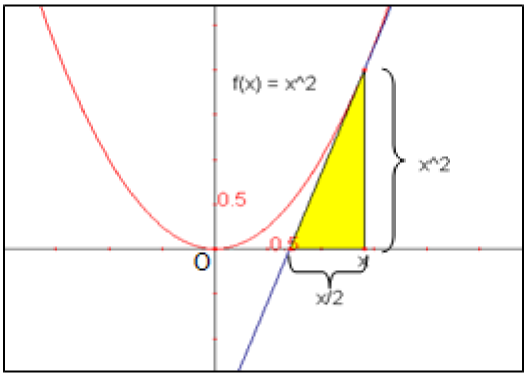

Figura 4

De lo observado en los casos particulares, para la parábola $f(x) = x^2$, obtendrá la derivada en el caso general, es decir "en cualquier punto *x*"

$$f'(x) = m = \frac{Cateto\ \ opuesto}{Cateto\ \ Adyacente} = \frac{x^2}{x/2} = \frac{2x^2}{x} = 2x$$

Este resultado se generaliza para cualquier parábola de la forma $f(x) = kx^2$, obteniéndose la correspondiente derivada. Asimismo, el alumno descubrirá la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, analizando el comportamiento de la recta tangente,

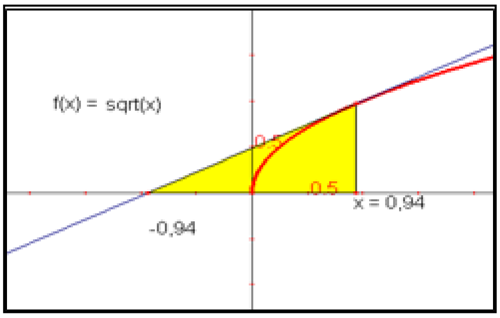

Figura 5

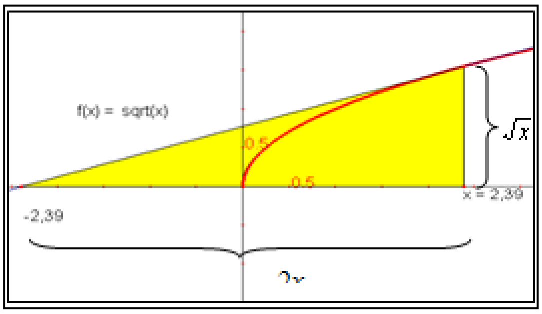

Figura 6

descubriendo, como en el caso anterior, la función derivada:

$$f'(x) = m = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

También en esta práctica, el estudiante explorará el corte con el eje de las abscisas de la recta tangente a la función cúbica $f(x) = x^3$,

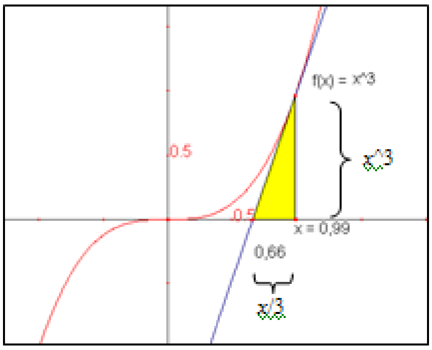

Figura 7

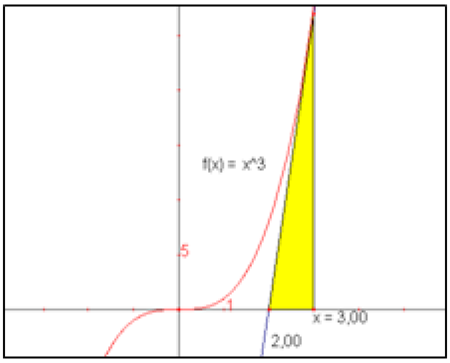

Figura 8

descubriendo que este corte se da a las dos terceras partes del origen, es decir, concluirá que:

$$f'(x) = m = \frac{x^3}{x/3} = \frac{3x^3}{x} = 3x^2$$

De manera análoga descubrirá que, para la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$

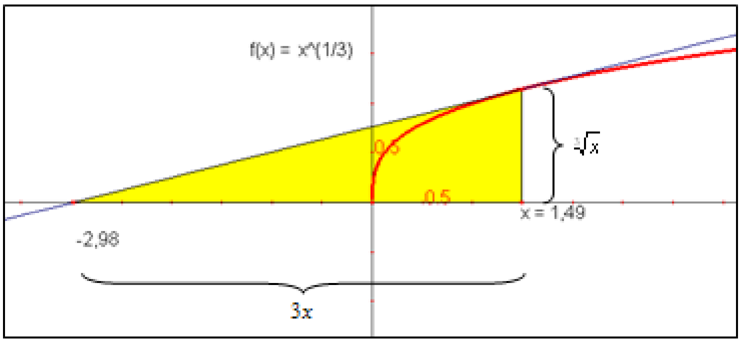

Figura 9

$$f'(x) = m = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x} = \frac{x^{1/3-1}}{3} = \frac{x^{-2/3}}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Finalmente se le pide al estudiante que explore la derivada de funciones de la forma $f(x) = x^n$ con n entero positivo, y conjeture sobre la expresión de la función derivada.

Actividad 2. En esta actividad se analiza el comportamiento de las rectas tangentes a funciones exponenciales. Iniciamos con un archivo que nos muestra la gráfica de la función $f(x) = e^x$ y sus tangentes:

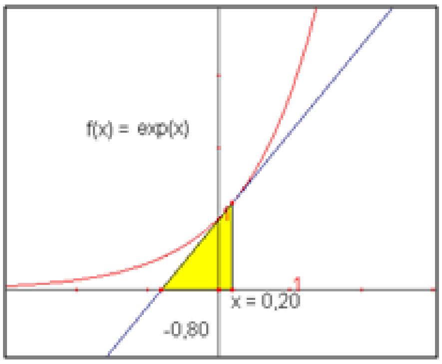

Figura 10

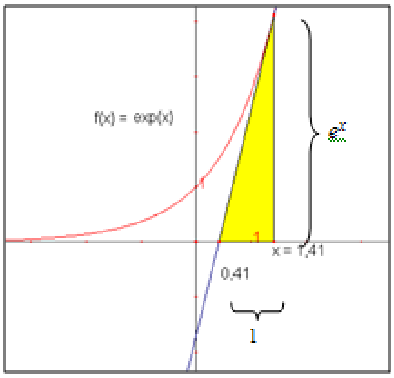

Figura 11

La exploración, después de varios casos particulares, muestra que el corte siempre está a una unidad a la izquierda del valor de x, obteniéndose:

$$f'(x) = m = \frac{e^x}{1} = e^x$$

De la misma forma, si se analiza $f(x) = e^{2x}$

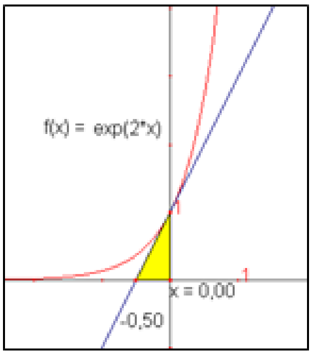

Figura 12

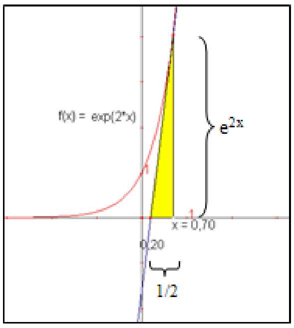

Figura 13

La exploración, después de varios casos particulares, muestra que el corte siempre está a media unidad a la izquierda del valor de x, obteniéndose:

$$f'(x) = m = \frac{e^{2x}}{1/2} = 2e^{2x}$$

De manera análoga, el alumno descubrirá y conjeturará que, para $f(x) = e^{kx}$, su derivada es: $f'(x) = ke^{kx}$

Finalmente en el caso de la función $f(x) = \ln(x)$, apelamos a que su función inversa es la función exponencial y, como las gráficas de ambas funciones son simétricas con respecto a la recta $y = x$, también lo serán sus correspondientes rectas tangentes, obteniéndose que los triángulos que se muestran en la figura, son congruentes y, en consecuencia:

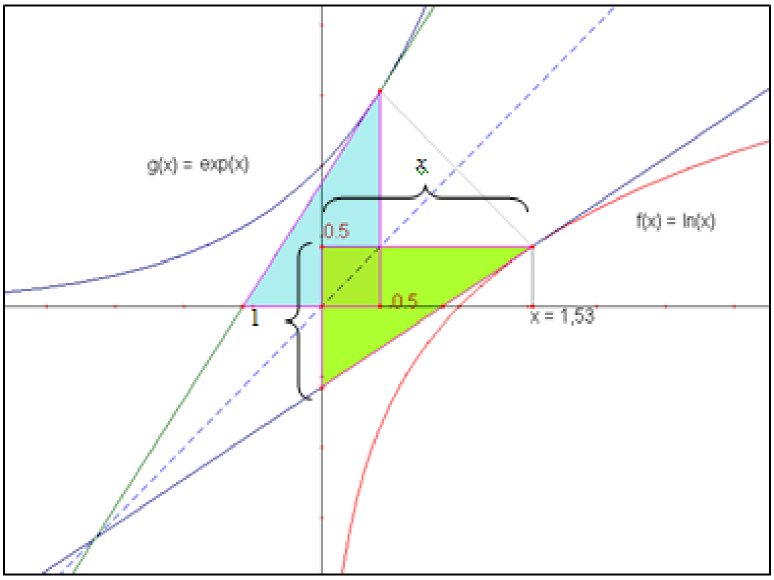

Figura 14

$$f'(x) = m = \frac{1}{x}$$

CONCLUSIONES

- Este tipo de actividades son de gran ayuda en el trabajo en el aula, ya que el estudiante puede avanzar en el descubrimiento de las expresiones analíticas de las derivadas, solamente con el conocimiento de la derivada como límite y, por supuesto, la correspondiente interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente. En una presentación tradicional, resulta muy complicado obtener las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas a partir de la definición. Es necesario caminar un gran trecho durante el curso, estableciendo resultados sobre límites que difícilmente son asimilados por los estudiantes de un primer curso de Cálculo.
- El uso de software dinámico da una nueva dimensión al aspecto geométrico, ya que permite transitar de la graficación estática tradicional a la visualización dinámica, donde las representaciones geométricas adquieran "vida propia" y arrojan valiosa información, permitiendo que el alumno conjeture sobre resultados que posteriormente se formalizarán en el curso.

BIBLIOGRAFÍA

Font, V. (2005). *Funciones y Derivadas.* Actas del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Tomo II pp 5-54, Bogotá, Colombia, 2005. Disponible en:

http://www.webpersonal.net/vfont/Funciones%20y%20derivadas%20XXI%20COLOQUIO.pdf

Font, V. (2001) Expresiones Simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. Revista EMA. 6(2) pp 180-200. Disponible en:

http://www.webpersonal.net/vfont/(04)RD.pdf

Laborde, J.M. and Bellemain, F. (2001-2004), *Cabri-Geometry II Plus (software),* Dallas, Tex.: Texas Instruments.

Robles, G. y Tellechea, E. (2004) *Un Aparato Virtual para trazar la función Derivada y su utilización en la enseñanza del Cálculo Diferencial*. Página Web del Sitio del Proyecto Descartes, Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, España.

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Funcion_derivada_Tellechea/index.htm

Sfard, A. (1992) Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, G. Harel and E. Dubinsky (eds.), MAA Notes 25, Washington, DC, 59-84.

Tellechea, E. (2002) Un trazador de la función derivada: reconocimiento visual de expresiones analíticas de las derivadas de algunas funciones. Memorias del I Congreso Iberoamericano de Cabri. Santiago de Chile. Disponible en:

http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/FuncionDerivadaEduardoTellechea.pdf

Tellechea, E. (2007) *Diseño de herramientas en línea como apoyo a los cursos de Cálculo.* Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas. Hermosillo, Sonora, México. Disponible en:

http://www.semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XVII/18Tellechea.pdf

The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2001) Principles and standards for school mathematics. Disponible en:

http://standards.nctm.org/document/chapter7/conn.htm