Un Aparato Virtual para trazar la Función Derivada: su uso en la enseñanza

Eduardo Tellechea Armenta

Resumen.

En este trabajo se presenta un acercamiento gráfico a la enseñanza del concepto de derivada de una función, utilizando un trazador de la función derivada, construido con Cabrí Geometry II, el cual permite explorar la relación existente en-tre la recta tangente a la función en un punto dado y la gráfica de la derivada de esta misma función. El trazo de la función derivada y la interacción que se establece entre el estudiante y el software, es aprovechado para extraer, de la representación dinámica, expresiones analíticas de las derivadas de las principales funciones del Cálculo.

Lo anterior, con la idea de diseñar un ambiente computacional que permita al estudiante interactuar con las representaciones proporcionadas por la computadora, al nivel de poder modificarlas, como una manera de detectar patrones de comportamiento y formular conjeturas sobre los objetos representados y sus características.

Partimos de que una primera aproximación gráfica a los conceptos matemáticos, puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de examinar estos conceptos a un nivel más abstracto y la manipulación de las representaciones gráficas dinámicas, por el estudiante, puede ayudar a construir esta base de significación.

Eduardo Tellechea Armenta
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México
e-mail: etellech@gauss.mat.uson.mx

1. Introducción

El avance de la tecnología en los últimos años, el número creciente de computadoras personales y la cada vez mayor cantidad de profesores que incorporan el uso de esta herramienta como apoyo en sus cursos, resalta la importancia de la utilización de software en la enseñanza de las Matemáticas, en particular en el Cálculo.

El propósito de este trabajo es promover un tratamiento alternativo del estudio de la derivada, partiendo sólo de la definición como un límite y mostrar que con el uso de Cabri es posible encontrar expresiones analíticas para las derivadas de algunas funciones importantes del cálculo.

En este trabajo se supone conocida la posibilidad de graficar funciones con Cabri, utilizando las herramientas "Lugar geométrico" y "Calcular". Asimismo supondremos conocidos los efectos que la variación de los parámetros produce sobre la gráfica de una función. En la sección 2, a manera de muestra se hace una breve discusión con parábolas y en la sección 3 utilizaremos Cabri para obtener la gráfica de la función $f(x) = senx$, partiendo de nuestros conocimientos de trigonometría. A partir de la sección 4 entramos a la parte medular del trabajo con la construcción de nuestro trazador y su utilización en diversas situaciones didácticas.

2. Graficando parábolas de la forma $y = a(x - b)^2 + c$

Con la ayuda de Cabri podemos graficar funciones en términos de parámetros, en nuestro caso iniciamos con funciones cuadráticas de la forma $f(x) = a(x-b)^2 + c$, en las que la variación de los parámetros *a*, *b*, *c* permite explorar el comportamiento de la representación gráfica, tomando como referencia a la función $y = x^2$. A continuación describimos brevemente los efectos de la variación de parámetros en el comportamiento gráfico de las funciones:

a) Si el parámetro *a* se toma positivo, entonces $y = x^2$ se abre o se cierra, dependiendo de cómo es el valor de *a* respecto a 1. El cambio de signo en el parámetro *a*, hace que las parábolas sean simétricas con respecto al eje de las abcisas.
b) Al variar el parámetro *b*, la parábola se traslada horizontalmente a la derecha ó a la izquierda, dependiendo del signo de *b*.
c) Al variar el parámetro *c*, la parábola se traslada verticalmente hacia arriba ó hacia abajo, dependiendo del signo de *c*.

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con la relación entre la variación de los parámetros y los correspondientes cambios en las gráficas de las parábolas, puede mostrarse el camino inverso y a partir de la representación gráfica, encontrar los parámetros y por lo tanto, su ecuación. En la Figura 1, tenemos una parábola que pasa por el punto (1, 4) y tiene su vértice en el punto (2, 6). En esta gráfica los parámetros pueden ser identificados y concluir que a = -2, b = 2 y c = 6 y por lo tanto su ecuación es: $f(x) = -2(x-2)^2 + 6$.

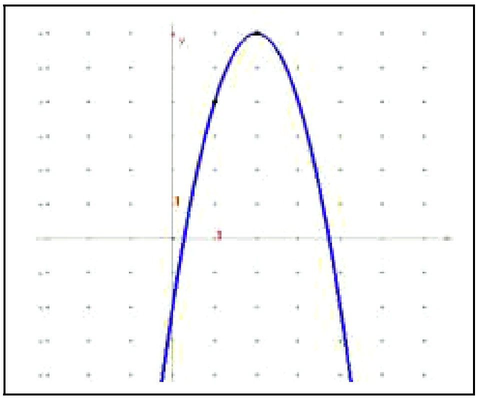

Fig. 1

3. Graficando la función f(x) = senx

La función $f(x) = senx$ es la primera función no algebraica que se introduce en un curso de Cálculo. Para graficarla, recurrimos al conocimiento que de ella se tiene en la Trigonometría. La manera como se está utilizando Cabri, permite establecer conexiones entre los conceptos del Cálculo y la Trigonometría (NCTM, 2001); por esta razón, el acercamiento que se presenta pone especial atención a la definición proveniente de la Trigonometría. Graficaremos la función $f(x)$ = sen$x$, representando el seno de un arco x, medido en radianes, como la ordenada del extremo A, del segmento AB en el círculo de radio uno; con la herramienta “Transferencia de medidas”, ubicamos la medida de este arco en el eje de las abscisas.

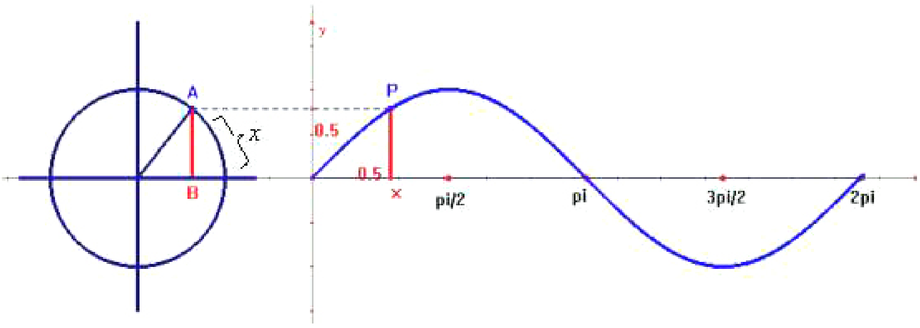

Fig. 2

Posteriormente trasladamos el segmento AB de tal manera que el extremo B coincida con el punto *x* y A con el punto P, como se muestra en la Figura 2; activamos la traza al punto P, animamos el punto *x* y obtenemos la gráfica de nuestra función.

4. Construcción de un trazador para la derivada de una función

La gráfica de una función puede ser construida con Cabri, y una vez hecho esto, es posible trazar la tangente a la gráfica en cualquier punto. Cabri puede mostrar en pantalla la cuantificación de la pendiente para cualesquiera de estas rectas y por lo tanto calcular la derivada de la función en cualquier punto.

En esta sección se aprovechan estas características del software para construir un trazador de la función derivada, para una función previamente graficada.

Es conveniente destacar la importancia de introducir conceptos matemáticos, no en términos estructurales, sino con este tipo de recursos gráficos y permitir que el estudiante avance tanto como el software lo permita "*No debe exigirse una concepción estructural mientras que el estudiante pueda hacer bien las cosas sin ella*" (Anna Sfard, 1992)

A continuación se presentan las instrucciones generales para construir con Cabri un trazador de derivadas, el cual permitirá al estudiante visualizar a la derivada no sólo puntual, sino globalmente como una función.

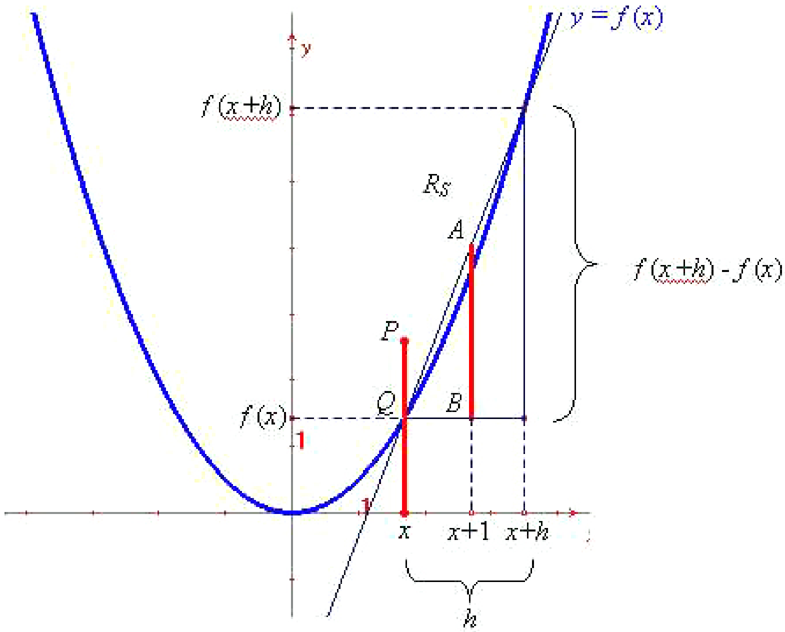

Fig. 3

Todas las instrucciones están referidas a la Figura 3.

a. Graficamos la función $f(x)$, a la cual le queremos construir su función derivada y localizamos los puntos x, $x+1$ y $x+h$ en el dominio de la función f.
b. Trazamos la secante R_S, que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$.
c. Trazamos el segmento vertical AB, como se muestra en la Figura 3.
d. Por semejanza de triángulos, la pendiente m_s de la recta secante será igual a la longitud del segmento AB, es decir

$$m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{AB}{QB} = \frac{AB}{1} = AB.$$

e. Trasladamos el segmento AB de tal manera que el extremo B quede sobre el punto $(x, 0)$ y A sobre el punto P.
f. La ordenada del punto P, representa la pendiente de la recta secante.
g. El lugar geométrico que describe el punto P cuando x se mueve sobre el eje de las abscisas, es la gráfica de la función $g_h(x)$, a la que llamaremos *función pendiente de secantes*

$$g_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

h. Como $f'(x) = \lim_{h \to 0} g_h(x)$, si tomamos h muy pequeña, la gráfica de $g_h(x)$ será prácticamente igual a la gráfica de la derivada f' de la función f.

5. Utilizando el trazador

Grafiquemos con Cabri, la función $f(x) = x^2$ y con el trazador, construyamos su función derivada. En la Figura 4 se muestra el trazador, las gráficas de $f(x) = x^2$ y la *función pendiente de secantes* $g_h(x)$ con $h = 0.8$. En la Figura 5 se muestra el trazador y las gráficas de $f(x)$ y la función derivada $f'(x)$ (*función pendiente de secantes,* con $h = 0.00001$).

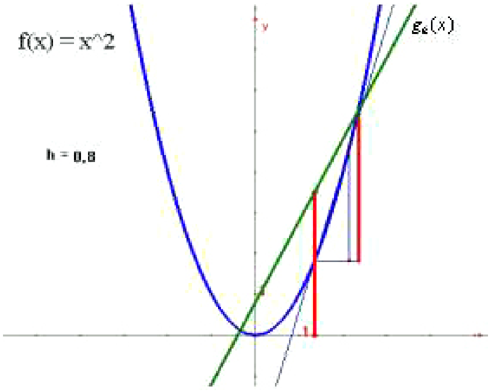

Fig. 4

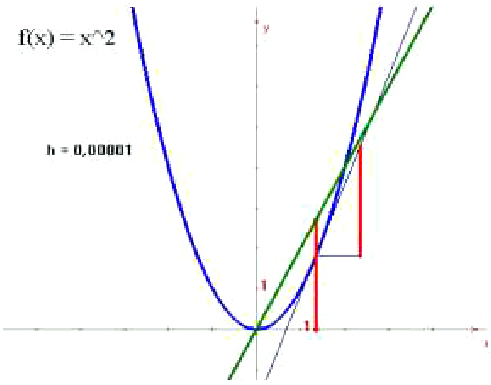

Fig. 5

Obsérvese que cuando *h* es "grande" como en la Figura 4, la función $g_h(x)$ (recta) es una aproximación muy burda a la función derivada $f\,'(x)$, y cuando *h* es "muy pequeña" podemos decir que $g_h(x)$ es una muy buena aproximación a $f\,'(x)$.

Si ocultamos el trazador, tendremos en pantalla las gráficas de *f* y *f '*, como en la Figura 6.

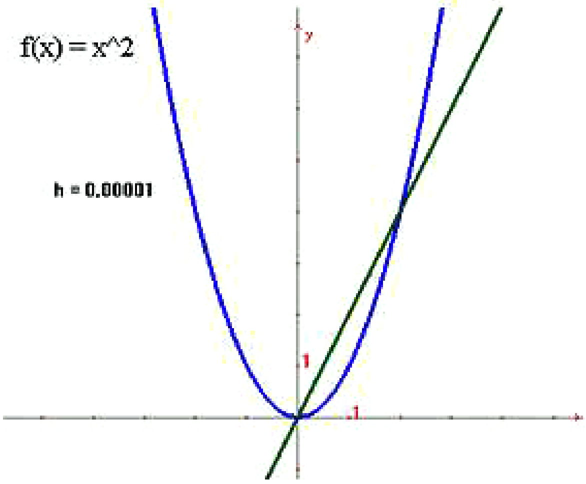

Fig. 6

6. Derivadas de funciones cuadráticas

La graficación de $f(x) = bx^2 + cx + d$, permite generar en pantalla cualquier función de esta familia y con la ayuda de nuestro trazador, visualizar que la función derivada de toda función cuadrática es una función lineal. En particular si solamente variamos el parámetro *d*, observaremos que la función derivada no cambia.

En las Figura 7 y 8 se muestran las gráficas de *f* y *f'*, para $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ y $f(x) = -0.6x^2 + 2x + 3$, respectivamente

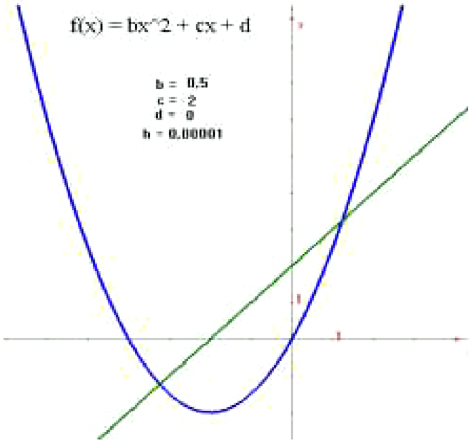

Fig. 7

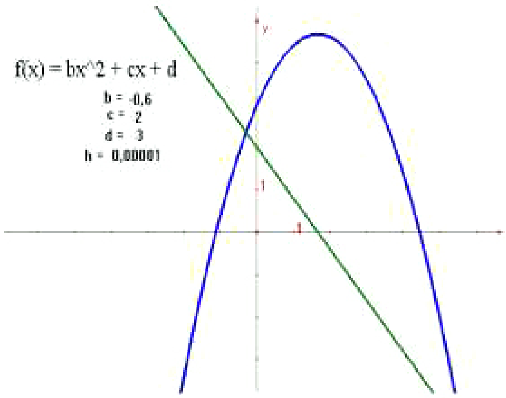

Fig. 8

7. Derivadas de funciones cúbicas

Si modificamos libremente los parámetros $a \neq 0$, *b*, *c* y *d*, podremos visualizar que la derivada de toda función cúbica es una función cuadrática. En las figura 9 y 10 se muestran las gráficas de *f* y *f '*, para

$$f(x) = 0.2x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad \text{y} \quad f(x) = -0.3x^3 + x^2 + 2x - 2,$$

respectivamente

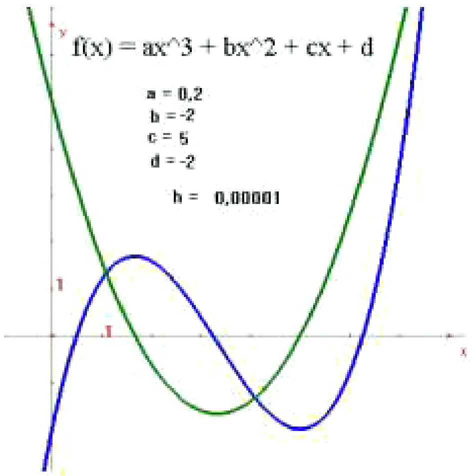

Fig. 9

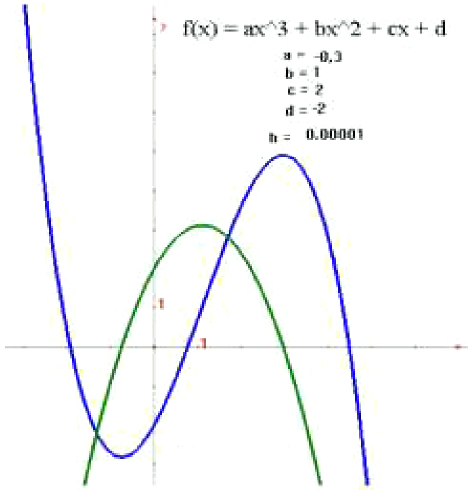

Fig. 10

8. Encontrando expresiones analíticas para las derivadas de algunas funciones

Graficamos con Cabri la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y mediante la selección adecuada de los parámetros, obtenemos las funciones lineales, cuadráticas y cúbicas que se presentan en los incisos a), b) y c). Se le construye el trazador y en cada caso, se muestran en pantalla las gráficas de *f* y *f '* ($g_h(x)$ con h = 0.00001).

Posteriormente, en cada caso, se identifica visualmente a la función derivada.

a. $f(x) = cx + d$ donde *c* y *d* son constantes

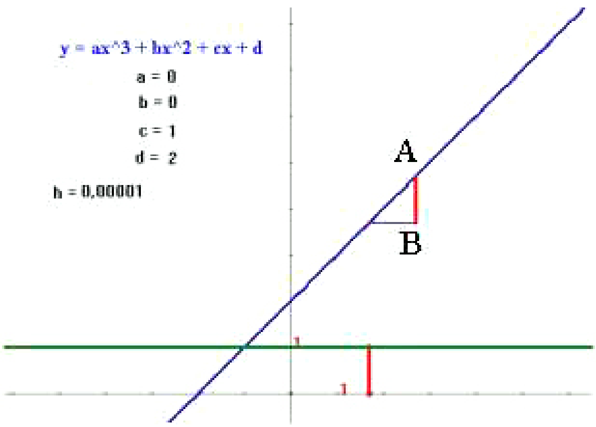

Fig. 11

Si asignamos valores a = 0, b = 0 y dejamos libres c y d, obtendremos la gráfica de una recta de pendiente c. Al graficar la función derivada, observamos que la longitud del segmento trazador AB es igual a la pendiente de la recta, es decir c y por lo tanto

$$\frac{d}{dx}(cx+d)=c\,.$$

b. $f(x)=x^2+2x\ -2$

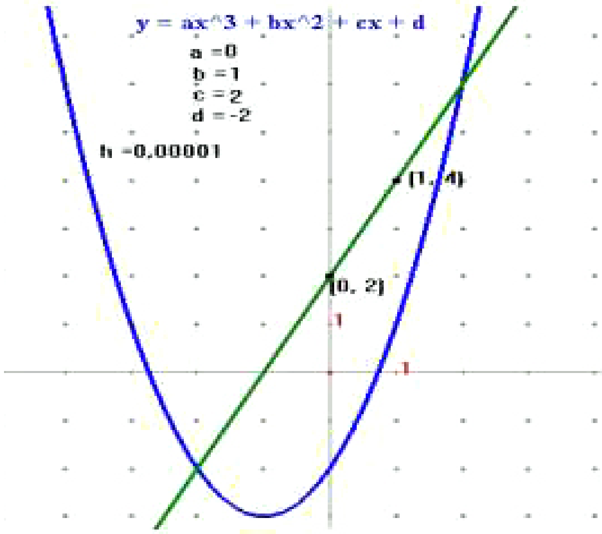

Fig. 12

Para graficar esta función asignamos los valores a = 0, b = 1, c = 2 y d = -2.

Al trazar la función derivada vemos que su gráfica es una recta que pasa por los puntos (0,2) y (1,4), siendo su ecuación $y=2x+2$, es decir

$$\frac{d}{dx}(x^2+2x-2)=2x+2$$

c. $f(x)=x^3-3x^2+8x+1$

Para graficar esta función asignamos los valores a = 1, b = -3, c = 8 y d = 1.

Al trazar la función derivada vemos que su gráfica es una parábola con vértice en el punto (1,5) y que pasa por el punto (2,8). Encontramos que la ecuación de esta parábola es de la forma $f(x)=a(x-1)^2+5$, donde podemos determinar el parámetro *a*, como $a = \frac{3}{1} = 3$,

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 8x + 1) = 3x^2 - 6x + 8\,.$$

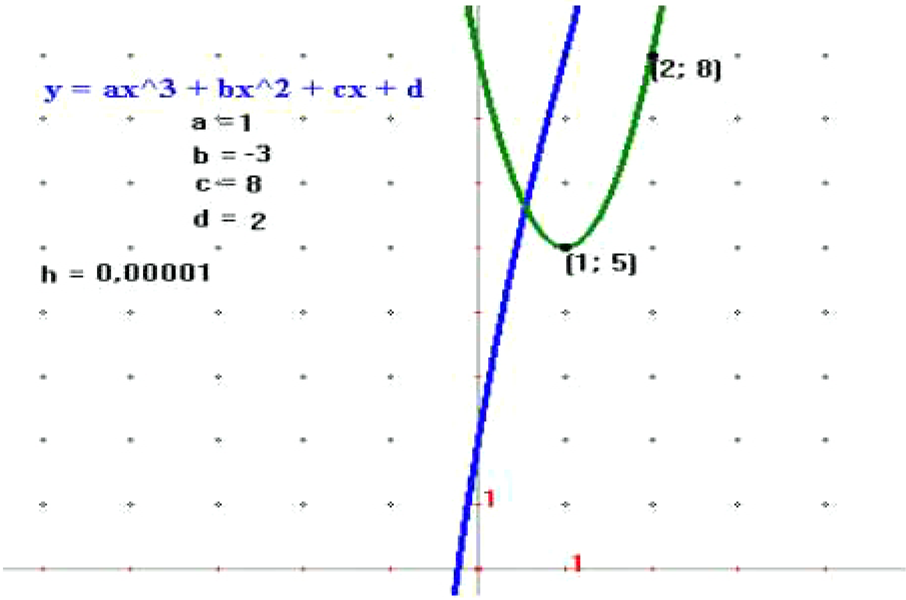

Fig. 13

d. $f(x) = senx$

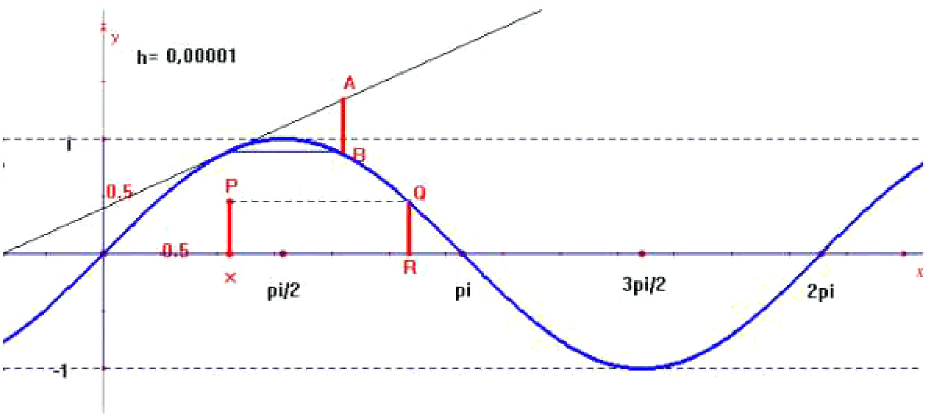

Fig. 14

Antes de graficar la función derivada con el trazador, situamos el punto *x* en los puntos 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, etc ... y por la ubicación del punto P, se observa que $f\,'(0)=1$, $f\,'(\frac{\pi}{2})=0$, $f\,'(\pi)=-1$, $f\,'(\frac{3\pi}{2})=0$, $f\,'(2\pi)=1$, etc ... además, la forma en que crece y decrece la derivada es muy similar a la forma en que lo hace la función original, sugiriendo esto que si se proyecta el punto P hacia la derecha sobre la misma función $f(x)=senx$ y se mueve libremente el punto *x*, visualizaremos que $\overline{PQ}=\frac{\pi}{2}$, es decir que la función derivada evaluada en *x* es igual a $\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$f\,'(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})$$

pero de conocida identidad trigonométrica, obtenemos:

$$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\sin x\cos(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2})\cos x=\cos x$$

y en consecuencia concluimos que

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

Así pues, si le aplicamos el trazador obtendremos la función derivada, la cual es la función $g(x)=\cos x$

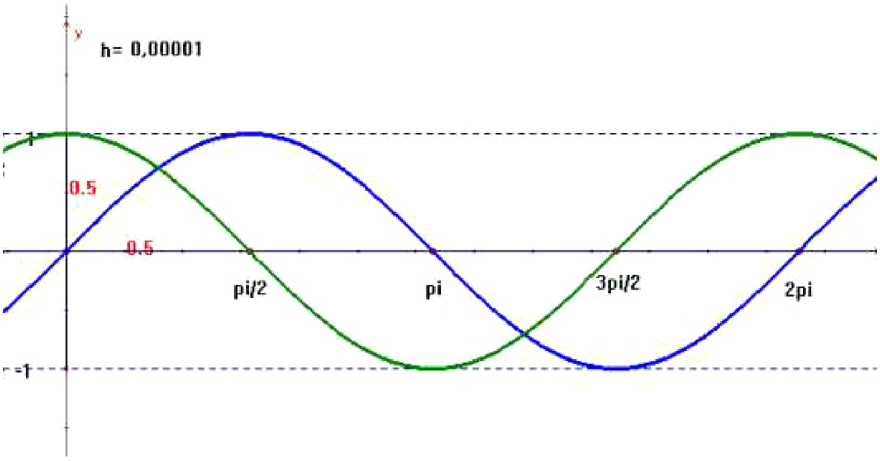

Fig. 15

e. $f(x) = e^x$

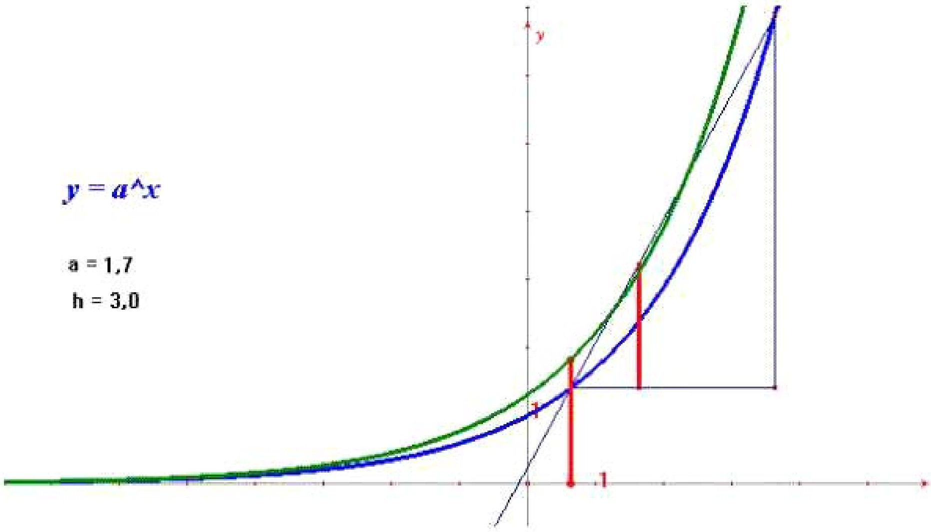

Fig. 16

Para la derivada de la función exponencial, se aplica el trazador de derivadas a la función $f(x) = a^x$ y visualmente se buscan condiciones para que la derivada coincida con la función, encontrando, de esta manera, que a = 2.71828 ..., es decir, concluyendo que:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

f. $f(x) = \ln x$

Para la derivada de la función logaritmo, se hace un tratamiento gráfico-numérico, mostrando en pantalla el valor de la derivada en cada punto x, construyendo una tabla como la siguiente:

x	***f ' (x)***
1/3	3
1/2	2
2	1/2
3	1/3
4	1/4
5	1/5

de la cual se concluye que:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Bibliografía

Sfard Anna, 1992, “Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification - The Case of Function”, in Harel G., Dubinsky E. (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp. 59-71, Washington, DC, The Mathematical Association of America.

The National Council of teachers of mathematics (NCTM), 2001, “*Principles and standards for school mathematics*”, disponible en

http://standards.nctm.org/document/chapter7/conn.htm / [18 de Junio de 2002]

Laborde J. M., Bellemain F., 1994, “*Cabri-Géomètre II (software)*”, Dallas, Tex, Texas Instruments.

Eduardo Tellechea Armenta