SUCESIONES INFINITAS

1. Introducción

Las sucesiones son una colección de objetos que se ordenan de una cierta manera, en general en matemáticas se utilizan muchas sucesiones sin asignarles directamente el nombre de sucesiones, por ejemplo los números naturales:

$$\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, ...$$

En donde los tres puntos de la derecha se utilizan para establecer que la sucesión ordenada sigue infinitamente.

otro ejemplo pueden ser los numeros pares:

$$N^{\circ}\ pares : 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n, ... \qquad , n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Los cuales también son una colección infinita de términos, de la notación antes utilizada podemos identificar varias cosas clásicas en las sucesiones:

- Los elementos de una sucesión tienen un primer elemento.
- Estos tienen un cierto orden
- En general las sucesiones se pueden escribir de forma reducida mediante una expresión que nos permita establecer cualquier elemento en un instante determinado.
- Las sucesiones son en general infinitas, de echo sus elementos pueden ser ordenados y establecer una relación con los numeros naturales, esto es que a cada número natural se le asigne un elemento de la sucesión correspondiente, salvo restricciones pero existen infinitos numeros naturales.

En general las sucesiones se escriben de la forma:

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, ...$

Donde $\{a_n\}$ es la forma de indicar que es la sucesión de infinitos términos de a_n

1.1. Ejemplos:

$\{a_n\} = \{n\} = 1, 2, 3, 4, 5, ...$

$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

$\{c_n\} = \{(-1)^n(2n-1)\} = -1, 3, -5, 7, -9, ...$

Para obtener el valor del "$i - esimo$" termino de la sucesión se reemplaza este valor por n y se obtiene su valor.

Por ejemplo para obtener el veintiunavo termino de la sucesión $\{(-1)^n(2n-1)\}$, reemplazamos 21 en los lugares donde aparece n en la sucesión:

Ejemplos. Los ejemplos más corrientes de sucesiones se indican dando una fórmula que defina el término n-ésimo, como en los siguientes casos:

- $s_n = a$, donde a es un número real prefijado (***sucesión constante***); la sucesión consta de los términos
$$a, a, a, \ldots, a, \ldots$$
- $s_n = n$ (***sucesión de los números naturales***); la sucesión consta de los términos
$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$
- $s_n = \frac{1}{n}$; la sucesión consta de los términos
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$
- $s_n = (-1)^n$; la sucesión consta de los términos
$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$
- Las fórmulas no tienen por qué referirse solo a operaciones algebraicas sencillas. Por ejemplo, considérese la sucesión

$3,1;\ 3,14;\ 3,141;\ 3,1415;\ 3,14159;\ 3,141592;\ 3,1415926;\ 3,14159265;\ 3,141592653;\ldots$ formada por las aproximaciones decimales de π (el término n-ésimo sería la aproximación decimal con n cifras decimales exactas). Aunque no supiéramos escribir con todas sus cifras el término 1 000 000 000 000 000, sabemos que ese término está perfectamente definido, y lo mismo podemos decir de cualquier otro. En este caso podemos dar una fórmula explícita para el término n-ésimo con ayuda de la función parte entera: concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$s_n = 3 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

- ***Sucesiones recurrentes.*** Reciben este nombre las sucesiones cuyos términos se definen en función de los anteriores (definición ***inductiva*** o ***recursiva***). Un ejemplo muy citado de este tipo es la ***sucesión de Fibonacci***, dada por
$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1, \quad s_{n+2} = s_{n+1} + s_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

cuyos primeros términos son
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Las sucesiones definidas por recurrencia aparecen con frecuencia en cálculos con ordenadores:

Otros ejemplos de sucesiones recurrentes son las ***progresiones aritméticas*** de primer término x y razón h, que pueden definirse recursivamente por

$$s_1 = x, \quad s_{n+1} = s_n + h,$$

y las ***progresiones geométricas*** de primer término x y razón r, dadas por

$$s_1 = x, \quad s_{n+1} = s_n \cdot r.$$

Se encuentran sin dificultad fórmulas explícitas en ambos casos: $s_n = x + (n-1)h$ para las primeras, $s_n = x \cdot r^{n-1}$ para las segundas.

1. Definiciones y resultados básicos

La idea de sucesión en $\mathbb{R}$ es la de una lista de puntos de $\mathbb{R}$.

Son ejemplos de sucesiones:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

$$1, 4, 9, 25, 36, \ldots$$

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$$

$$1, 10, 100, 1.000, 10.000, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

Lo importante acerca de una sucesión es que a cada número natural n le corresponde un punto de $\mathbb{R}$, por esto damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. Una sucesión es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión en vez de escribir $a(1), a(2), a(3), \ldots$ suele escribirse

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

La misma sucesión suele designarse mediante un símbolo tal como $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$ También usaremos $\{a_n\}$, (a_n) ó $\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Ejercicio: Cálculo del término general de una sucesión:
Encontrar el quincuagésimo término de la sucesión 1, 3, 5, 7,...
Resolución:
· Es una progresión aritmética de diferencia 2.
· Su término general es:
$a_n = 1 + (n - 1)\cdot 2 = 2n - 1$
· $a_{50} = 2\cdot 50 - 1 = 99$

② Encontrar el término general de la sucesión $\frac{3}{10}, \frac{5}{26}, \frac{7}{50}, \frac{9}{82}, \ldots$

Resolución:

· Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia 2. Su término general es a_n = 2n + 1

· Cada denominador es el cuadrado de su numerador aumentado en una unidad:

10 = 32 + 1; 26 = 52 + 1; 50 = 72 + 1; 82 = 92 + 1

· El término general de la sucesión es:

$$b_n = \frac{a_n}{a_n^2+1} = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1} = \frac{2n+1}{4n^2+4n+2}$$

Otros ejemplos

Términos de la Sucesión	Termino General	Convergencia
1, 3, 5, 7, 9, ...	**$a_n = 2n - 1\ \forall n \geq 1$**	Divergente
Sucesión Aritmética	**a =a +nd**	Divergente
$4, 7, 10, 13, 16, \ldots$	$a_n = 4 + 3n,\ \forall n \geq 0$ (aritmética d=3)	Divergente
3, 1, –1, –3, –5, …	$a_n = 3 - 2(n-1),\ \forall n \geq 1$ (aritmética d=–2)	Divergente
1, 1, 2, 6, 24, 120, ...	**$a_n = n!$**	Divergente
1, −1, 1, −1, 1, −1,...	$a_n = (-1)^n \quad \forall n \geq 0$	Divergente
$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$	$a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 0$	$\lim\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ pues $\left\lvert\frac{-1}{2}\right\rvert < 1.$
Sucesión Geométrica	$a_n = r^n \cdot a_0$	
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$	$\frac{1}{n}$	$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ Convergente
$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$	$a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 1$ (geométrica r=$-\frac{1}{3}$)	$\lim\left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0$ pues $\left\lvert\frac{-1}{3}\right\rvert < 1.$
$\frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, -\frac{32}{243}, \ldots$	$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}, n \geq 1$ (geométrica r = $-\frac{2}{3}$)	$\lim\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} = 0$ pues $\left\lvert\frac{-2}{3}\right\rvert < 1.$
1, –2, 4, –8, 16, …	$a_n = (-2)^{n-1},\ \forall n \geq 1$ (geométrica r=-2)	No existe límite, pues $\lvert -2 \rvert > 1$
1, –3, 9, –27, 81, …	$a_n = (-3)^n,\ \forall n \geq 0$ (geométrica r=-3)	No existe límite, pues $\lvert -3 \rvert > 1$
$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$	$-\frac{1}{n}$	convergente $\lim\left(\frac{-1}{n}\right) = 0$
$-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{5}, \ldots$	$\frac{(-1)^n}{n}$	Convergente

Otros ejemplos de sucesiones aritméticas (s. a):

Problema 1: Conociendo el último término 199, de una progresión aritmética (s. a.), el número de ellos 100, y la suma de sus términos 10.000, calcular el primero y la razón.

Solución:

$a_n = 199;$
$n = 100;$
$S = 10.000;$
$a_1 = ?;$
$d = ?$

$$10000 = (a_1 + 199) * 100 / 2$$

$$20.000 = (a_1 + 199) * 100$$

$200 = a_1 + 199;$
$a_1 = 1$

$199=1+(100-1)*d$
$198=99*d$
$d=2$

$a_1 = 1$ y $d = 2$

Problema 2: Conociendo el primer término 3, el último 39 y la suma 210 de las términos de una s. a., calcular la razón y el número de términos:

Solución:

$a_1 = 3;$
$a_n = 39;$
$S = 210;$
$d = ?;$
$n = ?$

$210 = (3 + 39) * n / 2;$
$210 = 42 * n / 2;$

$210 = 21 * n;$
$n = 10$

$39 = 3 + (10 - 1) * d;$
$39 - 3 = 9 * d;$
$36 = 9 * d;$
$d = 4$

$n = 10$ y $d = 4$

Problema 3. Determinar el número de términos de una p. a. y el último, sabiendo que el primero vale 3, la razón es 2 y la suma 120.

Solución:

$n = ?;$
$a_n = ?;$

$a_1 = 3;$
$d = 2;$
$S = 120$

$a_n = 3 + (n - 1) * 2 ;$
$a_n = 3 + 2n - 2;$
$a_n = 1 + 2n;$

$120 = (3 + a_n) * n / 2;$
$240 = (3 + 1 + 2n) * n;$
$240 = 4n + 2n^2;$
$n^2 + 2n - 120 = 0$

Resolviendo le ecuación de segundo grado hallamos los valores de n; n = 10**;**

Para n = 10;
$a_n = 1 + 2n;$
$a_n = 1 + 20;$
$a_n = 21$

Ejercicios:

En los ejercicios 1 a 5, escriba los primeros cinco términos de la sucesión. En los ejercicios 6 a 9 grafique las sucesiones cuyo término general se da.		
1. $a_n = (-1)^n$	2. $k_n = \begin{cases} 2^n & \text{para } n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$	3. $f_n = n(n-1)$
4. $h_n = \dfrac{1}{n}(-1)^n$	5. $q_n = (-1)^n + 1$	6. $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$
7. $a_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$	8. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n+1}$	9. $a_n = \begin{cases} \dfrac{1-5n}{n} & \text{para } n \text{ impar} \\ \dfrac{1+5n}{n} & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$

Operaciones con sucesiones.

● DEFINICIÓN 3.9 *Dadas dos sucesiones, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se llama suma de ellas dos a la sucesión $\{c_n\}$, cuyos términos se obtienen de la forma $c_i = a_i + b_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Análogamente se definen el producto y cociente de sucesiones. Este último siempre y cuando los términos del denominador sean distintos de cero.*

EJEMPLO 3.7 Sean:

$$\{a_n\} = \frac{n+1}{n} = 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5, \ldots$$
$$\{b_n\} = \frac{1}{n} = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$$

Su suma: $\{a_n + b_n\} = \dfrac{n+2}{n} = 3, 4/2, 5/3, 6/4, 7/5, \ldots$

Su producto y cociente:

$$\{a_n \cdot b_n\} = \frac{n+1}{n^2} = 2, 3/4, 4/9, 5/16, 6/25, \ldots$$
$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = n + 1 = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Una sucesión, al igual que toda función, tiene una representación gráfica.
Por ejemplo, sean

$$\alpha_n = n$$

$$\beta_n = (-1)^n$$

$$\gamma_n = \frac{1}{n}$$

Las gráficas de $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ son las siguientes:

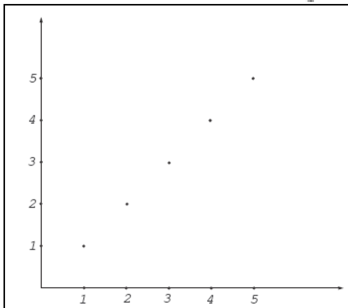


FIGURA 1.1. $\{\alpha_n\}$

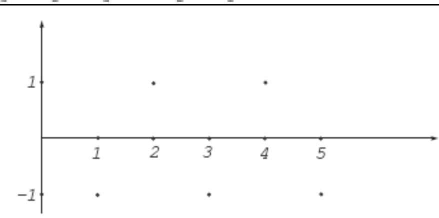


FIGURA 1.2. $\{\beta_n\}$

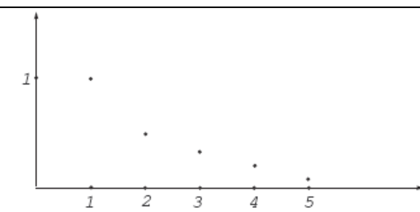
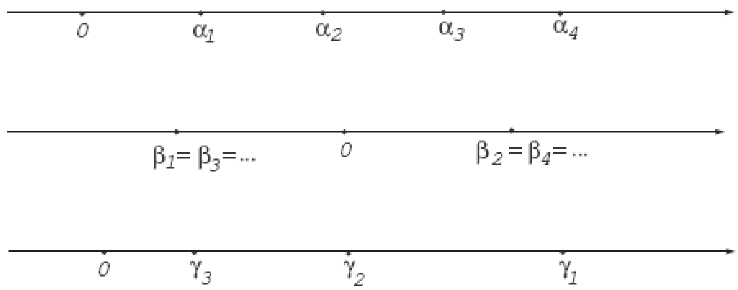


FIGURA 1.3. $\{\gamma_n\}$

Sin embargo se obtiene una mejor representación de una sucesión marcando los puntos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sobre una recta:



Vemos que la gráfica de cada una es distinta, en la primera de las sucesiones se observa que la secuencia de puntos crece sin tener un tope aparente, de la misma forma que la grafica de la segunda sucesión, algo que no presenta la tercera, la cual aparentemente no tomara valores negativos en la imagen, ósea que no pasara el eje de las x; esto es lógico al ver la función, pues esta es una división que esta formada por uno y un numero natural, el cual es positivo y la sucesión además nunca puede ser cero, dado que para que sea cero el numerador solamente puede ser cero, lo cual es imposible dado que este es 1, esta propiedad de acercarse mucho a un numero sin llegar a tomar tal numero es una propiedad importante en relación con las sucesiones, cuando en una sucesión pasa esto se dice que esta sucesión converge, es lo que pasa con la sucesión $\{\gamma_n\}$; la cual converge a cero, en el caso de las sucesiones $\{\alpha_n\}$; $\{\beta_n\}$ estas divergen, dado que crecen infinitamente, la definición de la convergencia es:

Definición 2.1. Una sucesión $\{a_n\}$ *converge hacia* L (en símbolos $\lim_{n \to \infty} a_n = L$) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todos los números naturales n, tal que $n > N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$

Esto es que cuando n crece indefinidamente ($n \to \infty$), la sucesión se "estabiliza" en torno a un numero (L), esto es lo que representa el limite.

Con relación a la definición, ε es un numero positivo tan pequeño como se desee, y la definición establece que después de cierto numero natural ($n > N$) la distancia entre la imagen y el limite (numero al cual se acerca) es tan pequeña como se desee.

Esta definición nos brinda dos formas de demostrar la convergencia de una sucesión, pero además existen otras formas de establecer la convergencia o divergencia de una sucesión.

Basándonos en las propiedades de limite podemos descomponer sucesiones complicadas en otras mas simples para analizar su convergencia:

Propiedades de limite:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

además si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $b_n \neq 0$ para todo n mayor que algún N, y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},$$

En este caso se considera para términos de la sucesión $(n > N)$, los términos antes de este N no es necesario que sean distintos de cero ni que tengan alguna condición, dado que en una sucesión cualquiera que converja a algún numero L se le puede quitar una cantidad finita de términos sin afectar su convergencia.

Clasificación de las sucesiones.

Toda sucesión pertenece a uno de estos tres grupos:

1. Convergentes (que tienen límite).
2. Divergentes (que tienden a infinito).
3. Oscilantes (que no son convergentes ni divergentes).

Ejemplos:

1. En los siguientes ejercicios, hallar el término general, el límite (si 1º tienen), y clasificar las sucesiones:

½, 4/3, 9/4, 16/5, …

Resolución

El numerador y denominador son dos progresiones aritméticas. Por tanto, $\{a_n\} = \dfrac{3n+1}{4n+1}$.

Su límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{4n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+1/n}{4+1/n} = \dfrac{3+0}{4+0} = \dfrac{3}{4}$.

La sucesión es convergente de límite $\dfrac{3}{4}$.

2. 4/5, 7/9, 10/13, 13/17, …

Resolución

$\{a_n\} = \dfrac{n^2}{n+1}$. Su límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = \dfrac{\infty}{\infty}$ (indeterminado)

Dividiendo numerador y denominador por n^2: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Por tanto, la sucesión es divergente.

3. -1, 1, -1, 1, -1, 1, …

Resolución

$\{a_n\} = (-1)^n$. No es convergente, ya que 1 y -1 no son límites sino puntos de acumulación. Si se toma un entorno conveniente de 1, fuera de dicho entorno quedan infinitos términos iguales a -1. La sucesión es oscilante, ya que no es convergente ni tampoco divergente.

4. 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, 1, …

Su término general:

$$\{a_n\} = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es impar} \\ \text{n si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Es oscilante, ya que 1 no es límite. Tomando un entorno de 1, los infinitos términos pares quedan fuera de dicho entorno. Tampoco es divergente ya que, fijado $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$, los infinitos términos impares son menores que k.

Ejemplo: cálculo de límites de Sucesiones.

① Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Resolución:

• Este límite es de la forma $\infty - \infty$. Indeterminado.

Este límite se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado, es decir, por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. (El conjugado de a + b es a - b.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

• Por tanto el límite se reduce a calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$ Así la sucesión converge a cero.

② Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{2n^3+1}{n-5}\right)$.

Resolución:

• El primer factor tiene por límite cero ya que el grado del numerador es menor que el del denominador.

• El segundo factor tiene por límite ∞ pues el grado del numerador es mayor que el del denominador.

• El límite es por tanto de la forma $0 \cdot \infty$. Indeterminado.

• Multiplicando las dos fracciones:

$$\frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{2n^3+1}{n-5} = \frac{2n^3+1}{n^3-5n^2+n-5}$$

• Al ser un cociente de polinomios de igual grado,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+1}{n^3-5n^2+n-5} = \frac{2}{1} = 2$$ De esta manera la sucesión converge a 2.

③ Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$.

Resolución:

• $\sqrt{n} \to \infty$ pues $\sqrt{n}$ se hace tan grande como se desee.

• $n \to \infty$ por la misma razón. El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminado.

• Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n}$:

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}} = \frac{n}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

• Puesto que $\sqrt{n} \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$. La sucesión converge a 0.

④ Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}}$.

Resolución:

• El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Indeterminado.

• Se saca factor común n^2 en la expresión $n^2 + 3n - 2$:

$$n^2+3n-2 = n^2\left(1+\frac{3n}{n^2}-\frac{2}{n^2}\right) = n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)$$

• $\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$

• Así, $\frac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}} = \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}}$

• Como $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = \sqrt{1} = 1$

• Finalmente, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+3n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}} = \frac{2}{1} = 2$

. La sucesión converge a2

Ejemplos (sucesiones convergentes). a) Las sucesión constante $s_n = c$ ($c \in \mathbb{R}$) converge al número c.

b) La sucesión $(1/n)$ converge a 0

Ejemplos (sucesiones no convergentes). a) La sucesión $((-1)^n)$ no es convergente
b) La sucesión (n) no puede ser convergente,

Ejemplos. a) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

converge a $1/2$: basta observar que

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

Y después se calcula el límite cuando n $\to\infty$

b) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{1}{n}\Big[\big(a+\frac{1}{n}\big)^2+\big(a+\frac{2}{n}\big)^2+\cdots+\big(a+\frac{n-1}{n}\big)^2\Big]$$

converge al número $a^2+a+\frac{1}{3}$ (¿por qué?).

d) La sucesión de término n-ésimo

$$\frac{\sqrt{1+n}-1}{n}$$

converge a 0 (¿por qué?).

Tip. Calcula el límite cuando n $\to\infty$

f) La sucesión de término n-ésimo

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

converge (¿a qué límite? ¿por qué?).

g) La sucesión (s_n) con

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

converge a 1 $\left(\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Longrightarrow s_n=1-\frac{1}{n+1}\to 1\right)$.

Ejercicio: Cálculo del término general de una sucesión:
Encontrar el quincuagésimo término de la sucesión 1, 3, 5, 7,...
Resolución:
· Es una progresión aritmética de diferencia 2.
· Su término general es:
$a_n = 1 + (n - 1)\cdot 2 = 2n - 1$
· $a_{50} = 2\cdot 50 - 1 = 99$

② Encontrar el término general de la sucesión $\frac{3}{10}, \frac{5}{26}, \frac{7}{50}, \frac{9}{82}, \ldots$

Resolución:

· Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia 2. Su término general es a_n = $2n + 1$
· Cada denominador es el cuadrado de su numerador aumentado en una unidad:
10 = 32 + 1; 26 = 52 + 1; 50 = 72 + 1; 82 = 92 + 1
· El término general de la sucesión es:

$$b_n = \frac{a_n}{a_n^2 + 1} = \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2n+1}{4n^2 + 4n + 2}$$

Ejercicios de Sucesiones.

1. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

(a) $2, -4, 8, -16, 32, \ldots$

(b) $1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{4}, 1 + \frac{7}{8}, 1 + \frac{15}{16}, \ldots$

(c) $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}, \frac{64}{36}, \ldots$

(d) $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{16}, \frac{4}{32}, \frac{5}{64}, \ldots$

(e) $-1, \frac{2}{3}, \frac{-3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{-5}{9}, \ldots$

(f) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{9}, \frac{9}{12}, \frac{9}{15}, \frac{13}{18}, \ldots$

Escriba los primeros 10 términos de las siguientes sucesiones:

a) $\{a_n\} = \frac{n}{n-15}$

b) $\{b_n\} = \frac{n!}{n^n}$

c) $\{c_n\} = \sqrt[n]{n^3 - \frac{n}{n!}}$

Compruebe y determine la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

b) $\left\{\frac{n+3}{n^3+4}\right\}$

c) $\left\{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}\right\}$

Demostrar con argumentos que:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \qquad a > 0$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$