I. INTEGRACIÓN POR PARTES.

Si la integración de una función no es posible encontrarla por alguna de las fórmulas conocidas, es posible que se pueda integrar utilizando el método conocido como *integración por partes*. Este método tiene como base la integración de la fórmula para la derivada de un producto de dos funciones.

Sean ***u=u(x) y v=v(x).*** Entonces

$$duv = udv + vdu$$

o

$$udv = uv - vdu$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación obtenemos

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1.1)$$

Como se puede ver la *Integración por partes* es la contraparte de la regla del producto de la diferenciación, ya que el integrando en cuestión es el producto de dos funciones (por lo general). En resumen éste es el procedimiento:

Para aplicar la fórmula (1.1) en la práctica, se separa el integrando en dos partes; una de ellas se iguala a **u** y la otra, junto con dx a **dv.** Por eso se llama integración por partes. Es conveniente considerar los dos criterios siguientes.

(a) La parte que se iguala a **dv** debe ser fácilmente integrable.

(b) La $\int vdu$ no debe de ser más complicada que $\int udv$

Luego se aplica la fórmula de integración por partes. Este proceso convierte el integrando original - que no se puede integrar - en un integrando que si se puede integrar. Tan claro como el agua, ¿verdad?

Vas a aprender la técnica muy rápido si utilizas el acrónimo **LIATE** y el método del ejemplo de abajo:

Para seleccionar la función **u**, sólo tienes que ir hacia abajo en la lista del acrónimo, la primera función de la lista que coincida con una de tu integrando es la función **u**. El acrónimo que te ayudará a escoger tu función **u** es el siguiente:

Logarítmica (como *Lnx*)

Inversa trigonométrica (como *arcsenx*)

Algebraica (como x^{3}, o $2x+10$)

Trigonométrica (como *sen2x*)

Exponencial (como 7^{2x}, o e^{2x})

Calcular la integral $\int x^2 \ln x dx$

Tu primer reto en la integración por partes es decidir cuál es la función, (de tu integrando original), que desempeñará el papel de la **u** en la fórmula. He aquí cómo se hace

El integrando contiene una función logarítmica (la primera en LIATE) así que ***lnx*** es tu función ***u***, el resto ***x²dx*** automáticamente es ***dv***.

Así pues tienes los términos son:

$$u = \ln x, \quad dv = x^2 dx$$

Pero la integral por partes contiene cuatro términos, te faltan los siguientes: ***du***, y ***v***. Estos los encuentras diferenciando ***u***, e integrando ***dv***, es decir:

Si $u = \ln x \quad entonces \quad du = \frac{1}{x}dx$

Si $dv = x^2 dx \quad entonces \quad v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ Esto significa que ***v*** se encuentra integrando ***dv***.

Ahora, ya tenemos los cuatro elementos que aparecen en la fórmula de integración por partes (1.1), sustituyendo estos valores ella entonces

$$\int x^2 \ln x dx = uv - \int v du = (\ln x)\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \int \frac{1}{3}x^3 \frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}x^3 + C \text{ , de donde}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Problemas resueltos.

Ejemplo1. Calcular $\int x^3 e^{x^2} dx$

Primero reescribimos la integral así: $\int x^2 x e^{x^2} dx$. Por LIATE hacemos

$u = x^2$, y $dv = xe^{x^2}$; de donde $du = 2x$, y $v = \int dv = \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}(2xdx) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

Bueno ya tenemos los elementos de la integral por partes.

$$u = x^2 \qquad dv = e^{x^2} x dx$$

$$du = 2x dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Por tanto aplicando la fórmula (1.1) se tiene

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \left\| \begin{matrix} \text{pero la última integral} \\ \text{ya se calculó es (v)} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejemplo 2. Calcular $\int x(senx)dx$

Usando LIATE hacemos $u = x, \text{ y } dv = (senx)dx$; de donde
$du = dx, \text{ y } v = \int dv = \int (senx)dx = -\cos x$

Aplicando la integración por partes obtenemos

$\int x(senx)dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \int (\cos x)dx = -x\cos x + sex + C$

Ejemplo 3. Calcular $\int \ln(x^2+4)dx$

Hacemos $u = \ln(x^2+4), \text{ y } dv = dx$; por tanto diferenciado e integrando tenemos ***u***, y ***v***. $du = \dfrac{1}{x^2+4}d(x^2+4) = \dfrac{2xdx}{x^2+4}$, $v = \int dx = x$

Por tanto

$$\int \ln(x^2+4)dx = x\ln(x^2+4) - \int (x)\frac{2xdx}{x^2+4} = x\ln(x^2+4) - \int \frac{2x^2dx}{x^2+4}$$

Ahora calculamos la integral $\int \dfrac{2x^2dx}{x^2+4}$. Recordar que $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a}$

$$\int \frac{2x^2dx}{x^2+4} = \left\| \frac{2x^2}{x^2+4} = 2 - \frac{6}{x^2+4} \right\| = \int \left(2 - \frac{6}{x^2+4}\right)dx = 2\int dx - 6\int \frac{dx}{x^2+4} = 2x - 6\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}$$

De donde

$$\int \ln(x^2+4)dx = x\ln(x^2+4) - (2x - 6\arctan\frac{x}{2}) + C = x\ln(x^2+4) - 2x + 3\arctan\frac{x}{2} + C$$

Ejemplo 4. $\int x\sqrt{x+2}dx$

Haciendo $u = x, \text{ y } dv = \sqrt{x+2}dx$; tendremos $du = dx$, para obtener ***v*** hacemos lo siguiente: $v = \int \sqrt{x+2}dx = \int (x+2)^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{(x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$. Por lo tanto

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (x+2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$
. De donde

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}x(x+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{10}{6}(x+2)^{\frac{5}{2}} + C$$

Ejemplo 5. Calcular $\int xe^{2x}dx$

Haciendo $u = x, \text{ y } dv = e^{2x}$, encontramos

$$du = x, \text{ y } v = \int e^{2x}dx = \left\| \begin{matrix} u = 2x, \ du = 2dx \\ dx = \dfrac{du}{2} \end{matrix} \right\| = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^{2x}$$

. Aplicando la fórmula de integral por partes obtenemos

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Ejemplo 6. $\int x^2 \cos 3x dx$. En este ejemplo se aplica la integral por partes dos veces.

Hacemos $u = x^2, \text{ y } dv = \cos 3x dx$, por tanto

$$du = 2xdx, \text{ y } v = \int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} u = 3x, \ du = 3dx \\ dx = \dfrac{du}{3} \end{matrix} \right| = \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3} sen 3x$$

. Por la integral por partes tenemos,

$$\int x^2 \cos 3x dx = x^2 \frac{1}{3} sen3x - \int \frac{1}{3} sen3x(2xdx) = \frac{x^2 sen3x}{3} - \frac{2}{3}\int xsen3xdx \quad (1.2)$$

Observa que en la integral $\int xsen3xdx$, ha bajado el exponente de la x (de 2 a 1), lo cual sugiere volver a integrar por partes así que, hacemos aquí $u = x, \text{ y } dv = senxdx$, y en consecuencia

$$du = dx, \text{ y v=}\int sen3xdx = \left\| \begin{matrix} u = 3x \ du = 3dx \\ dx = \dfrac{du}{3} \end{matrix} \right\| = \int senu \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int senudu = \frac{1}{3}(-\cos 3x) = -\frac{\cos 3x}{3}$$

de donde

$$\int xsen3xdx = x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) - \int\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)dx = -\frac{x\cos 3x}{3} - \frac{1}{3}\int \cos 3x dx$$

$$= -\frac{x\cos 3x}{3} - \frac{1}{3}(-\frac{1}{3}sen3x) = -\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}sen3x$$

Sustituyendo este último resultado en (1.2) tenemos

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{x^2 se3x}{3} - \frac{2}{3}\int xsen3xdx = \frac{2xse3x}{3} - \frac{2}{3}\left\{-\frac{x\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}sen3x\right\}$$

$$= \frac{x^2 sen3x}{3} + \frac{2x\cos 3x}{9} - \frac{2sen3x}{27} + C$$

Ejemplo 7. Calcular $\int x^3 e^x dx$

El acrónimo LIATE nos sugiere tomar $u = x^3$, y $dv = e^x$, y por lo tanto $du = 3x^2dx$, y $v = \int e^x dx = e^x$, así que aplicando la formula de integral por partes obtenemos

$\int x^3e^xdx = x^3e^x - \int e^x(3x^2dx) = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx$ (1.3)

Observa que hemos mejorado nuestra situación, el exponente de la x bajó de 3 a 2, lo cual nos sugiere aplicar de nuevo la integral por partes a la última integral, así que hagámoslo

$$\int x^2e^xdx = \left\| \begin{matrix} u = x^2, & dv = e^x \\ du = 2xdx, & v = \int e^xdx = e^x \end{matrix} \right\| = x^2e^x - \int e^x(2xdx) = x^2e^x - 2\int xe^xdx$$

Si reemplazamos éste último resultado en la ecuación (1.3) tenemos

$$\int x^3e^xdx = x^3e^x - \int e^x(2x^2dx) = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx) = x^3e^x - 3\left\{x^2e^x - 2\int xe^xdx\right\}$$

$\int x^3e^xdx = x^3e^x - 3\int x^2e^xdx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^xdx$ (1.4)

Observa que en la última integral de la derecha el exponente de la x ahora bajó de 2 a 1, así que aplicamos de nuevo la integración por partes.

$$\int xe^xdx = \left\| \begin{matrix} u = x, & dv = e^x \\ du = dx, & v = \int e^xdx = e^x \end{matrix} \right\| = xe^x - \int e^xdx = xe^x - e^x$$

Bueno parece que ya terminamos, observa que en la última integral ya no apareció la x. Solo falta reemplazar el último resultado en la ecuación (1.4) y finalizamos.

$\int x^3e^xdx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^xdx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left\{xe^x - e^x\right\} + C$. Por tanto

$$\int x^3e^xdx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$

Ejemplo 8. Calcular $\int arcsenxdx$

Hacemos las sustituciones

$\left\| \begin{matrix} u = arcsenx, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right\|$ y tenemos, $\int arcsenxdx = xarcsenx - \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

Y ahora

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} xdx = \left\| \begin{matrix} u = 1-x^2, & du = -2xdx \\ dx = -\frac{du}{2x} & \end{matrix} \right\| = \int \cancel{x} u^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{du}{2\cancel{x}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = -u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Por lo tanto $\int arcsenxdx = xarcsenx - (-\sqrt{1-x^2}) + C = xarcsenx + \sqrt{1-x^2} + C$

Ejemplo 9. Calcular $\int x \arctan xdx$.

De acuerdo con el acrónimo LIATE tomamos $u = arc\tan x, \quad dv = xdx$, así entonces

$du = \frac{dx}{1+x^2}, y \quad v = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$. Por lo tanto la integral por partes es

$$\int x \arctan xdx = (\arctan x)\frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx \quad (1.5)$$

Ahora lo único que tenemos que hacer es calcular la integral $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \left\| \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \right\| = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \arctan x$$

En conclusión reemplazando el último resultado en (1.5) obtenemos

$$\int x \arctan xdx = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{1}{2}\{x - \arctan x\} + C = \frac{x^2 \arctan x}{2} - \frac{x}{2} + \arctan x + C$$

Ejemplo 10. Calcular $\int sen^2 xdx$

$$\int sen^2 xdx = |\text{Para integrar separamos}| = \int (senx)(senx)dx$$

Así $\left\| \begin{matrix} u = senx, & dv = senxdx \\ du = \cos xdx, & v = \int senxdx = -\cos x \end{matrix} \right\|$ aplicando la integral por partes

$$\int sen^2 xdx = senx(-\cos x) - \int (-\cos x)(\cos xdx) = -senx\cos + \int \cos^2 xdx \quad (1.6)$$

Ahora nuestro problema es calcular la integral $\int \cos^2 xdx$, sin embargo recordemos que $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$, así que

$\int \cos^2 xdx = \int (1-sen^2 x)dx = \int dx - \int sen^2 xdx = x - \int sen^2 xdx$, es decir

$\int \cos^2 xdx = x - \int sen^2 xdx$, reemplacemos esta última ecuación en (1.6)

$\int sen^2 xdx = -senx\cos + \int \cos^2 xdx = -senx\cos x + x - \int sen^2 xdx$, observa que el último término está restando, así que lo pasamos sumando al inicio de la ecuación y tenemos

$\int sen^2 xdx + \int sen^2 xdx = -senx\cos x + x$, sumamos y

$2\int sen^2 xdx = senx\cos x + x$, de donde el 2 pasa dividiendo

$$\int sen^2 xdx = \frac{senx\cos x + x}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{senx\cos x}{2} + C$$

Ejemplo 11. Calcular $\int \sec^3 xdx$

Como en el ejemplo anterior separamos $\sec^3 x = \sec^2 x\sec x$. Por tanto $\int \sec^3 x = \int \sec^2 x\sec xdx$. La parte más complicada del integrando que resulta fácil de integrar porque conocemos una fórmula es *sec*^{2}*x*, por tanto tomamos

$\left\| \begin{matrix} u = \sec x, & dv = \sec^2 xdx \\ du = \sec x\tan xdx, & v = \int \sec^2 xdx = \tan x \end{matrix} \right\|$ Aplicando la integral por partes se tiene

$$\int \sec^3 xdx = \sec x\tan x - \int \tan x(\sec x\tan xdx) = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 xdx \quad (1.7)$$

Así que sólo nos queda resolver la integral $\int \sec x\tan^2 xdx$. Manos a la obra

$$\begin{aligned} \int \sec x\tan^2 xdx &= \left\| \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \right\| = \int \sec x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \int (\sec^3 x - \sec x)dx = \int \sec^3 xdx - \int \sec xdx \end{aligned}$$

Este último resultado lo reemplazamos en la ecuación (1.7)

$\int \sec^3 xdx = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 xdx = \sec x\tan x - \left\{ \int \sec^3 xdx - \int \sec xdx \right\}$ de donde

$\int \sec^3 xdx = \sec x\tan x - \int \sec^3 xdx + \int \sec xdx = \sec x\tan x - \int \sec^3 xdx + \ln\left|\sec x + \tan x\right|$,

observa que $\int \sec^3 xdx$ está restando, así que lo pasamos sumando al primer término y tenemos

$\int \sec^3 xdx + \int \sec^3 xdx = \sec x\tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|$, sumando

$2\int \sec^3 xdx = \sec x\tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|$ y finalmente

$$\int \sec^3 xdx = \frac{\sec x\tan x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|}{2} + C = \frac{\sec x\tan x}{2} + \frac{\ln\left|\sec x + \tan x\right|}{2} + C$$