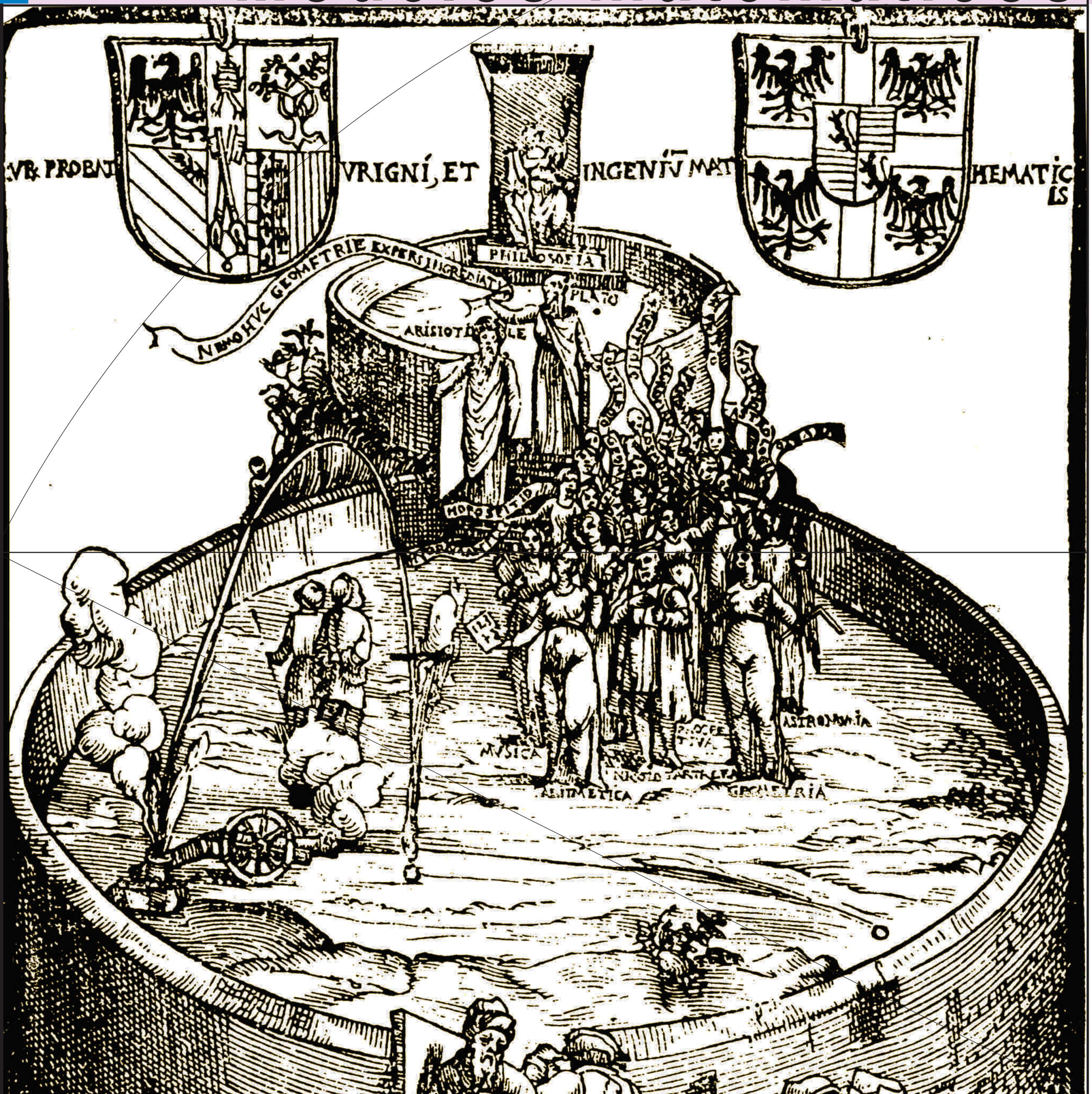
Fundación POLAR

Modelos matemáticos



En la “Nuova Scienza” (1537) de Tartaglia, destinada principalmente a los artilleros, se utiliza la concepción “tripartita” de la trayectoria de una bala de cañón. El artista encargado de la ilustración del libro usó una bombarda y dibujó la trayectoria del proyectil en forma aproximadamente parabólica.

Renacimiento

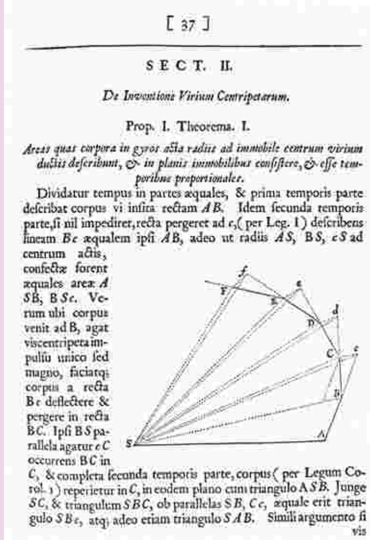
El estudio de la trayectoria de un proyectil, entre otros, fue un elemento importante a considerar y el matemático italiano Tartaglia (ca. 1500-1557) escribió un tratado de artillería, llegando a ser Galileo Galilei (físico, matemático y astrónomo italiano, 1564-1642) quien demostró que la trayectoria que seguían los proyectiles al ser lanzados con cierta velocidad inicial es parabólica. Galileo dio origen al método científico-analítico el cual, aunado al método de la razón de Descartes (1596-1642), terminó con el tipo de ciencia que se desarrolló durante la Edad Media.

Estos fascículos están disponibles en línea visitando la página web: **http://www.fpolar.org.ve/matematica2**

La matemática aplicada y los modelos matemáticos: Una breve historia.

La gran creación: El cálculo infinitesimal (s. XVII)

Con el nacimiento del cálculo infinitesimal por obra de I. Newton (inglés, 1642-1727) y G. Leibniz (alemán, 1646-1716) se incorporó a la matemática el estudio del *cambio* y, después de estos dos insignes científicos, la matemática pasó a ser *el estudio del número, la forma, el movimiento, el cambio y el espacio* (Devlin, 2001). La creación del cálculo es una de las bases del progreso científico actual y permitió profundizar y explicar diversos hechos y fenómenos de la mecánica, la astronomía, la hidrodinámica, insertándose en las diversas áreas científicas. La matemática continuó estrechamente vinculada con el "mundo real". Fue un gran éxito de la matemática de los siglos XVII y XVIII suministrar a las leyes de la mecánica y del movimiento de los planetas (la mecánica celeste) modelos matemáticos que concordaban con las observaciones.


[37]

SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

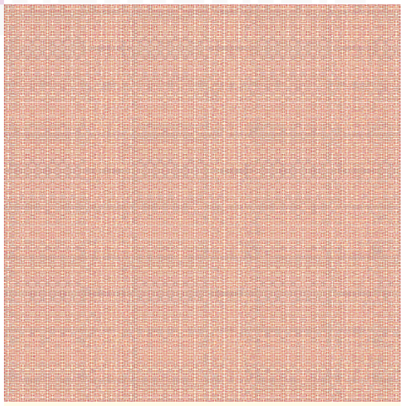
Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta *Bc* deflectere & pergere in recta BC. Ipsi B*S* parallela agatur *cC* occurrens B*C* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas S*B*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis

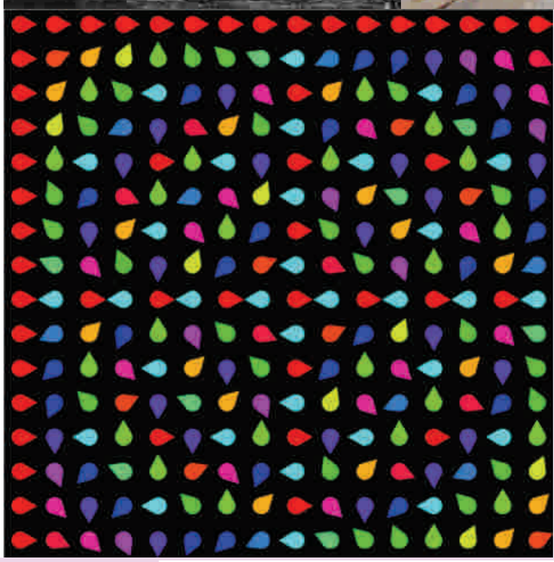
Newton, Principia (1687), Libro I, Proposición I, Teorema I. Se ve aquí la trayectoria que traza una partícula bajo la influencia de una fuerza centrípeta emanada de un punto fijo.


A principios de 1666 Newton valiéndose de un prisma como éste y un agujero en la contraventana de su habitación, va a demostrar que la luz del sol es una mezcla de luces de los colores del espectro.


El actor alemán Peter Henze en el papel de Leibniz en su taller de la serie de televisión que se rodó sobre su vida.


Joseph Fourier
matemático francés (1768-1830)


En 1890, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) desconcierta a sus contemporáneos proponiendo "una curva que llena toda una área plana", mejor dicho, un objeto unidimensional que cubre una superficie bidimensional. Este es un ejemplo de dicha situación.


Otra forma de representar las transformadas de Fourier discreta.
Fuente: http://www.cas.mcmaster.ca/~anand/4TG32002/

Siglo XIX

Fue solamente en el siglo XIX que apareció la matemática "pura", libre de limitaciones vinculantes y sugeridas por las ciencias de la naturaleza. Anteriormente no se discutía en el seno de los matemáticos la utililidad de la ciencia que profesaban. En el primer tercio de ese siglo tuvo lugar una famosa polémica entre Jacobi y Fourier (carta de Jacobi a Legendre en 1830) en referencia a la posición de este último de la *matemática para el sistema del mundo, la matemática utilitaria* versus la *matemática por el honor del espíritu humano* de Jacobi.

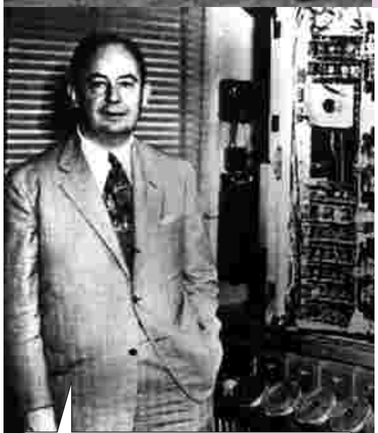
Hasta hace un poco más de doscientos años, la matemática aplicada, denominada a menudo “matemáticas mixtas”, era el ideal matemático, la última meta de las investigaciones. Gran parte del prestigio de los matemáticos yacía en las aplicaciones. Muchos de los principales matemáticos hasta el siglo XIX se ocuparon tanto del desarrollo interno de su ciencia, como de sus vinculaciones con el “mundo real”. Además, muchos de ellos tenían otra profesión.

Siglo XX

Klein (derecha) en la celebración de sus 50 años.

El movimiento para incorporar las aplicaciones de la matemática a la enseñanza tuvo su empuje con el matemático alemán Félix Klein (1849-1925), quien contribuyó a la creación del Instituto de Investigación Aerodinámica e Hidrodinámica donde se hacía matemática aplicada. Klein preconizó que debían desarrollarse los *medios* además de los *contenidos* y la necesidad de vincular la matemática abstracta con las aplicaciones. Su anhelo era que hubiese un equilibrio entre lo formal y las aplicaciones de la matemática a otras ciencias, entre lo abstracto y lo intuitivo.

El advenimiento de la Segunda Guerra Mundial dio un impulso a la matemática aplicada, puesto que el objetivo de vencer al nazismo y las potencias del Eje, condujo a que una parte importante de los matemáticos más eminentes en los Estados Unidos, el Reino Unido y la Unión Soviétitica, volcaran todos sus esfuerzos científicos hacia el objetivo común de ganar la guerra contra el nazi-fascismo y su aliado el Imperio del Sol.



“Para comenzar, debemos enfatizar una declaración que estoy seguro que han escuchado antes pero que debe repetirse una vez y otra vez. Es que las ciencias no intentan explicar, ellas apenas llanamente intentan interpretar, ellas principalmente hacen modelos.”

John Von Neumann
Húngaro (1903-1957)
Pionero de las computadoras.

En esa pléyade de matemáticos destaca John von Neumann quien dio una definición de modelo en los siguientes términos: “Por un modelo significamos un constructo matemático el cual, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe fenómenos observados. La justificación de un tal constructo matemático es solamente y precisamente cosa debida para trabajar -esto es, correctamente para describir fenómenos desde un área ampliamente razonable. Más aún, él debe satisfacer cierto criterio estético- que está en relación con lo que describe, él debe ser bastante simple.”

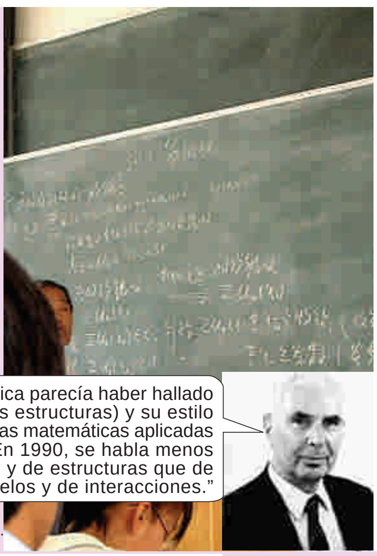
Von Neumann no fue el primero en dar una concepción de modelo matemático, pues esto ya venía de una memoria sobre el modelo eléctrico del corazón por Van der Pol (1929).

En las tres últimas décadas se ha concretado en diversos países una opinión favorable a la introducción de los modelos matemáticos como una estrategia de enseñanza-aprendizaje.

A esto ha contribuido una amplia producción de textos y artículos de revistas que a este respecto se vienen realizando, y competencias tales como “Mathematical Contest in Modelling” que se lleva a cabo en los Estados Unidos y otros países desde 1985.

En el Reino Unido, Francia, Alemania, China, Estados Unidos y otros países se viene progresivamente introduciendo la enseñanza de los modelos matemáticos en diversos niveles de sus sistemas educativos. Muchos otros países han incorporado esta estrategia. En América Latina la vanguardia en este sentido la lleva Brasil. Ya hay núcleos de docentes que investigan y utilizan los modelos matemáticos en su actividad profesional en algunas naciones latinoamericanas.

En Venezuela se ha incorporado el estudio de los modelos matemáticos, como parte integrante de la formación de los matemáticos a nivel de pregrado como, por ejemplo, en las Universidades de Carabobo, la Centroccidental Lisandro Alvarado y parcialmente, a nivel introductorio, en la Universidad Nacional Abierta. Poco a poco se va ganando espacio para lograr que esta estrategia pase a ser una parte consustancial de los estudios universitarios e, igualmente, de la Educación Media, Diversificada y Profesional.



“En 1950, la matemática parecía haber hallado su arquitectura (las estructuras) y su estilo (Bourbaki). En 1970, las matemáticas aplicadas hacen su apertura. En 1990, se habla menos de fundamentos y de estructuras que de modelos y de interacciones.”

Jean Pierre Kahane
Matemático francés (1926-).

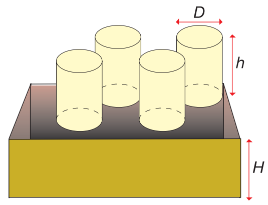
Otro modelo estático: modelo de

Un problema que a menudo se presenta en el mundo real tiene que ver con el empaquetamiento de diversos productos, como es el caso de empaquetar latas de sardina de forma cilíndrica, o bombones, pelotas u otros objetos esféricos en cajas cuya forma es la de un paralelepípedo recto rectangular.

Hay diversas preguntas que pueden formularse:

- ¿Cuál es la disposición o modo de empaquetamiento que permite colocar el mayor número posible de latas o de bombones dentro de la caja?
- Las cajas ¿están previamente fabricadas o van a ser fabricadas de acuerdo a un tipo de empaquetamiento particular?
- ¿Cómo colocamos las latas cilíndricas dentro de la caja: paradas, acostadas, una combinación de las opciones anteriores?

El dilema anterior no se presenta con los objetos esféricos, puesto que la simetría de la esfera hace que no exista la gama de opciones anteriores.



Supongamos que entre las especificaciones que se proporcionan está que la altura de las cajas es tal que sólo puede introducirse en ellas una capa de latas de sardina en posición parada, H=h, y que no es posible colocar más de una capa si están acostadas.

Una primera observación es que entonces hemos de colocarlas paradas dentro de la caja para disminuir el espacio ocioso.

Supongamos adicionalmente que alguna de las otras dos dimensiones de la caja (el largo o el ancho) es un múltiplo del diámetro D.

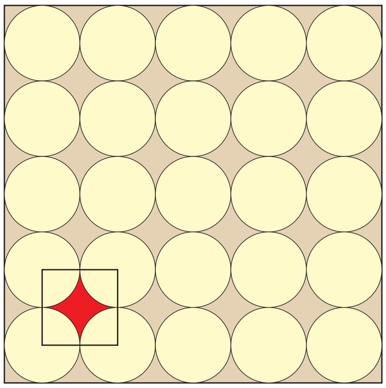
Después de esta decisión, ¿habrá aún varias maneras posibles de empaquetar las latas?

¿Cuál sería la situación si en lugar de las latas de sardina estuviésemos empaquetando bombones esféricos tales que el diámetro D de estos últimos fuese igual a la altura de la caja?

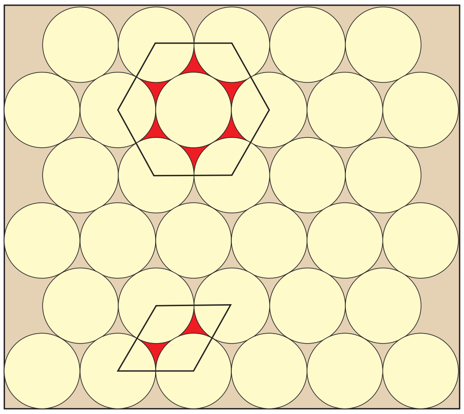
La situación original (latas de sardina o bombones esféricos) consiste en un problema tridimensional (cilindros o esferas empaquetados dentro de un paralelepípedo recto rectangular). Sin embargo, la especificación que se nos da –en cada caso- hace que podamos olvidar la altura del volumen que ocupan, y el problema de empaquetamiento en las cajas se reduce a considerar los cortes transversales de las latas (o de los bombones), los cuales son círculos. De esta manera hemos reducido un problema del **espacio** tridimensional a uno en el **plano**.

Además, como todas las latas (o bombones) a empaquetar dentro de una misma caja son del mismo tipo, entonces los círculos tienen el mismo diámetro.

El problema original lo podemos modelar pensando en cómo disponer o empaquetar de “la manera más eficiente” círculos dentro de un rectángulo.



Una manera de empaquetar las latas o los bombones conduce a que sus secciones transversales queden como se muestra en esta figura. Es lo que se llama un **empaquetamiento cuadrado**. El número máximo de círculos tangentes a uno dado es cuatro.



¿Qué ocurre si empleamos una disposición como la que se muestra en esta segunda figura?
Este es un **empaquetamiento hexagonal**. Note que hay círculos que llegan a ser tangentes a otros seis círculos.

En las figuras se muestra un ejemplo del espacio desperdiciado entre círculos (señalado en **rojo**) donde se observa que el desperdicio es mayor en la de la izquierda que en la de la derecha. Aparentemente, el empaquetamiento hexagonal es “**más eficiente**” que el cuadrado.

empaquetamiento

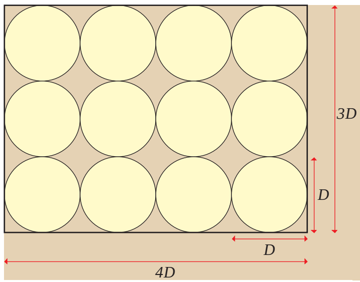
¿Cómo traducimos a términos matemáticos la expresión “**la manera más eficiente**”?

Es razonable que queramos introducir el mayor número posible de objetos en cada caja. En otras palabras, queremos reducir el espacio ocioso. Al tener la representación plana esto puede traducirse en que queremos aumentar lo más que se pueda la proporción entre el área ocupada por las secciones transversales y el área del rectángulo. Usualmente esta relación se llama **densidad** del paquete, se denota por d y se define como el cociente:

$$d = \frac{\text{área cubierta por los círculos}}{\text{área del rectángulo}}$$

¿Cómo comparar ambos empaquetamientos? Para compararlos se experimenta con el modelo calculando las respectivas densidades para varias configuraciones.

Calculémosla para el siguiente empaquetamiento:



Calculemos el numerador y el denominador de la fórmula anterior. Si llamamos r al radio de los círculos (todos ellos tienen igual radio), entonces el área de cada uno de ellos es πr^2. Por lo tanto, el “área cubierta por los círculos” es $12\pi r^2$, ya que hay 12 círculos.

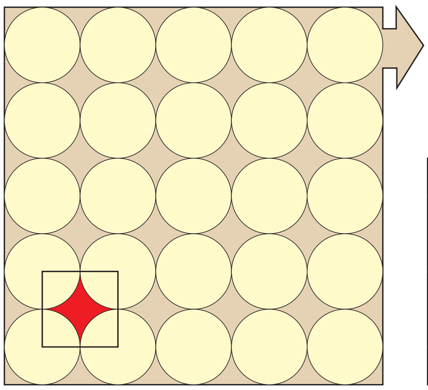
Por otra parte, el “área del rectángulo” es base por altura. La base es 4D (donde D es el diámetro) y la altura es 3D.

$$d = \frac{\text{área cubierta por los círculos}}{\text{área del rectángulo}}$$

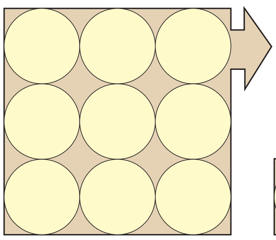
$$d = \frac{12\pi r^2}{(4D)(3D)} = \frac{12\pi r^2}{12D^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Es decir, $d \approx 0{,}7853981$. En términos porcentuales esto es 78,54%.

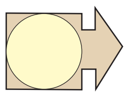
El cálculo de d para los empaquetamientos de las siguientes figuras da como resultado:



$$d = \frac{25\pi r^2}{(5D)(5D)} = \frac{25\pi r^2}{25D^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$



$$d = \frac{9\pi r^2}{(3D)(3D)} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

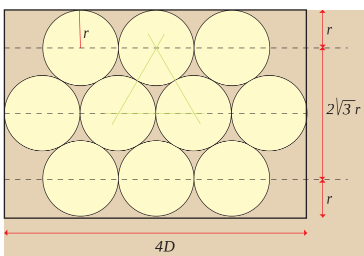


$$d = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Observamos que la fórmula siempre produce el mismo resultado; es decir, la densidad es independiente del número de círculos y del radio de éstos.

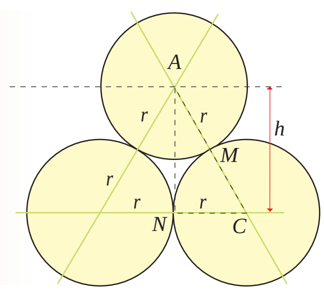
Consideremos ahora empaquetamientos hexagonales.

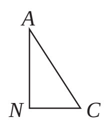
Hagamos los cálculos para el caso que se muestra en la figura: $d = \frac{\text{área cubierta por los círculos}}{\text{área del rectángulo}} = \frac{10\,\pi r^2}{\text{área del rectángulo}}$



Para calcular el área del rectángulo observamos que la base mide 4D y la altura no es 3D sino $2r + 2\sqrt{3}\,r$.

El siguiente gráfico ilustra el hecho que la distancia entre las rectas paralelas que pasan por los centros de dos hileras vecinas de círculos viene dada por: $\sqrt{3}\,r$.





$AN^2 = AC^2 - NC^2$

$h^2 = (2r)^2 - r^2$

$h^2 = 4r^2 - r^2$

$h = \sqrt{3}\,r$

$$d = \frac{\text{área cubierta por los círculos}}{\text{área del rectángulo}}$$

$$d = \frac{10\pi r^2}{(4D)(2r + 2\sqrt{3}\,r)} = \frac{10\pi r^2}{(8r)(2r + 2\sqrt{3}\,r)} = \frac{10\pi}{16\,(1+\sqrt{3})} \approx 0{,}7186892$$

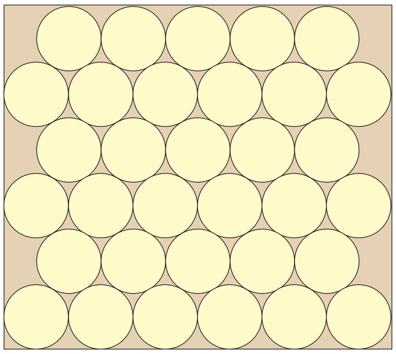
Es decir, una densidad del 71,87% aproximadamente.

Esta densidad es menor que la del empaquetamiento cuadrado, lo que significa que en éste último hay más “espacio ocioso” y, por lo tanto, es “menos eficiente”.

Otro modelo estático: modelo de empaquetamiento

Podemos preguntarnos: ¿dependerá la densidad del número de círculos que estamos considerando?

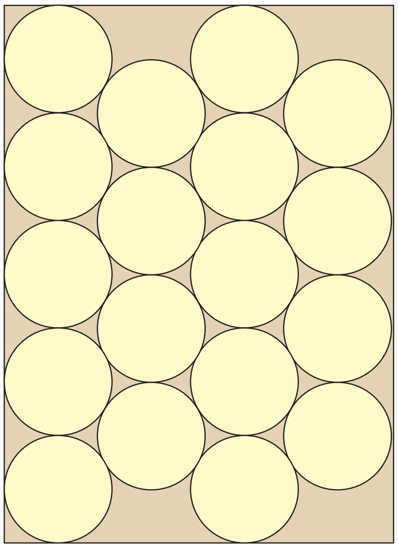
Consideremos ahora 33 círculos dispuestos como muestra la figura:



$$d=\frac{33\pi r^2}{\text{área del rectángulo}}=\frac{33\pi r^2}{(6D)(2r+5\sqrt{3}\,r)}=\frac{33\pi}{(12)(2+5\sqrt{3})}\approx 0{,}810429$$

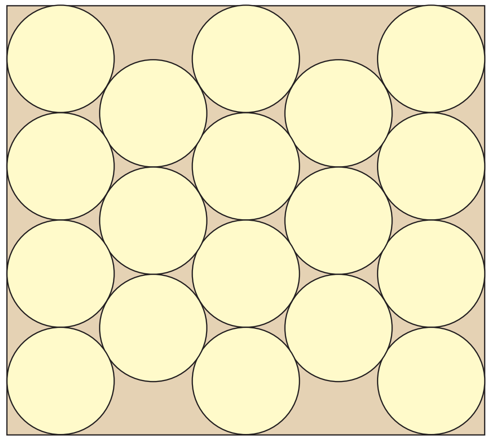
En este caso resultó más eficiente el empaquetamiento hexagonal (81,04%)

Tomemos 18 círculos como se muestra en la figura de la derecha. Aquí, nuevamente la densidad para el empaquetamiento hexagonal supera a la del cuadrado.



$d \approx$ 0,785818 (78,58%)

Esta segunda figura muestra otra configuración posible para disponer 18 círculos en empaquetamiento hexagonal.



$d \approx$ 0,791714 (79,17%)

Interesante

Aunque el resultado 78,58% es un poco mejor que el del empaquetamiento cuadrado (78,54%), es superior al del empaquetamiento hexagonal obtenido con la disposición de los 18 círculos que se muestra a la derecha (79,17%).

Esto indica que además del número de círculos considerados, también la forma de disponerlos en empaquetamiento hexagonal afecta los resultados.

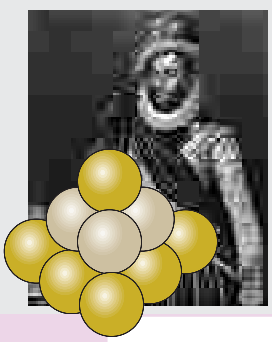
También hay que considerar en el modelo que usualmente los productos se empaquetan por decenas (10, 20,...) o por docenas (12, 24,...).

Reto

Considera 28 círculos. Calcula la densidad para distintas configuraciones con empaquetamiento hexagonal. ¿Podrías construir una configuración híbrida (que combine el empaquetamiento cuadrado con el hexagonal)? ¿Cuál es el resultado de la densidad en este caso?

Nº de círculos	Empaquetamiento cuadrado	Empaquetamiento hexagonal (1)	Empaquetamiento hexagonal (2)
12	d≈78,54%	¿?	
25	d≈78,54%	¿?	
9	d≈78,54%	¿?	
10	d≈78,54%	d≈71,87%	
18	d≈78,54%	d≈79,17%	d≈78,58%
33	d≈78,54%	d≈81,04%	

¿SABÍAS QUE...?



En la segunda mitad del siglo XVI, Sir Walter Raleigh (en la imagen) le preguntó al matemático Thomas Harriot si conocía un método rápido para calcular el número de balas de cañón que podían apilarse en la cubierta de un barco. Thomas Harriot escribió al astrónomo alemán Johannes Kepler para solicitarle su opinión. Tras analizar la cuestión, Kepler concluyó que el sistema más eficaz era el que usan los marineros para apilar las balas de cañón y los fruteros para colocar sus naranjas (como muestra la figura) y declaró que esta forma permite empaquetar más que en un contenedor.
Esta afirmación acabó por ser conocida como la conjetura de Kepler.
Thomas Hales necesitó diez años de investigación, primero en la Universidad de Michigan y luego en la de Pittsburgh, para lograr en 1998 la demostración de la conjetura de Kepler.

En estos fascículos presentamos varias situaciones para las cuales se construyeron modelos matemáticos.

Al trabajar con modelos en el aula, el docente puede plantear numerosas situaciones provenientes de contextos diversos tales como:

- Crecimiento de poblaciones
- Cálculos de áreas y volúmenes de objetos de la vida cotidiana
- El proceso de llenado de un recipiente con un líquido o con áridos
- El empaquetamiento de diversos productos comerciales o cuando alguien quiere transportar objetos
- La conformación de mezclas con diversas sustancias
- Búsqueda de rutas mínimas
- Planificación de tareas

Para la construcción de un modelo con fines didácticos hay que tomar en consideración tanto aspectos técnicos de la construcción de modelos como aspectos netamente didácticos.

Construcción de modelos

Usualmente en estas situaciones se tienen ciertos datos o información; pero, a veces hay información y/o datos que se requieren para la construcción de un modelo, los cuales no están dados. Sin embargo ellos son necesarios para construir un modelo de la situación. Por lo tanto, según sea el caso, se deben establecer supuestos o hipótesis que aporten nueva información o mediciones que permitan obtenerlos.

Para la construcción de un modelo es importante definir adecuadamente las variables que aparecen en la situación, usar una buena notación y establecer premisas.

Las dimensiones en que se expresan las diversas magnitudes intervinientes en un modelo pueden dar pistas para establecer relaciones entre las variables.

En muchas circunstancias las representaciones gráficas son de gran ayuda para la construcción de un modelo.

Usualmente se requiere realizar cambios de representación y uso de diferentes lenguajes.

En la construcción de modelos las herramientas informáticas (calculadoras, computadoras, etc.) son de gran utilidad, tanto en la elaboración del modelo como para hacer cálculos y realizar simulaciones.

El trabajo con modelos obliga a evaluar el modelo construido y a realizar refinamientos progresivos (cambiando algunos de los supuestos iniciales o agregando supuestos nuevos, mejorando las medidas, etc.).

Aspectos didácticos

El docente debe realizar una escogencia de una situación interesante y adecuada para ser modelada.

El trabajo con modelos es bastante diferente a lo que tradicionalmente se hace en el aula. Ello obliga al docente a que se vea en la necesidad de que sea el primero en construir modelos de la situación escogida, antes de trabajar con sus alumnos.

El trabajo con modelos involucra diferentes procesos: medición, síntesis, análisis, …

Es factible combinar el trabajo individual del alumno con el trabajo en pequeños grupos.

Es deseable que el debate sea un elemento importante durante el proceso de modelación.

La construcción de un modelo puede involucrar diversas tareas de tipo experimental y se requiere hacer exploraciones. Sin embargo, hay casos en los cuales el modelo es deductivo.

El alumno debe elaborar un informe final, el cual recoja tanto el modelo construido como el proceso seguido en su construcción.

Los modelos a diferencia de lo que usualmente se hace en clase no producen una respuesta única.

Modelos en Venezuela


Lago de Maracaibo.
Estado Zulia.

A continuación presentamos dos modelos realizados en el Instituto de Mecánica de Fluídos de la Universidad Central de Venezuela (IMF-UCV).

Modelo de circulación general y dinámica sedimentaria del estuario de Maracaibo (2004)

Realizado por Reinaldo García M. y Ruth Espinoza N.

El objetivo principal es el estudio de patrones de circulación de corrientes y la dinámica de sedimentos y de salinidad actuales del sistema del Lago de Maracaibo. Adicionalmente, se propone estudiar diversas alternativas de zonas de bote de material dragado y el impacto que produciría sobre el Lago la construcción de ciertas obras civiles como: Puertos, realineación y profundización de canales de navegación, espigones, etc.

En el Lago de Maracaibo existen problemas de salinización y de deposición de sedimentos, especialmente en las zonas dragadas para facilitar la navegación. Para estudiar la hidráulica de estos canales se requiere conocer la dinámica del transporte de salinidad y de sedimentos suspendidos y de fondo, así como los patrones de corriente y niveles de mareas existentes en las zonas. Para realizar esta simulación se utilizan técnicas de cálculo mediante el método de elementos finitos que conducen a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.


Presa de Aswan, Egipto.

Variación del ancho de cauces al variar su caudal medio anual (2004)

Realizado por Edgar Marrero, José Luis López y Marco Falcón.

El procedimiento para calcular el cambio de ancho de un río consiste en calcular primero las condiciones de velocidad y profundidad anteriores al trasvase, lo que permite determinar el denominado esfuerzo cortante sobre las márgenes, su valor crítico (el que puede resistir esas márgenes). Luego se recalculan las nuevas condiciones de flujo y la nueva pendiente del cauce bajo ciertas condiciones.

Esta técnica de cálculo, realizada en Venezuela, se aplicó al brazo Rosetta del Delta del río Nilo (Egipto) antes y después del cierre de la presa de Aswan, pudiendo predecir la reducción del ancho de 575 m a la mitad y con un error del 7%. Las herramientas utilizadas en este caso son técnicas de cálculo mediante iteraciones.

BIBLIOGRAFÍA

Biembengut Salett, María y Hein, Nelson. (2003). *Modelagem matemática no ensino*. Editora ContextO, São Paulo, Brasil.

Devlin, Keith (2001). *The Language of Mathematics. Making the invisible visible*. W.H. Freeman and Company, New York.

Edwards, Dilwyn & Hamson, Mike (1990). *Guide to mathematic modelling*. CRC Press, Boca Ratón, Florida, EE.UU.

Mora, Castor David. (2001). *Aprendizaje y enseñanza de la matemática enfocada en las aplicaciones*. Enseñanza de la Matemática, 10(1), 3-22.

Orellana Ch., Mauricio (1998) Matemática I y II (177 y 179 Módulo IV). *Pensamiento Matemático y Modelando con Matemática*, Universidad Nacional Abierta, Caracas.

Ríos, Sixto. (1995). Modelización. Madrid: Alianza Editorial.

Steen, L. A. Editor (2003) 89a. *Enseñanza agradable de las matemáticas*, Limusa, México.

U.S. Bureau of the Census, International Data Base. http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html