COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS II

FASCÍCULO 1. FUNCIÓN LINEAL Y ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Autores: Alejandro Rosas Snell
Juan Zúñiga Contreras

COLEGIO DE
BACHILLERES

Colaboradores:
Mario Arturo Badillo Arenas
Juan Pérez Rodríguez
Eloísa Poot Grajales

Asesoría Pedagógica:
Dora María Mireles Alvarado

Revisión de Contenido
Miguel Ángel Marrufo Chan

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortiz

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

Una función es una representación algebraica de un fenómeno social o natural; ésta nos permite predecir el comportamiento de dicho fenómeno si alteramos alguna de sus condiciones. Así, la función lineal se convierte en un concepto básico no sólo para las Matemáticas sino para la investigación en general.

A través de la función lineal se pueden analizar fenómenos como: la relación entre el costo unitario de un producto y la cantidad que se puede comprar con "x" cantidad de dinero; la distancia que recorre la luz en determinado tiempo; el crecimiento de una población de moscas de la fruta, en condiciones óptimas, en un tiempo dado; los intereses que se pagarán por un préstamo a plazos; etc.

La función lineal es un elemento importante en muchas investigaciones, dado que nos permite mantener una actitud científica frente al fenómeno que estudiamos, y nos posibilita elaborar interpretaciones objetivas del mismo.

Ahora bien, para que agilices la comprensión de este tema, te sugerimos verificar tus conocimientos respecto a:

- Lenguaje algebraico.
- Operaciones con números reales.
- La gráfica en el plano cartesiano de un sistema de ecuaciones.

Estos conocimientos te permitirán interpretar la función lineal como un modelo algebraico; entender la relación entre la función lineal y la ecuación de primer grado con dos incógnitas; e interpretar la gráfica de una función lineal.

P R O P Ó S I T O

En la asignatura de Matemáticas I estudiaste las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, la importancia de éstas, así como su utilidad; ahora con el estudio de este fascículo:

¿QUÉ APRENDERÁS?

La relación entre la ecuación de primer grado con dos incógnitas y la función lineal como modelo algebraico.

La gráfica de una función lineal y su importancia.

La aplicación de las funciones lineales a problemas concretos.

¿CÓMO LO LOGRARÁS?

A través del análisis de problemas y ejemplos que se plantean a lo largo del contenido.

Aplicando cada una de las partes que componen una función lineal.

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Para analizar fenómenos que estudiarás en las asignaturas de Física, Química, Biología y Ecología, entre otras. Además, esto te ayudará a comprender y aplicar el concepto de función polinomial cuadrática.

CAPÍTULO 1. FUNCIÓN LINEAL

Como mencionamos en la introducción, la función lineal es de gran utilidad para interpretar fenómenos tanto sociales como naturales, por ejemplo:

¿Sabías que la frecuencia con la que cantan los grillos es una función lineal que depende de la temperatura?. La tabla 1 muestra el número de chirridos por minuto que emite el grillo a una temperatura determinada.

Tabla 1

Temperatura (° F)	40	41	42	43	44
Chirridos por minuto	0	4	8	12	16

¿Puedes determinar la expresión algebraica que relaciona el número de chirridos por minuto (y), con la temperatura (x)?.

Probablemente, en este momento no puedas determinar dicha relación, pero una vez que concluyas el estudio de este fascículo, lo lograrás.

Así, aprenderás a establecer la función lineal de un fenómeno dado y a representarlo gráficamente para poder predecir su comportamiento si se modifican las condiciones de dicho fenómeno.

1.1 RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN LINEAL Y LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

En este tema analizarás:

FUNCIÓN LINEAL

- Sus componentes
  - "a" Constante o coeficiente de proporcionalidad.
  - "b" Parámetro.
  - "x" ; "y" Variables.
- Su notación
  - $f: x \rightarrow y$
  - $f(x) = ax$ ó $f(x) = ax+b$
  - $y= f(x)$
- Su relación con
  - Ecuación de primer grado con dos incógnitas: $Ax+ By = C$

Lo anterior se logra a partir del planteamiento y resolución de problemas que dan lugar a una función lineal.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Los siguientes problemas establecen una función lineal, observa el procedimiento y contesta las preguntas:

PROBLEMA (Costo-Cantidad)

a) Una lata de leche en polvo tiene un precio unitario de $35.00, elaboremos una tabla de valores donde x represente el número de latas, "y" el costo total correspondiente; complétala y busca la fórmula algebraica que relacione el costo total en función del número de latas.

Tabla 2

Núm. de latas (x)	1	2		4	5	13
Precio unitario (y)	**35**		**105**	**140**		

Si observas, el precio de una lata es de \$35.00, ¿cuántas latas se podrán comprar con \$105.00?¡Exacto!... 3. Ahora la pregunta es la siguiente: ¿Cuánto se pagará por 2, 5 y 13 latas?. Completa los valores que faltan.

Bien, ahora para cada pareja (*x,y)* efectúa el cociente *y/x* ¿qué observas?.

Cociente o razón:

$$\frac{35}{1} = 35$$

$$\frac{70}{2} = 35$$

$$\frac{105}{} = 35$$

$$\frac{}{15} = 35$$

¡Correcto!, la razón de cambio entre "*y"* y "*x*" es 35; es decir: *y/x*= constante

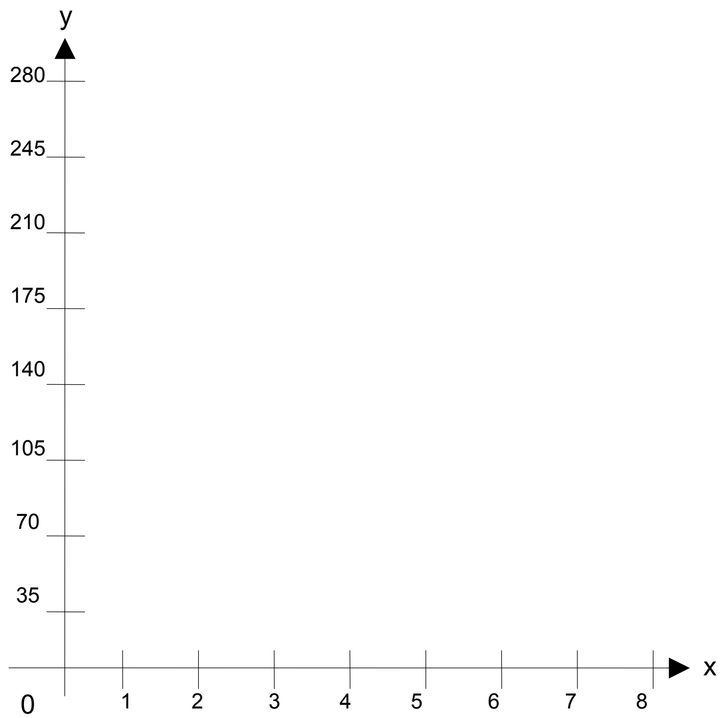
$$\frac{y}{x} = a$$

¿Recuerdas cómo despejar la *variable "y"* de la ecuación anterior?... En efecto, *y*= *ax*. Para este problema la ecuación sería: *y*=35x, ¿por qué?.

Esta fórmula o ecuación representa la regla de correspondencia entre el precio unitario de las latas y el costo de comprar cierto número de ellas.

Una vez que tenemos la fórmula, podemos calcular el costo para cualquier número de latas. ¿Cuánto costarán 47, 173 ó 1 287 latas?.

Recordando cómo se construye una gráfica en el plano cartesiano. Gráfica la tabla 2.



Gráfica 1

PROBLEMA (distancia- tiempo)

b) El atleta estrella del Colegio de Bachilleres corre diariamente a una velocidad promedio de 6km/h. Si el primer día corre durante 30 minutos y va aumentando 3 minutos en los días siguientes hasta llegar a 45 minutos, ¿qué distancia recorrió cada día?.

Para resolver este ejemplo construiremos una tabla de valores, pero antes debemos calcular ¿cuál es la razón de cambio entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido para hallar la fórmula correspondiente?, ¿podrás hacerlo?...

tiempo (min)	Distancia (km)
x ____________________	y
30 ____________________	3 km
33 ____________________	
36 ____________________	
39 ____________________	
42 ____________________	
45 ____________________	

Tabla 3

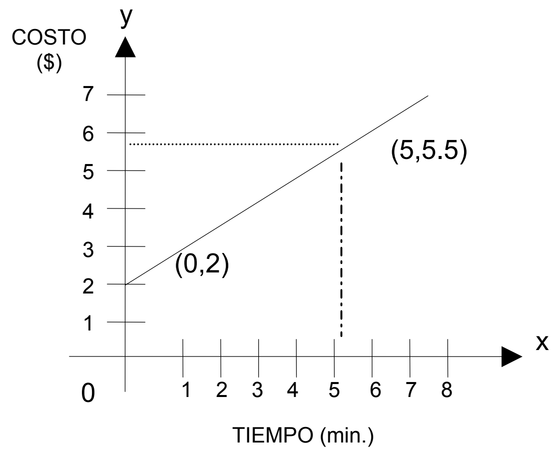
Del ejemplo anterior recuerda que la razón de cambio es constante, es decir, y/x=a. Observa que a=0.1, ¿por qué?. Asimismo cabe mencionar que conociendo la distancia que recorre en 30 minutos, podemos calcular los demás valores. Encontrar la fórmula no te será muy difícil...

Calcula la distancia que recorrerá a los 25 ó 55 minutos; para ello apóyate en una gráfica en el plano cartesiano

c) PROBLEMA (costo-tiempo)

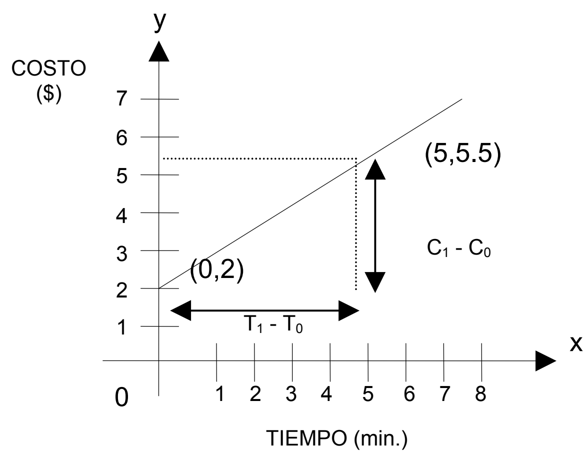
Cuando abordamos un taxi en la Ciudad de México, observamos que el taxímetro marca una cantidad inicial, digamos $2.00, y después de cierto tiempo de recorrido cambia a $2.50, $3.00, $3.50, etc. Si después de 5 minutos la cantidad que marca es de $5.50, ¿cuánto esperaríamos que marcara a los 7, 8 y 11 minutos?.

La solución de este problema la iniciamos con la gráfica 2 en el plano cartesiano, que en el eje horizontal nos muestre la variación del tiempo y en el eje vertical la del costo.



Gráfica 2

Como podemos observar, en cero minutos ya existe un costo inicial, y a partir de éste la variación es constante hasta llegar a un momento final de 5 minutos; el costo para este tiempo es de $ 5.50. Con los trazos auxiliares construimos un triángulo rectángulo, ¿cuál es la longitud del lado vertical?.. ¡Exacto!... $3.50, es decir, la diferencia entre el costo final (C_1) y el costo inicial (Co). Ahora, ¿cuál es la longitud del lado horizontal?. Efectivamente, es 5.



Co= Costo inicial
C_1= Costo final
To= Tiempo inicial
T_1= Tiempo final

Gráfica 3

Bien. ahora ...¿cómo calculas la razón de cambio?.

¡Correcto!, calculando el cociente de (C_1-Co)/(T_1-To), que es lo que hiciste en los ejemplos anteriores, como y/x; con esto, y/x=0.7 y despejando nos queda y=.70x, con lo que calculamos la variación del costo en función del tiempo. No olvides que ya existe un costo inicial de $2.00 que debemos sumar; por lo tanto, ¿cuál es la expresión completa de la función?.

¡Correcto!, la expresión sería

$y=0.7x + 2$

Con la fórmula establecida, calcula el costo para 7, 8 y 11 minutos.

d) PROBLEMA (perímetro-diámetro)

El perímetro de un círculo varía proporcionalmente con la longitud de su diámetro (cm), como se muestra en la tabla siguiente. ¿Puedes completarla?.

Tabla 4

Diámetro (x)	**0**	**2**	**3**			**15**	
Perímetro (y)	**0**	**6.28**		**15.7**	**47.1**		**84.78**

Para tabular este ejemplo elabora una gráfica en el plano cartesiano y encuentra la expresión de la función correspondiente.

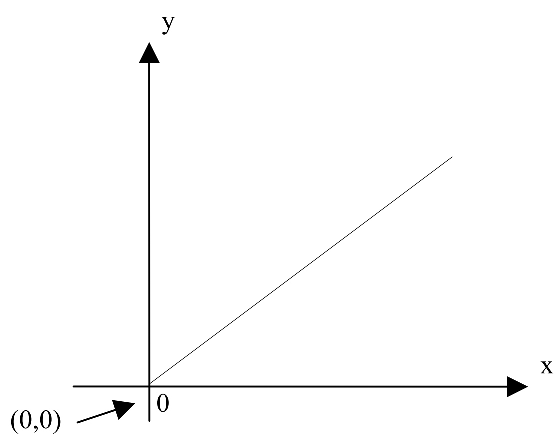
Los ejemplos anteriores nos muestran que dos magnitudes varían en forma proporcional cuando existe una razón de cambio constante entre las variables, es decir:

$$\frac{y}{x} = \text{constante} \qquad \text{o} \quad y= ax \qquad \text{o} \qquad \frac{y}{x} = a$$

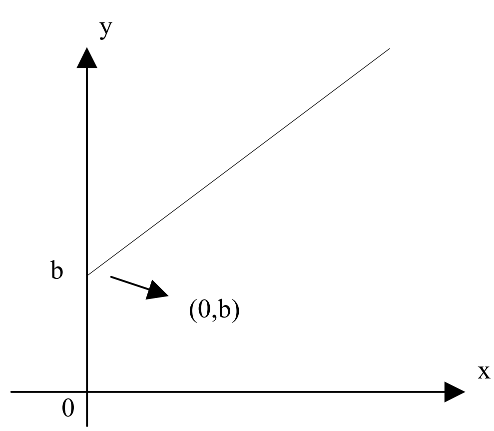
Con el objeto de manejar la terminología correspondiente llamaremos a *x* variable independiente, a *y* variable dependiente y *a* será la constante de proporcionalidad. Ahora que conoces las características de éstas, la literal y las variables, ¿puedes explicar por qué se les asignó ese nombre?.

Observemos también que la relación entre dos variables la podemos registrar por medio de una tabla de valores, donde a cada valor de (x) le corresponde uno de (y) lo que da como resultado que se establezca (n) parejas de números (x,y) donde ambos son números reales ($\mathbb{R}$).

Por otra parte, al hacer un bosquejo de la gráfica en el plano cartesiano se puede observar que si la ecuación o expresión incluye un valor inicial, la recta intersecta al eje y en un punto distinto del origen, es decir, tenemos dos casos: uno cuando la recta pasa por el origen y otro cuando no lo hace, situación que explicaremos mediante gráficas:



Gráfica 4. Recta que pasa por el origen.



Gráfica 5. Recta que no pasa por el origen.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con la finalidad de que verifiques y apliques los conocimientos que has adquirido te presentamos las siguientes actividades.

I. Encuentra la relación entre las variables de los siguientes problemas y exprésalos algebraicamente mediante una función lineal, construye en tu cuaderno un bosquejo de la gráfica que la represente.

1. El perímetro de un cuadrado, p(m) es cuatro veces la longitud de su lado, (4m).
2. El promedio de goleo de Hugo Sánchez es de 0.45 por partido. ¿Cuántos goles podría anotar si jugara 6, 7, 9 u 11 partidos?. Interpreta tus resultados.
3. El peso (kg) de cualquier líquido varía en forma proporcional a su volumen (m^3).
.
4. El ingreso anual ($) de una inversión varía con la tasa de interés (%).
5. La presión del agua en lb/ft^2 en el mar varía proporcionalmente con la profundidad en pies (ft).
6. La fuerza (N) necesaria para mover un objeto sobre un plano varía proporcionalmente con el peso (Kg) del mismo.
7. El número de centímetros (cm) es 100 veces el número de metros (m).
8. El número de pesos mexicanos ($) cambia en términos del número de dólares(US$).
9. En un ecosistema, el número de depredadores es proporcional al número de presas.
10. El costo total en pesos ($) para producir calcomanías es el monto del alquiler del local ($) más 1.5 veces el número de calcomanías producidas por día.

II. Completa cada una de las siguientes tabulaciones y encuentra la constante de proporcionalidad, así como la ecuación expresión de la función adecuada.

11.

s	**6**	**8**	**10**		**18**	**20**	
t		**4**		**7**			**15**

12.

x	**3**		**4**	**5.2**		**8.5**	
y	**6**	**7**	**8**		**14.8**		**22.8**

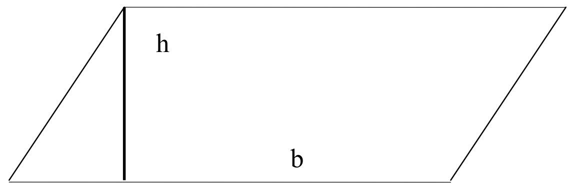
13.

Litros (lts)	Costo ($)
2	**1.75**
	2.55
4	
5	
10	**8.75**
	17.85
27	

14. Para un paralelogramo se tiene los siguientes datos:

h= altura

b= base



Altura (cm)	4	5	7	10		20
Área (cm^2)	28		49	70	105	

15. Se tienen cuatro secuencias proporcionales n, m, u y t, completa la siguiente tabla:

n	**1 500**	**840**	**1 200**	
m	**75**	**42**		**250**
u	**3 000**		**2 400**	**10 000**
t		**3.36**	**4.8**	**20**

III. He aquí una tabla de números proporcionales; en ella hay dos errores dentro de la segunda línea**;** desarrolla lo siguiente:

16. Identifica los errores y corrígelos.

17. ¿Cuál es el coeficiente o constante de proporcionalidad?.

18. ¿Cuál es la expresión de correspondencia?

x	**73.3**	**4.15**	**21.3**	**61.7**
y	**302.316**	**17.18**	**87.969**	**254.204**

IV. Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas, justificando tus respuestas.

19. Las secuencias $(2^2, 2^3, 2^4 \ldots) y (3^2, 3^3, 3^4 \ldots)$, ¿son proporcionales?. ¿Por qué?.

20. Tres personas piden prestado \$250.00, \$400.00 y \$700.00 respectivamente. Cada una devolverá, en ese mismo orden, \$300.00, \$480.00 \$840.00. ¿Las devoluciones son proporcionales a sus préstamos?. ¿Por qué?.

Ya que has ejercitado los conceptos anteriores, podemos hacer una pausa para hablar acerca de la notación matemática que utilizaremos para denotar la relación de proporcionalidad entre dos cantidades. Se puede decir que la secuencia de números reales $(X_1, X_2, X_3 \ldots)$ es proporcional a la secuencia de números reales $(Y_1, Y_2, Y_3 \ldots)$, todos ellos diferentes de cero, si existe una función f que relacione en una tabla de valores a cada valor de x con su respectivo valor de y. Nótese que este último es el valor de la función y que se puede expresar de tres maneras diferentes:

1. Tabla de proporcionalidad

$$
\begin{array}{lcl}
f : x & \text{———} & y \\
X_1 & \text{———} & Y_1 \\
X_2 & \text{———} & Y_2 \\
X_3 & \text{———} & Y_3 \\
. & & \\
. & & \\
. & &
\end{array}
$$

2. Tabla de valores con coeficiente de proporcionalidad, donde existe un número real tal que: **y= f(x)**

X	**f(x) = ax**
X_1	$Y_1 = ax_1$
$X2$	$Y2 = ax2$
X_3	$Y_3 = ax_3$ . . . . . . **etc.**

3. Una serie de proporciones: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \ldots \text{etc}$

Analiza estas tres formas de expresar una función y trata de definir qué es una función; observa los dos primeros casos: éstos nos interesan pues nos *acercan más al concepto de una función como una regla de correspondencia entre un conjunto de valores reales* (variable independiente) *con otro conjunto de valores reales también (*variable dependiente). De tus conocimientos de Álgebra básica recordarás que al primer conjunto de éstos se le conoce como *dominio* de la función y al segundo se le llama *rango o recorrido* de la función.

$D = \{x \,/\, x \in IR\}$ $\qquad\qquad$ $R = \{f(x) \,/\, f(x) \in IR\}$

Esto nos conduce a la siguiente notación funcional:

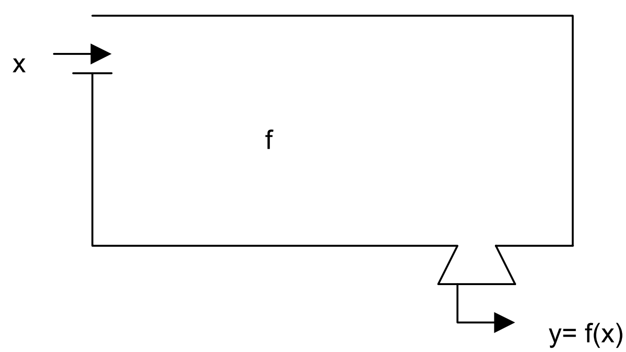
$f: A \longrightarrow R$ (esto se lee: función f de A en R), donde A es el dominio y R es el rango;

o bien:

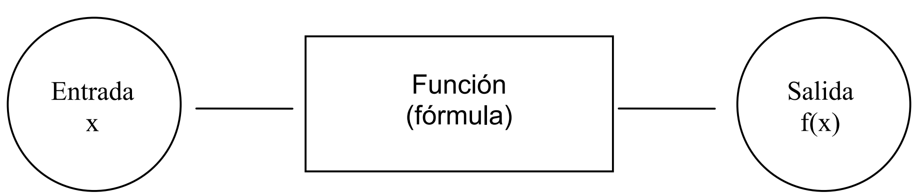
$f: x \longrightarrow y$ (esto se lee: *y* función *f* de *x),* donde *y* recibe el nombre de imagen de *x* bajo la regla *f*.

Comúnmente esta última forma se puede escribir haciendo *y= f(x)* que se lee: *"y"* igual a *f* de *x*; y se representa en los siguientes esquemas:

a)



b)



Finalmente diremos que en una ecuación de primer grado con dos incógnitas que tiene la forma: $Ax + By + C = 0$

Se puede transformar en una expresión de la regla de correspondencia de una función, si despejamos la incógnita "y", esto es:

$$Ax + By = -C$$

$$By = -C - Ax$$

$$y = \frac{-C - Ax}{B}$$

Separando los términos, tenemos:

$$y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}x,$$

Que comparándola con la expresión de la función que tiene la forma:

$$y = ax + b$$

Podemos observar que:

$$b = -\frac{C}{B} \qquad y \qquad a = -\frac{A}{B};$$

Es decir, la incógnita "y" se transforma en una variable que depende del valor de x. De esta forma, la x se transforma también en una variable independiente, lo que nos conduce a reconocer que la expresión de la función lineal puede verse desde dos enfoques:

a) Como la expresión de la regla de correspondencia f de la función.

b) Como la imagen de x (variable independiente) bajo la regla de la función f.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí, podemos establecer algunas conclusiones:

- La función lineal, es un modelo algebraico que expresa la relación variable independiente y la dependiente de un problema.

- Entre la variable independiente (x) y la dependiente (y), se establece una regla de correspondencia, donde a cada valor de "x" le corresponde un único valor de "y".

- Una función lineal se puede expresar como f: x $\longrightarrow$ y; y = f(x).

- Al despejar "y" de la ecuación de primer grado con dos incógnitas Ax+ By + C = 0 se obtiene la expresión de la función lineal: y $= \frac{-Ax}{B} - \frac{C}{B}$. Convirtiendo $\frac{-C}{B} = b$ y $\frac{\text{-A}}{\text{B}} = a$ Sustituyendo se obtiene y=ax+b

1.2 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Ahora pondremos especial atención en la representación geométrica de la función lineal. Ya en el curso de Matemáticas I graficaste algunas ecuaciones de primer grado cuando resolviste sistemas de ecuaciones simultáneas a través del método gráfico, en seguida trataremos de relacionar esa experiencia con el concepto de función.

Los ejemplos analizados en páginas anteriores muestran que existen dos aspectos importantes de la función lineal; el primero de ellos es la expresión algebraica que la define y el segundo, la tabla de valores donde se registran los valores de las variables independiente (x) y dependiente (y). Esto nos conduce al análisis de un tercer aspecto: la gráfica de la función.

Para referirnos a la gráfica, es necesario recordar que cada valor del dominio le corresponde un sólo valor del rango; por lo tanto, cada pareja de la tabulación la podemos representar geométricamente como un punto (x,y) en el plano cartesiano. El ejemplo siguiente muestra lo que hemos dicho en este párrafo.

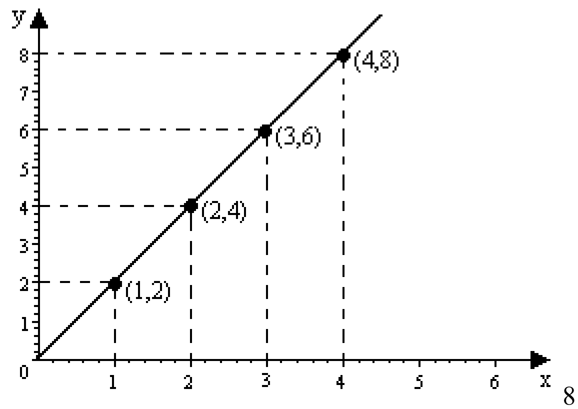
EJEMPLO:

Sea la tabla de valores de una función f: x ____y

con $D = \{x / o \leq x \leq 4\}$, $R = \{f(x) / o \leq y \leq 8\}$

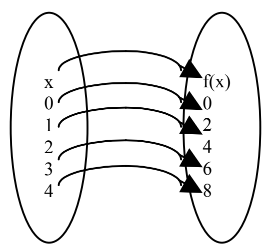
x	y
0	**0**
1	**2**
2	**4**
3	**6**
4	**8**

Procedemos a graficar cada pareja en el plano cartesiano y observaremos algunas características importantes.



Gráfica 6

Ahora es necesario encontrar la regla de correspondencia f que liga cada valor de x con su pareja y. Estamos seguros que podrás hacerlo. Para ello completa el diagrama que se ofrece a continuación.



Diagrama

Una vez que has encontrado la regla de correspondencia f:x → y; y = 2x, ¿cómo hemos podido llegar a ella?. Regresemos al análisis de la gráfica.

Como puedes observar, los puntos que componen la gráfica se encuentran sobre una línea recta; esto es muy importante puesto que si quisiéramos encontrar otros puntos, sólo bastaría utilizar la expresión de la función:

$$\boxed{y = 2x}$$

aplicándole otros valores de x. Por ejemplo:

Si x = 7, entonces y =2 (7) = 14, lo que da como resultado la pareja (7, 14).
Si x = -2, entonces y = 2(-2) = -4 que da la pareja (-2, -4). Compruébalo.

Lo que has visto hasta este momento es relevante y lo podemos resumir de la siguiente forma:

Una función de la forma *y =ax* es geométricamente una línea recta que pasa por el origen del plano.

En el siguiente ejemplo tabularemos una función que no pasa por el origen.

Ejemplo:

Sea la función y = 3x-2, con D= $\{ X / -3 \leq X \leq 3 \}$ completa la tabulación de ésta y enseguida compara su gráfica con los elementos numéricos de la función.

Tabulación

x	**y = 3x-2**	**p(x,y)**
-3	**y = 3 (-3) -2 =-11**	**(-3, -11)**
-2	**y = 3 (-2) -2 = -8**	**(-2, -8)**
-1		
0		
1		
2		
3		

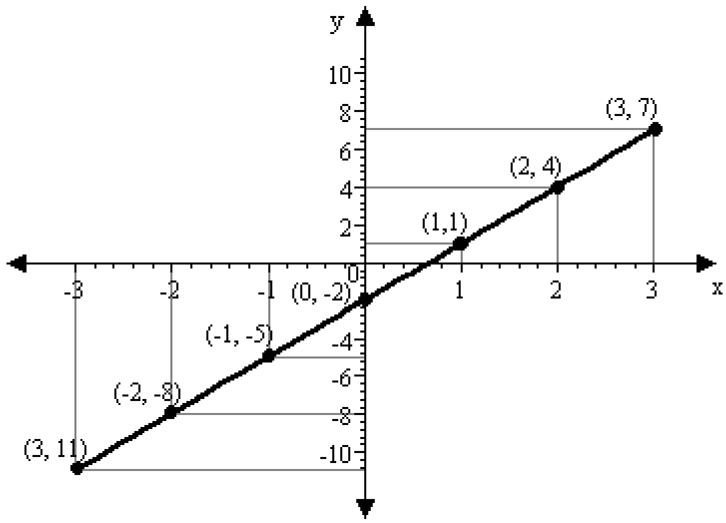
Parejas

(x, y)
(-3, -11)
(-2, -8)

Una vez completada la tabla, el rango de la función es de $R = \{f(x) / -11 \leq y \leq 7\}$

Ahora la gráfica de la función

y = 3x-2 es



Gráfica 7

Analicemos brevemente la gráfica de este ejemplo. Lo primero que destaca es que la recta no pasa por el origen, sino que lo hace por el punto (0.-2) ubicado sobre el eje vertical, ¿podrías explicar por qué?.

Si no pudiste explicarlo, no te preocupes, pues al final de este tema podrás hacerlo. Una vez presentada la función en la gráfica, su regla de correspondencia f por medio de un diagrama nos queda de la siguiente forma. Ahora te pedimos modificar la expresión de la función de la siguiente manera:

EJEMPLO:

sea y = 3x + 2 con $D = \{x \,/\, -3 \le x \le 3\}$

Observa que en lugar de restar 2 a 3x, ahora lo sumamos. Completa la tabulación:

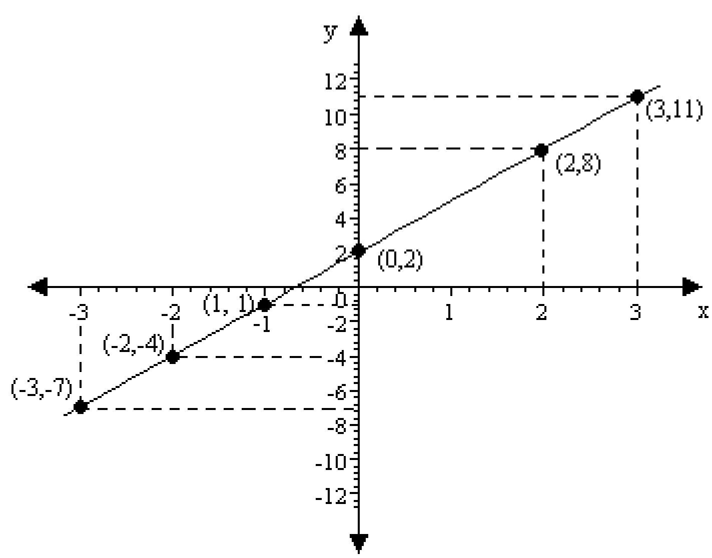
Tabulación

x	y = 3x+ 2	P(x,y)
-3	y = 3 (-3) + 2 =-7	(-3,-7)
-2	y = 3 (-2) + 2 = -4	(-2,-4)
-1		
0		
1		
2		
3		

Parejas

(x, y)
(-3, -7)
(-2, -4)

Una vez completada la tabulación el rango de la función es $R = \{f(x) / -7 \leq y \leq 11\}$



Gráfica 8

Observa la diferencia entre las gráficas de las funciones Y=3X+2 (gráfica 8),Y=3X-2 (gráfica 7).

Probablemente concluyas que la gráfica sólo se movió hacia arriba del origen, ¿pero a qué se debió esto?. Quizá sea necesario hacer otra prueba para estar seguros de que el subir o bajar la gráfica depende de cambiar el número que no se multiplica a "X" en la expresión. Probemos con otra función,

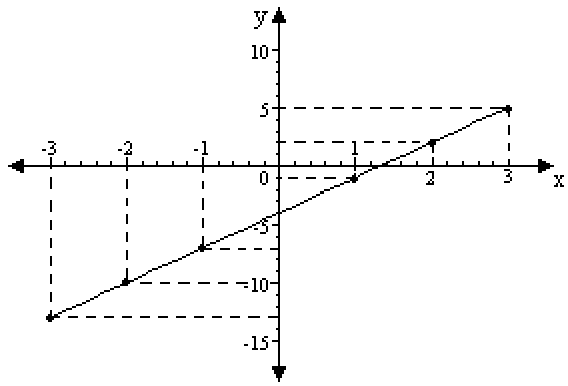
EJEMPLO:

Y = 3X - 4 con $D = \{x / -3 \le x \le 3\}$

Tabulación

X	Y = 3X - 4	P(X,Y)
-3	y = 3 (-3) -4 = -13	(-3, -13)
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Parejas
(x, y)
(-3, -13)



Gráfica 9

Comparemos las tres gráficas y expliquemos nuestras observaciones.

Las tres gráficas anteriores han resultado de evaluar las funciones:

y = 3x-2; y = 3x + 2; y = 3x -4 y tal parece que forman una feliz familia de funciones, ¿no te parece?.

Algebraicamente, las tres tienen la forma genérica:

$$y = ax + b,$$

donde *a* y *b* son conocidos como: Constante y parámetro respectivamente. (Los parámetros son cantidades que tomando un valor real particular, permanecen constantes). Lo que podemos afirmar sobre las gráficas es que la constante *a* no cambia en los tres casos, es decir: *a* = 3; mientras que el parámetro *b* tomó los valores:

b = -2 (caso y =3x-2)

b =+2 (caso y =3x+2)

b = -4 (caso y = 3x-4)

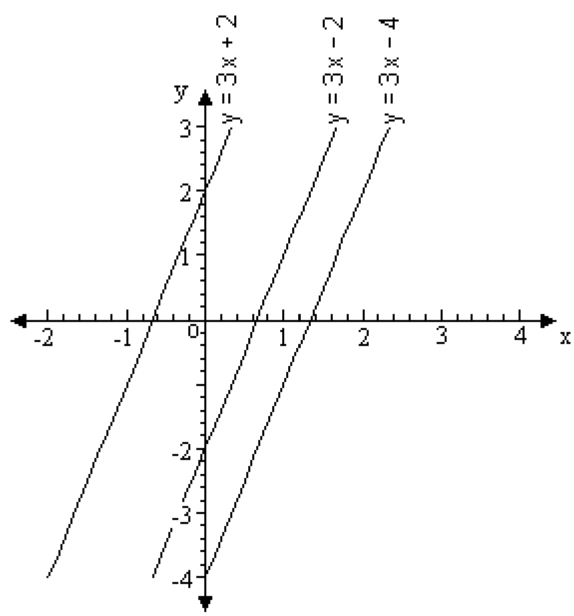
Siguiendo con nuestro análisis, modifiquemos las funciones anteriores aplicando en cada caso x=0.

EJEMPLO:

				Parejas
y = 3x -2	→	y = 3 (0)-2 = -2	→	(0,-2)
y = 3x +2	→	y = 3 (0) +2 =2	→	(0, 2)
y = 3x -4	→	y = 3 (0)-4 = -4	→	(0, -4)

1. Los parámetros son cantidades que, tomando un valor real particular, permanecen constantes.

Las tres parejas que resultan son los puntos de cruce de la recta con el eje vertical; compruébalo en la gráfica. Esto ya lo hicimos al construir la tabulación de cada una de las funciones, verifícalo en éstas. Para ver con más claridad lo que hemos hecho, grafiquemos las funciones sobre un mismo plano cartesiano.



Gráfica 10

Lo que observaste al construir las gráficas anteriores lo podemos resumir de la siguiente manera, como otra conclusión importante:

Toda función lineal de la forma *y = ax + b* es una recta sobre el plano cartesiano y el punto de intersección de ésta con el eje vertical depende del valor que tome el parámetro *b.*

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con la finalidad de que practiques la construcción de la gráfica de la función lineal y analices sus características, realiza las siguientes actividades.

I. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones. Recuerda que debes partir de la tabulación correspondiente a cada función. Observa la familia que forman al variar el parámetro “b”.

1. $y = 2x + b$ para $b = 0$; $b = -2$; $b = 4$

2. $y = -3x + b$ para $b = 0$; $b = -7$; $b = 3$

3. $y = -x + b$ para $b = -1$; $b = -2$; $b = 4$

4. $y = 0.5x + b$ para $b = 3$; $b = -4$; $b = 1/3$

II. A partir de las gráficas que elaboraste, contesta lo siguiente:

5. Si el parámetro *b* es positivo, ¿en qué parte del eje de las ordenadas (y) cruza la recta?.

6. ¿Qué sucede si el parámetro b es negativo?.

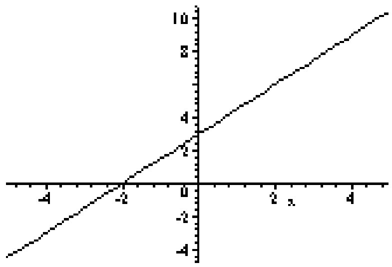
7. ¿Qué pasa si $b = 0$?.

8. Si la constante “a” es positiva ¿hacia dónde se inclina la recta?.

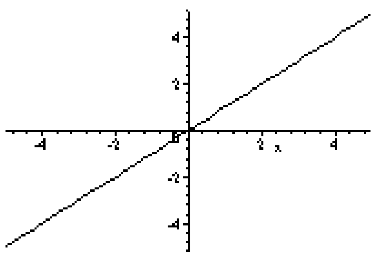
9. Si la constante “a” es negativa ¿hacia dónde se inclina la recta?.

III. Identifica la función lineal correspondiente a cada una de las gráficas siguientes y escribe en el paréntesis el inciso correcto.

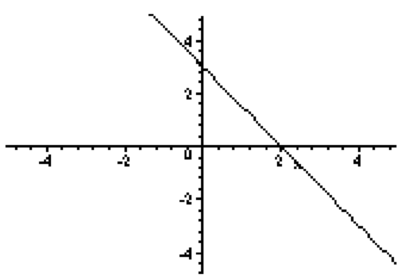
10. Gráfica ( )



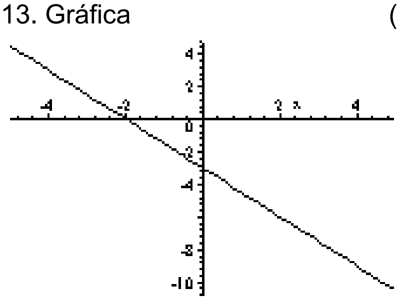
11. Gráfica ( )



12. Gráfica ( )



13. Gráfica ( )



a) y = -ax + b

b) y = ax + 2

c) y = -ax + 6

d) y = ax + b

En la serie de ejercicios anteriores habrás observado que utilizamos fracciones decimales para el parámetro b, además que éste puede ser positivo, negativo o cero, lo cual da como resultado que la recta intersecte al origen, arriba o abajo de la constante.

En seguida procederemos al análisis de la constante a, puesto que esto aclarará las dudas que hayan surgido en el trabajo realizado hasta ahora.

En primer lugar, recuerda que en los ejemplos iniciales de este fascículo, se hizo referencia a cierta constante de proporcionalidad, y en este momento se requiere que interpretemos esa cantidad. Intentaremos hacerlo mediante un ejemplo.

EJEMPLO:

Gráfíca la función y = 2x + 1, con $D = \{x / -2 \leq x \leq 7\}$; para ello completa la tabulación siguiente:

x	**-2**	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**
y	**-3**	**-1**				

Tomemos dos puntos cualesquiera de la gráfica, por ejemplo, A (1,3) y B (3,7). Con los trazos auxiliares formaremos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento AB. ¿Cuál es la longitud del lado vertical?. ¿Cuál es la longitud del horizontal?.

Calcula el cociente que resulta de dividir: a= lado vertical/lado horizontal. ¿Cuál es el valor de a?.

Repite el proceso tomando otros pares de puntos, por ejemplo, (0,1) y (3,7) ó (-2, -3) y (5, 11). ¿Cuál es el valor de a para estos pares?. ¡Correcto!. Es el mismo que resultó para la primera pareja de puntos que tomamos. ¿Podrías contestar por qué ocurre de esta manera?.

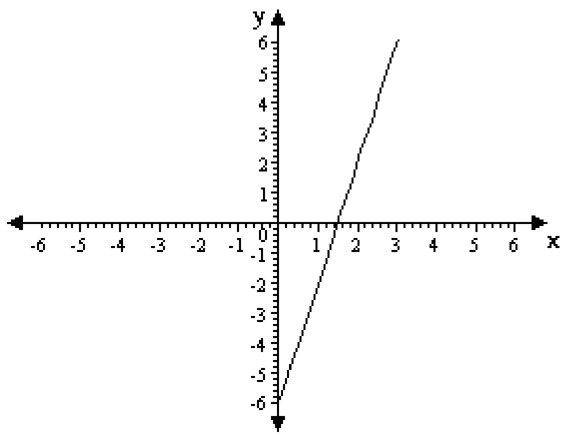
Quizá pienses: ¡Qué extraños triángulos!, pero por muy pequeños o muy grandes que sean, todos conservan la misma razón a=2. Reflexiona un poco más y verás que otras rectas se comportan de igual manera. Te invitamos a que repitas el proceso para la función siguiente:

EJEMPLO:

Sea la función:

$y = 4x - 6$

Encuentra varias parejas de puntos para que determines la razón en cada caso.



Gráfica 15

Como podrás darte cuenta, también poseen la característica del ejemplo anterior, pues la razón es la misma en todos los casos. Ahora observa detenidamente cada una de las expresiones de las siguientes funciones:

$y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 4x - 6$ $\qquad$ $y = -3x - 2$

aquí:

$a = 2$ $\qquad$ $a = 4$ $\qquad$ $a = -3$

En esta etapa quizá pienses que la constante a de la expresión está relacionado con la inclinación de la recta; en efecto, así es, pero para comprobar esta idea deberás tomar una de las expresiones anteriores para graficarla variando la constante *a*, por ejemplo:

Sea $y = 2x + 1$, la cual tiene la forma $y = ax + b$ Grafiquemos para

$a = 3$; $\qquad$ $a = 5$; $\qquad$ $a = -3$.

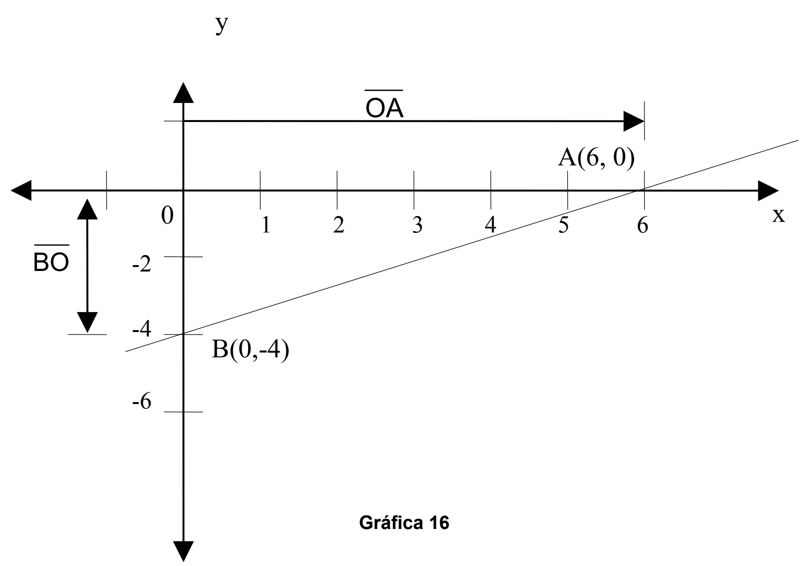
¿Qué sucede con la inclinación de las rectas al cambiar la constante a?. Efectivamente, la inclinación de la recta respecto al eje positivo de las x varía con a. Esto conduce a otra conclusión importante acerca de la recta:

En toda función lineal cuya expresión sea $y = ax + b$, la inclinación de la recta asociada a ésta depende del valor de la constante *a*.

Para concluir nuestro análisis de la función lineal, resolveremos el problema inverso que consiste en encontrar la expresión de la función a partir de su gráfica; veamos un ejemplo.

EJEMPLO:

Para la gráfica de la función lineal siguiente encuentra la expresión correspondiente:



Gráfica 16

Como puedes ver, la expresión de la función tendrá la forma:

$$y = ax - b$$

En primer lugar, colócate en donde la recta corta al eje vertical. ¿Cuál es la pareja (x,y) que le corresponde?. ¡Correcto!, es (0,-4), entonces el valor de la componente y equivale al parámetro b de la expresión de la función.

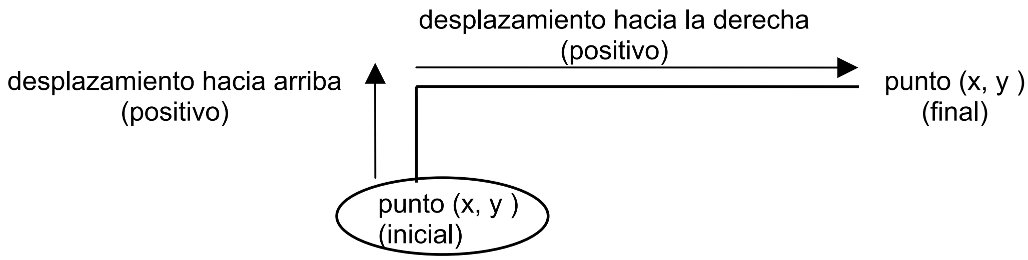
En seguida observa el otro punto de corte de la recta con el eje horizontal. ¿Cuál es ese punto?. ¡Exacto!, es (6,0). ¿Cuántas unidades recorres desde el punto (0,-4) hasta el origen?, ¿cuántas desde el origen hasta el punto (6,0)?. Este recorrido da como resultado la longitud de los lados del triángulo rectángulo *BO* y *OA* si aplicas la relación:

$$a = \frac{BO}{OA}$$

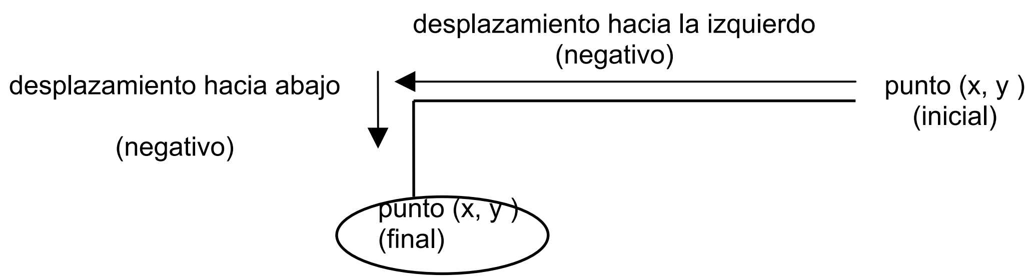
obtienes el valor de la constante a de la expresión de la función, es decir:

$$a = \frac{4}{6}$$

Si te das cuenta, hemos tomado la longitud $\overline{BO}$ como positiva. ¿Por qué debemos hacerlo así?. Aquí cabe hacer una aclaración que tiene que ver con el sentido del recorrido sobre los lados del triángulo rectángulo: si los desplazamientos son hacia arriba y a la derecha, como en el ejemplo, los consideramos como positivos. Esto nos lleva a completar una tabla de posibilidades como la siguiente:



Para este ejemplo, el valor de *"a"* es positivo ahora veamos el caso contrario. ¿Puedes explicar por qué?. Ahora te corresponde explicar los demás casos:



Para este ejemplo, el valor a también es positivo. ¿Puedes explicar por qué?. Ahora te corresponde explicar los demás casos:

1. Desplazamiento hacia arriba y hacia la izquierda.
2. Desplazamiento hacia abajo y hacia la derecha.

¿Qué signo tiene la constante *a* en cada caso?.

Regresando al ejemplo que estamos resolviendo, ya estamos en condiciones de escribir la expresión algebraica de la función:

Si: $b = -4$ y $a = \frac{4}{6}$

entonces:

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

será la expresión que se busca. Debes notar que 2/3 resultó de simplificar 4/6.

Con lo anterior se puede concluir que la representación gráfica de una función lineal es una línea recta.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

La representación geométrica de la gráfica de una función, nos permite identificar, según el trazo, algunas de sus características y propiedades, como las siguientes:

- Cuando la inclinación de la recta es hacia el eje positivo de las abscisas, la constante de proporcionalidad “a” es positiva.

- Cuando la inclinación de la recta es hacia el eje negativo de las abscisas, la constante de proporcionalidad “a” es negativa.

- Es posible obtener el valor de la constante de proporcionalidad “a” al trazar un triángulo rectángulo y dividir la longitud del lado vertical entre la longitud del lado horizontal.

- El punto que intersecta la recta al eje de las ordenadas corresponde al valor de “b”.

En el plano cartesiano un punto cualquiera es la representación geométrica de un par ordenado, y a cada par le corresponde un punto; por consiguiente, la función se puede definir como un conjunto de pares ordenados, los cuales se pueden representar geométricamente en el plano cartesiano para obtener su gráfica. Por ello, la gráfica de una función es el conjunto de puntos del plano que representan a los pares ordenados de la función, y la representación geométrica constituye la línea recta donde se visualiza el comportamiento de la función.

1.3 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A UNA FUNCIÓN LINEAL

En este tema, haremos una integración de los dos anteriores, de tal manera que a partir de un problema concreto obtendremos su función lineal, la tabulación y la gráfica correspondiente.

Es muy importante que todos los problemas que integran este tema, los resuelvas previamente en tu cuaderno, y posteriormente compares tus procedimientos con los que te proponemos. Recuerda que si tienes dudas y no las puedes resolver con el contenido de este fascículo, puedes consultar otras bibliografías o a tu asesor. Observa cada uno de los problemas que a continuación se exponen a manera de ejemplo:

PROBLEMA

El precio de un radio es de $200.00 al contado, pero si se compra en abonos se cobra un interés mensual fijo de $10.00.

a) ¿Cuánto debe pagarse si se compra al contado o en plazos de 1,2,3,4,5 ó 6 meses?

b) Tabula y construye la gráfica.

c) Anota la expresión algebraica que determina la regla de correspondencia de la función.

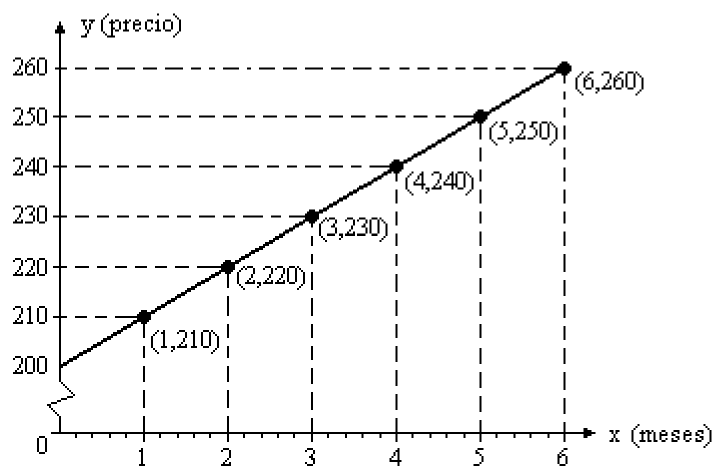
RESULTADO

a) Al comprarlo en abonos se tendrá que pagar:

A un mes	200 + 10 (1) = 210
dos meses	200 + 10 (2) = 220
tres meses	200 + 10 (3) = 230
cuatro meses	200 + 10 (4) = 240
cinco meses	200 + 10 (5) = 250
seis meses	200 + 10 (6) = 260

b) Los datos anteriores nos dan la tabla y la gráfica siguiente:

x	y = f (x)
0	**200**
1	**210**
2	**220**
3	**230**
4	**240**
5	**250**
6	**260**



Gráfica 17

c) Por lo tanto, la cantidad que debe pagarse en un plazo de x meses es:

$$f(x) = 200 + 10x$$

la cual es la expresión algebraica que determina esta función.

PROBLEMA:

Patricia pide prestado a Inés $500.00 Inés le dice que le da seis meses de plazo para pagarle, cobrándole $10.00 de interés por cada mes.

a) ¿Cuánto tendrá que pagar a Patricia si le paga a Inés el mismo día o en 1,2,3,4,5 ó 6 meses?

b) Tabula y construye la gráfica.

c) Encuentra la expresión algebraica que determine la función que describe al problema.

SOLUCIÓN:

a) Tendremos que designar una incógnita que represente el número de meses, que en nuestro ejemplo será *x*. Entonces:

Para cero meses, Patricia pagará $500.00 + 10(0) = $500.

Para un mes, $500.00 + 10(1) = $510.

Para dos meses, $500.00 + 10(2) = $520.

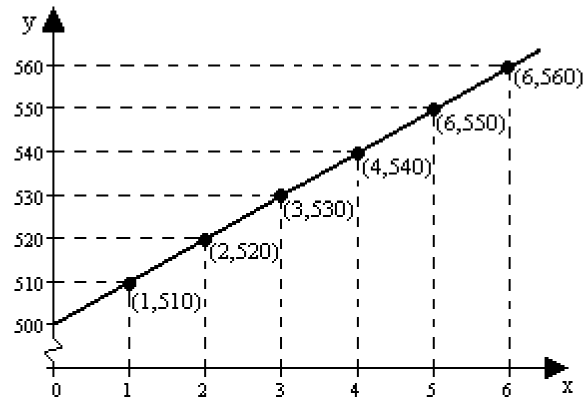
Para tres meses, $500.00 + 10(3) = $530.

¿Cuánto deberá pagar los meses restantes del plazo?.

b) Si tabulas los datos anteriores tendrás la siguiente tabla:

x	y
0	**500**
1	**510**
2	**520**
3	**530**
4	**540**
5	**550**
6	**560**

Por lo tanto, la gráfica es:



Gráfica 18

c) Con base en la proposición del inciso a) podemos establecer la expresión solicitada, que es:

$$\mathbf{f\,(x) = 10x + 500}$$

Te habrás dado cuenta que si damos valores a *x* (variable independiente) para encontrar los respectivos valores de *y* (variable dependiente) y además unimos los puntos en el plano cartesiano coordenado, éstos forman una recta que representa la gráfica de una función lineal cuyo modelo algebraico es:

$y = ax$ cuando la recta cruza el origen

$y = ax + b$ cuando la recta no cruza el origen

donde *a* y *b* son valores reales (IR) y $a \neq 0$.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

A partir de estas actividades, podrás aplicar tus conocimientos de la función lineal, a problemas concretos, relacionados con diversos fenómenos.

1. El señor Ávila renta un auto en $50.00 diarios más $2.50 por kilómetro recorrido:

   a) Calcula el gasto que le produce recorrer en un día 40, 60, 90, 120, ó 160 kilómetros, y tabula los resultados.

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica de este problema?.

   c) Grafica la expresión algebraica.

2. La compañía Delta obtuvo un préstamo por $15 000.00, pero el banco le cargará el 3% mensual de intereses:

   a) Calcula lo que la compañía deberá pagar en 0,1, 2, 3, 4 ó 5 meses, y tabula los resultados.

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica de este problema?.

   c) Grafica los resultados.

3. La señora Lulú va a hornear un pastel, pero la escala de su horno está en grados farenheit (°F) y su receta indica grados centígrados (°C), entonces le pide ayuda a su hijo y éste le dice: “Multiplica los grados centígrados por 9/5 y al resultado le sumas 32 y tendrás los grados farenheit”. Con este enunciado obtén lo siguiente:

   a) Los grados farenheit cuando la señora Lulú utilice el horno en 100, 115, 135 y 145 grados centígrados, y tabula los datos.

   b) La expresión algebraica del problema.

   c) Los resultados mediante una gráfica.

4. En una prueba de tiempo durante una práctica de carreras de autos, uno de ellos registró los siguientes resultados:

   En una hora recorrió 80 km; en dos horas, 160 km; en tres horas, 240 km; en cuatro horas, 320 km y en cinco horas, 400 km. La distancia que recorre el auto está en función del tiempo, por lo tanto:

   a) Construye la gráfica del problema.

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que denota la distancia recorrida en función del tiempo?.

5. Como la circunferencia de un círculo está en función de π veces su diámetro, entonces
   a) ¿ Cuál es la circunferencia del círculo cuando el diámetro mide 1,2,3,4 o 5 metros?; tabula los resultados.

   b) Encuentra la expresión algebraica del problema.

   c) Construye la gráfica.

6. La estatura de un hombre se puede calcular, conociendo la medida del hueso húmero, la cual se multiplica por 2.89, y al resultado se le suma 70.64, entonces:

   a) ¿Cuál es la estatura de un hombre cuyo hueso húmero mide 30, 33, 37 o 40 centímetros?; tabula los resultados.

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que da la estatura del hombre cuyo hueso húmero tiene x centímetros de largo?.

   c) Construye la gráfica.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Recuerda que los valores de la función lineal se pueden registrar mediante una tabla de valores. Esta asigna a cada valor "x" (variable independiente) un sólo valor a "y" (variable dependiente), es decir:

x	**y**
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

Los valores de la función se obtienen a través de la regla de correspondencia:

$$f(x) = ax + b$$
$$\text{donde } y = f(x)$$

donde "a" y "b" son numeros reales y = $a \neq 0$.

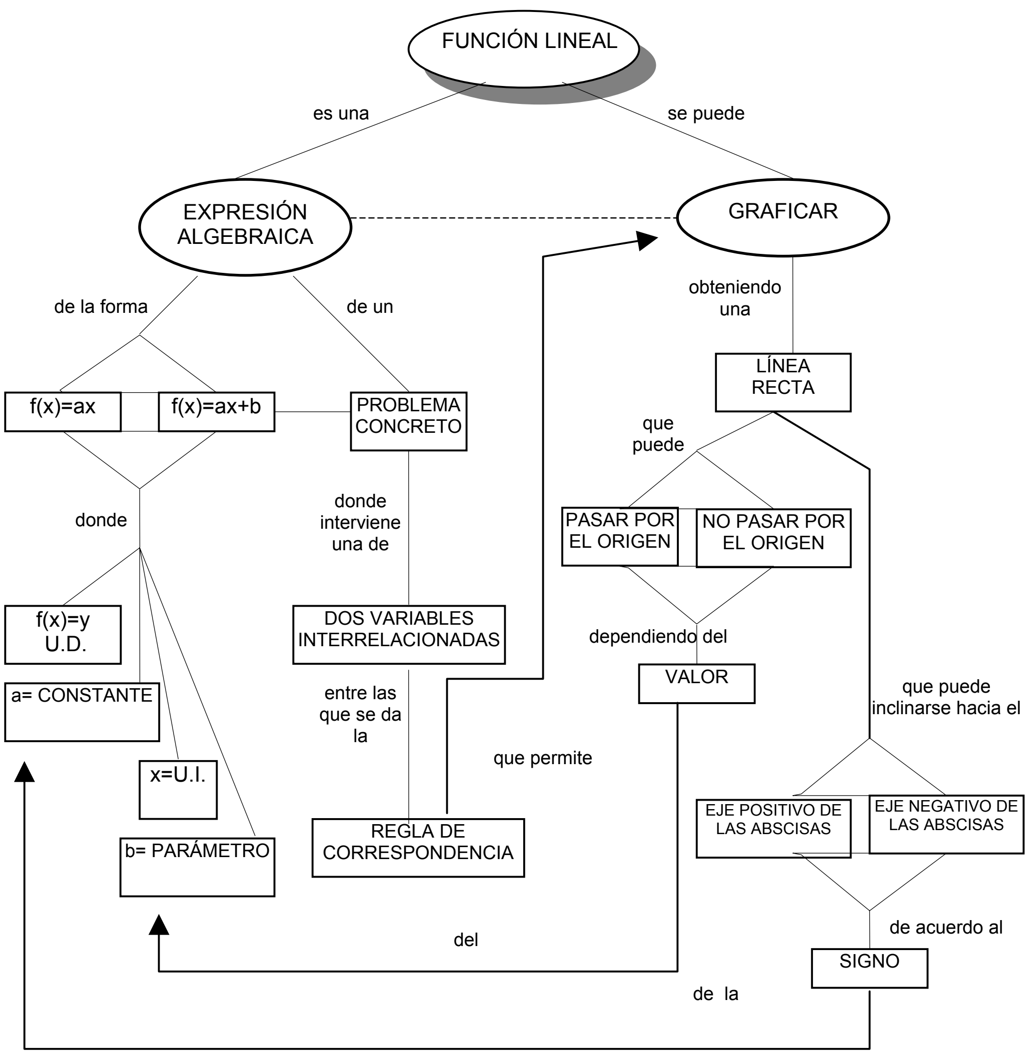
El conjunto de todos los pares ordenados (x, y) de la tabla representan puntos en el plano cartesiano, los cuales determinan la gráfica de la función lineal al unirlos por medio de una línea recta; esto nos lleva a una conclusión importante:

La gráfica de la función lineal es una línea recta

RECAPITULACIÓN

Con la finalidad de que verifiques tu comprensión de las características de una función lineal, lee el siguiente mapa conceptual, en el que se incluyen los conceptos que analizamos en este fascículo y sus relaciones.

Para leerlo, inicia de arriba hacia abajo, y de izquierda a derecha, construyendo oraciones con los conceptos que se incluyen en los nódos (óvalos) y las frases que aparecen entre éstos. Posteriormente sigue las líneas punteadas en el sentido que indican las flechas.



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Con la intención de que practiques la resolución de problemas que dan lugar a una función lineal, y su representación gráfica, te presentamos las siguientes actividades.

I. De cada uno de los enunciados planteados:

- Identifica los datos conocidos y desconocidos.
- Obtén su función lineal.
- Elabora la tabulación para obtener los puntos de la gráfica.
- Construye la gráfica.
- Interpreta tus resultados.

1. Un trabajador gana \$45.00 por hora y su sueldo diario depende del número de horas que trabaje. ¿Cuánto gana al día si trabaja 2, 4, 6 u 8 horas?.

2. El metro cuadrado de un terreno tiene un valor de \$500.00; ¿Cuánto cuesta adquirir 100, 200, 300 ó 400 metros cuadrados?.

3. El tanque de gasolina de un auto tiene una capacidad de 40 litros; si el auto tiene un rendimiento de 10 km/lt. ¿Cuántos litros quedan en el tanque después de recorrer 0, 15, 30, 50, 80 ó 400 km?.

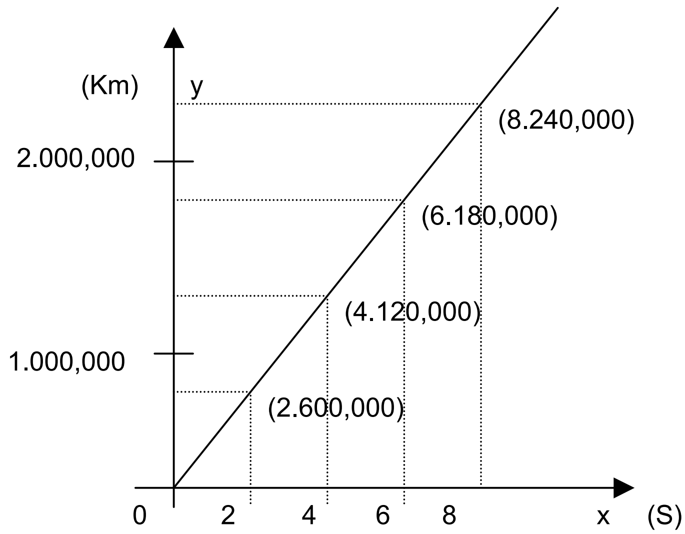
II. De las gráficas 1 y 2 obtén:

- El valor de la constante y lo que representa.

- El valor del parámetro (en caso de que exista) y lo que representa.

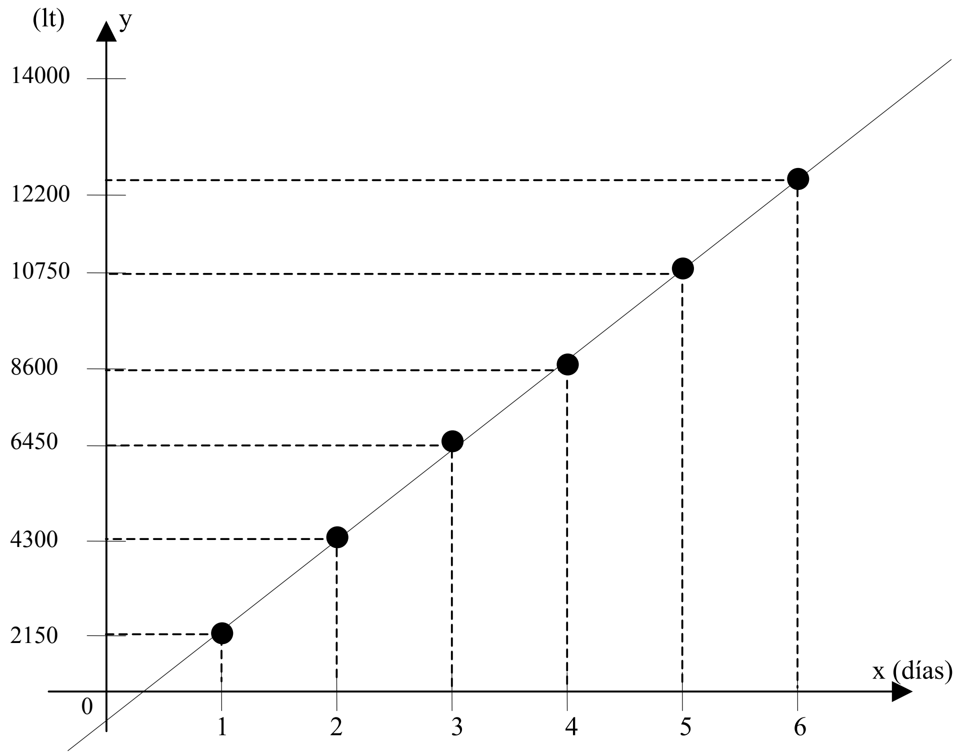
- La función lineal correspondiente. Y su interpretación.

4. La siguiente gráfica representa la velocidad de la luz, por segundo.



Gráfica A

5. La siguiente gráfica representa la cantidad de agua en litros que utiliza un hotel al día.



Gráfica B

AUTOEVALUACIÓN

A continuación se presentan algunos resultados a los que debiste llegar en las actividades de consolidación, con la finalidad de que verifiques que los procedimientos que seguiste fueron adecuados.

Si encuentras diferencias entre éstos y tus resultados, revisa tus procedimientos y si no localizas los errores solicita el apoyo de tu asesor de contenido.

1. Datos:

Número de horas = x
Sueldo por día = y
Pago por hora = a

Función lineal = f (x) = ax
f (x) = 45x

Tabulación:

x	f (x) = 45x	y
2 4 6 8	f (x) = 45 (2) f (x) = 45 (4) f (x) = 45 (6) f (x) = 45 (8)	90 180 270 360

2. Datos:

Cantidad de metros = x
Cantidad total del terreno = y
Costo por metro = a

Función Lineal:

f(x) = ax
f(x) = 500x

3. Datos:

Distancia recorrida en Km = x
Litros restantes = y
Consumo de gasolina por km = a
Capacidad del tanque = b

Función Lineal:

f(x) = -ax + b

$$f(x) = -\frac{1}{10}x + 40$$

Tabulación

x	$f(x) = -\frac{1}{10}x + 40$	y
0	$f(x) = -\frac{1}{10}(0) + 40$	40
15	$f(x) = -\frac{1}{10}(15) + 40$	38.5
30	$f(x) = -\frac{1}{10}(30) + 40$	37
50	$f(x) = -\frac{1}{10}(50) + 40$	35
80	$f(x) = -\frac{1}{10}(80) + 40$	32
400	$f(x) = -\frac{1}{10}(400) + 40$	0

4. Datos:

Tiempo en segundos = x
Distancia recorrida en km = y
Distancia recorrida en un segundo = a

Función Lineal:

f (x) = ax
f (x) = 300,000x

5.Datos:

Días transcurridos	=x
Litros consumidos	=y
Litros consumidos por día	=a

Función Lineal:

$f(x)=ax$
$f(x)=2150x$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

La solución de los siguientes problemas te permitirá identificar la utilización que tiene la función lineal para interpretar fenómenos y tomar decisiones en diversas áreas del conocimiento.

1. En Biología hay una regla aproximada llamada bioclimática para las zonas templadas, la cual establece que en la primavera y al principio del verano, algunos fenómenos periódicos, tales como la florescencia de ciertas especies, la aparición de ciertos insectos y la maduración de los frutos, por lo general se retardan alrededor de 4 días por cada 500 pies de altura; la expresión es:

$$d = 4(h/500),$$

donde d es el cambio en días y h es el cambio de altitud en pies (ft). Construye la gráfica de la ecuación desde cero hasta 4 000 pies, variando la altitud cada 500 pies.

2. En electrónica, un circuito eléctrico simple tiene una resistencia de 30 ohmios, como la que tienen las linternas; la corriente del circuito I (amperios), y la fuerza electromotriz, E (voltios), están relacionados por la ecuación:

$$E = 30\,I.$$

Construye la gráfica de esta ecuación desde cero hasta un amperio variando la corriente de 0.1 en 0.1.

3. En cálculos de interés simple la cantidad devengada, S (monto), en una función lineal del tiempo medido en años:

$$S = P + Prt.$$

$$\text{donde :}\quad \begin{cases} t = \text{tiempo} \\ r = \text{tasa de interés} \\ p = \text{capital} \end{cases}$$

Calcula S transcurridos 15 años, si el capital, P, es igual a \$100.00 y la tasa anual de interés, r, es igual a 4%. ¿En qué momento el monto es igual a \$220.00?.

4. La depreciación directa o lineal supone que un artículo pierde todo su valor inicial de A dólares durante un periodo de n años. Si un artículo que cuesta 20 000 dólares cuando está nuevo, se deprecia linealmente por un periodo de 25 años, determina la función lineal dando su valor, V, en dólares, después de x años (desde cero hasta 25 años). ¿Cuál es el valor después de 10 años?.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

BARNETT, Raymond A. Álgebra y Trigonometría. 2a. de. México, McGraw-Hill. 1986.

BARNETT, Raymond A., Nolasco, Margarita. Álgebra Elemental. Estructura y Aplicaciones. 2a. de. México, McGraw-Hill. 1987.

BRITTON, Jack T., Bello, Ignacio Matemáticas Contemporáneas. 2a. de. México, Harla. 1982.

PHILLIP, Elizabeth P., Butts, Thomas, Shaughnessy, Michel. Álgebra con Aplicaciones. México, Harla. 1988.

REES, Paul K., Sparks, Fred W. , Sarks Rees, Charles. Álgebra. 10a. de. México, McGraw- Hill. 1991.

SOBEL, Max A., Lerner, Norber. Álgebra. 2a. de. México, Prentice- Hall Hispanoamericana. 1989.

ZILL, Dennis G., Dewar, Jaqueline M. Álgebra y Trigonometría. 2a. de. Colombia, McGraw-Hill. 1992.

COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS II

FASCÍCULO 2. **FUNCIONES POLINOMIALES Y SU REPRESENTACIÓN GRÁFICA**

Autores: Rosa Ma. Espejel Mendoza
Mario Luis Flores Fuentes
Ma. Estela Ruíz Hernández
Andrés Sosa Estrada

COLEGIO DE
BACHILLERES

Colaboradores:
Mario Arturo Badillo Arenas
Juan Pérez Rodríguez
Eloisa Poot Grajales

Asesoría Pedagógica
Dora Ma. Mireles Alvarado

Revisión de Contenido
Joel Díaz Guadarrama

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortíz

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

El tema que se desarrolla en este fascículo, funciones polinomiales y su representación gráfica, tiene gran importancia en las Matemáticas. Estas funciones son modelos que describen las relaciones entre dos variables que intervienen en diferentes problemas y/o fenómenos, los cuales al ser humano le interesa comprender por diversas razones.

Recordarás que en el fascículo anterior revisaste los temas de: Relación entre la función lineal y la ecuación de primer grado con dos incógnitas, la gráfica y los problemas que conducen a una función lineal. Estos conceptos previos te serán de gran ayuda para comprender y aplicar los diferentes métodos de solución para los problemas que conducen a una función polinomial. Por ejemplo, el ser humano en el intento por desentrañar los misterios del Universo; ¿Qué tiempo tarda en aparecer el fenómeno llamado eclipse?, los científicos emplean algunos conocimientos sobre las funciones cuadráticas y su representación gráfica. Otro ejemplo y aplicación es cuando se quiere calcular la distancia que recorre un proyectil, cuando es disparado por un submarino con dirección a un barco cuyo punto más cercano se encuentra a cierta distancia del punto de partida del proyectil. Para este fascículo estudiaremos los siguientes capítulos:

El primer capítulo te proporciona elementos para trabajar la solución de problemas que conducen a funciones polinomiales cuadráticas, además tendrás más posibilidades de comprender las relaciones funcionales entre dos o más variables que participan en diversos casos y/o situaciones que llevan a la solución de dichos problemas.

El segundo capítulo trabajarás la representación gráfica de funciones polinomiales, así como el análisis de funciones, concepto, clasificación y representación gráfica.

Como te habrás dado cuenta, el conocimiento de las funciones te permitirá obtener diferentes valores con que representamos la ocurrencia de un fenómeno, para distintos momentos, mientras que la solución de ecuaciones que has estudiado determinará el o los valores con que se presenten dichos fenómenos para un sólo momento. Esto y más nos revela la necesidad e importancia que tiene el estudio de las funciones.

C A P Í T U L O 1

FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

1.1 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A FUNCIONES POLINOMIALES CUADRÁTICAS.

1.1.1 Modelo Polinomial Cuadrático
- 1.1.1.1. Construcción del Modelo Algebraico

1.1.2 Método de solución
- 1.1.2.1 Método por Tabulación
- 1.1.2.2 Método de Aproximaciones Sucesivas
- 1.1.2.3 Método de Álgebra y Geometría

1.2 CONCEPTO DE FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA.

1.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

1.3.1 Vértice de la Gráfica
1.3.2 Valor extremo de una Función Cuadrática
1.3.3 Intersecciones de la Gráfica con los Ejes Coordenados

1.4 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON LA FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA

1.5 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS

1.5.1 De la Forma $ax^2 + b = 0$
1.5.2 De la Forma $ax^2 + bx = 0$

1.6 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

1.6.1 Método por Factorización
1.6.2 Método de Completar un Trinomio Cuadrado Perfecto.
1.6.3 Fórmula General para resolver Ecuaciones Cuadráticas
    1.6.3.1 El Discriminante de una Ecuación Cuadrática
1.6.4 Solución Gráfica de Ecuaciones Cuadráticas
1.6.5 Ajuste de Curvas

P R O P Ó S I T O

El ser humano siempre ha buscado la manera de explicarse ciertas características y/o comportamientos que representan algunos fenómenos sociales o naturales más aún si se encuentran relacionadas con las Matemáticas.

Dada la importancia que representa esta cuestión. El presente fascículo busca que al concluir su estudio:

¿Qué aprenderás?

A conocer y a desarrollar el concepto de ecuación cuadrática, identificando sus elementos y dominando los procedimientos de solución algebraica y gráfica de este tipo de ecuaciones tales como: ensayo y error, factorización, completando cuadrados y la fórmula general usando la gráfica de la función para localizar sus raíces asociadas.

¿Cómo lo aprenderás?

Considerando la experiencia previa sobre el estudio de la función lineal, cuadrática, la tabulación y su representación gráfica.

¿Para qué te va a servir?

Para que analices soluciones de problemas que conducen al planteamiento de modelos algebraicos y la representación gráfica de funciones polinomiales cuadráticas.

SIMBOLOGÍA

$\neq$	Diferente de:
$=$	Aproximadamente igual
$\emptyset$	Conjunto vacío o nulo
E	es elemento de
$\not{E}$	no es elemento de
$>$	mayor que
$<$	menor que
$\geq$	mayor o igual que
$\leq$	menor o igual que
I	Conjunto Imagen
N	Números naturales
Z	Números enteros
Q	Números racionales
ℝ	Números reales
C	Números complejos
Vo	Velocidad inicial
s	Desplazamiento
a	Aceleración
f(x)	Valor de f en x
f(x)=ax+b	Función Lineal

CAPÍTULO 1. FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

En diversos campos de la actividad humana como el comercio, la industria, la investigación en ciencias naturales y sociales, la tecnología, etc, se presentan problemas tales como implementar los ingresos en un negocio, acertar en el blanco al lanzar proyectiles, calcular la distancia que recorre un cuerpo que se desplaza con movimiento uniformemente acelerado y concentrar la luz del sol para aprovechar su energía. Para resolver estos problemas, entre muchos otros, tenemos que analizar sus características en un lenguaje de nociones y ecuaciones matemáticas, es decir, construir el modelo matemático correspondiente para estudiarlos como problemas matemáticos.

Por ejemplo, en el gimnasio Zeus hay 150 socios que pagan una cuota mensual de 60 dólares (utilizaremos dólares para simplificar los cálculos). El dueño del gimnasio desea incrementar sus ingresos, por lo que ordena un estudio de mercadotecnia, en el cual recomienda reducir la cuota, ya que por cada dólar que ésta disminuya, se inscribirán cinco nuevos socios. ¿En cuántos dólares debe reducirse la tarifa para obtener la máxima ganancia mensual?.

La búsqueda de la solución de este problema lo iniciamos con una tabla donde se muestre la variación que sufre el ingreso al reducir la cuota. Según el estudio de mercadotecnia, en la medida en que se reduzca la cuota aumentará el número de socios; sin embargo, ¿reportará más ganancias el hecho de que se inscriban más socios pagando una cuota menor?.

En la tabla siguiente se presentan los ingresos correspondientes a varias reducciones en la cuota; en ella x representa el número de dólares que la cuota disminuye.

Número de dólares que disminuye la cuota (x)	Número de socios	Cuota (dólares)	Ingreso (dólares)
0	150	60	9 000
1	155	59	9 145
15	225	45	10 125
20	250	40	10 000
30	300	30	9 000
40	350	20	7 000

Tabla 1

Observa la tabla 1 y contesta: ¿Siempre que se reduce la cuota, aumenta el ingreso?. ¿Para qué valor de la reducción es el ingreso máximo?.

Otra opción para solucionar este problema es elaborar un modelo algebraico que describa las relaciones entre las reducciones a la cuota y el ingreso, y después aplicarle los métodos propios de las Matemáticas.

Representaremos con x el número de dólares que disminuye la cuota y con y el ingreso. El número de socios cuando la cuota se reduce x dólares es $150 + 5x$ y la cuota, $60-x$ dólares. El ingreso se obtiene al multiplicar el número de socios por la cuota. Por lo tanto:

$$y = (150+5x)\,(60-x)$$

Simplificando, al efectuar el producto se obtiene:

$$y = -5x^2 + 150x + 9000$$

La igualdad anterior es el modelo algebraico que representa de manera simbólica la relación entre todos los posibles descuentos a la cuota y al ingreso correspondiente. Se dice que este modelo es cuadrático porque el mayor exponente que tiene la variable independiente “x” es, operando con el modelo que se encuentra la solución al problema matemático para, finalmente se transfirieran los resultados a la “situación real”.

En el desarrollo de este capítulo se emplearán diferentes recursos para resolver problemas en los que, como en el anterior, intervienen modelos cuadráticos.

1.1 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A FUNCIONES POLINOMIALES CUADRÁTICAS

En este tema se examinarán varios problemas en los cuales intervienen dos cantidades relacionadas por medio de funciones cuadráticas y se ensayarán diversos métodos para resolverlos.

1.1.1 MODELO POLINOMIAL CUADRÁTICO

Ejemplo

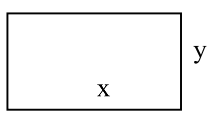
En el jardín de una residencia se quiere destinar una zona rectangular para hacer un huerto y se dispone de 56 metros lineales de malla de acero para cercar la zona. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se desea abarcar la mayor área posible?.

Analicemos las relaciones entre el área y las dimensiones del rectángulo.

1.1.1.1 Construcción del Modelo Algebraico

¿Recuerdas cómo se obtiene el área de un rectángulo?. El área de un rectángulo cualquiera se obtiene multiplicando su base por la altura correspondiente.

Representaremos con "y" el área y con "x" la base del rectángulo. Si el perímetro del rectángulo es igual a 56 metros, ¿cuánto suman la base y la altura?. La suma de la base y la altura del rectángulo es igual a 28 metros (la mitad del perímetro). De este modo una expresión para la altura es:



$$P = 2x+2y$$
$$56 = 2(x+y)$$
$$y= 28-x$$

$$\therefore\ y = 28-x$$

Así tenemos que el área del rectángulo es: Base por la altura

$$A = x(28-x)$$
$$y = x(28-x),$$

o bien,

desarrollando el producto obtenemos el modelo algebraico $y = -x^2 + 28x$.

a) Modelo algebraico $f(x) = -x^2 + 28x$

Esta igualdad es un modelo algebraico para el área del rectángulo que estamos considerando. Representa, en el lenguaje del Álgebra, la relación entre todas las medidas de la base y el área correspondiente.

b) Modelo polinomial

Un polinomio en x es de la forma $a_o\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a2x^{n-1} + ...+a_{n-1}\, x + a_n$. El modelo que se obtiene es un modelo polinomial porque el segundo miembro de la igualdad, $y = -x^2 + 28x$ es un polinomio en x.

c) Modelo cuadrático

El modelo $y = -x^2 + 28x$ es un modelo polinomial cuadrático o de segundo grado porque el grado del polinomio $-x^2 + 28x$ es 2, esto es el maximo exponente con el que aparece la variable x es 2, en el término x^2. La función cuadrática puede ser completa $f(x) = ax^2+bx+c$ ó incompleta cuendo le falta algun termino menos el cuadrático.

En este modelo intervienen dos variables: x, y. El valor de y depende del valor de x; por tal razón decimos que y es la variable dependiente, x la variable independiente, de acuerdo con la definición de función.

Lo anterior significa que el área del terreno de nuestro problema depende de la longitud de su base.

Por ejemplo, si la base del terreno fuera de 10m, el área sería:

$$y = -(10^2) + 28(10)$$
$$y = -100 + 280$$
$$y = 180m^2$$

Calcula el valor del área para una base de 12 m.

Una vez establecido el modelo algebraico emplearemos diversos métodos para buscar la solución del problema ó sea encontrar el área maxima.

1.1.2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN

A continuación en este apartado estudiaremos los Métodos de Solución para Problemas que conducen a Funciones Polinomiales Cuadráticas tal como: Método por Tabulación, Método de Aproximaciones Sucesivas y Método de Álgebra y Geometría

1.1.2.1 Método por Tabulación

Por medio de una tabla investiguemos cómo las variaciones de la base afectan al área del triángulo. Para elaborar la tabla daremos diferentes valores que podría tomar (x la base).

1. ¿Puede ser x=0 metros?. ¿Cuál sería el área del terreno para x=0 m.

2. ¿Puede ser x=28 metros, si la base fuera de 28m. ¿Cuál sería el área?.

3. ¿Pueden ser x=6.8 metros? x=18.99 m. Y x=21.765 m. Justifica tu respuesta.

Por último si x=6.8m. x=18.99 m . Y x= 21.765 m. ¿Cuál sería el área del rectángulo?. Justifica tu respuesta.

Habrás llegado a la conclusión de que el conjunto de todos los posibles valores para x está formado por todos los números reales mayores o iguales que cero y menores o iguales que 28. El conjunto anterior se denota de la siguiente manera:

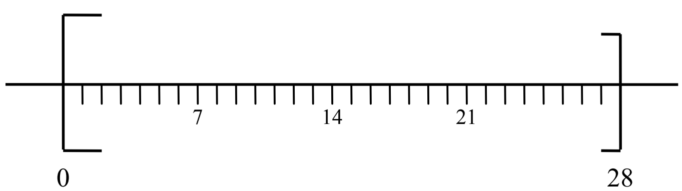
$$\{x \in \mathrm{IR} \,/\, 0 \leq x \leq 28\}$$

x es un número real tal que x es mayor o igual a cero pero x es menor o igual a 28
También puede usarse la notación de intervalos:

$$[0,28],$$

la cual representa al conjunto de los números 0, 28 y todos los números reales que hay entre cero y 28. Su representación gráfica es la siguiente:

intervalo $[0,28]$,



Gráfica 1

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza el siguiente ejercicio:

Haz una lista de más de 28 números reales entre cero y 28.

Una vez que se ha determinado el conjunto de valores admisibles para la variable independiente, se procederá a elaborar la tabla asignando a x algunos de los valores permitidos. Los correspondientes valores de y se obtienen sustituyendo los de x en la igualdad $y = -x^2 + 28x$.

x (base en metros)	$f(x)=-x^2+28x$	y (área en m^2)
0	$f(0)=-(0)^2+28(0)=-0+0=$	0
1	$f(1)=-(1)^2+28(1)=-1+28=$	27
3	$f(3)=-(3)^2+28(3)=-9+84=$	75
5		-
7		-
9		-
11	$f(11)=-(11)^2+28(11)=-121+308=$	187
13	$f(13)=-(13)^2+28(13)=-169+ =$	195
15	$f(15)=-(15)^2+28(15)=-225+ =$	195
17	$f(17)=-(17)^2+28(17)=-289+ =$	187
19	$f(19)=-(19)^2+28(19)=-361+ =$	-
21	$f(21)=-(21)^2+28(21)=-441+ =$	147
23	$f(23)=-(23)^2+28(23)=$	-
28	$f(28)=-(28)^2+28(28)=$	-

Tabla 2

Observa la tabla 2 y anota los números que faltan. ¿Cómo varía el área del rectángulo al variar la base?.

- En la tabla se aprecia que desde x=0 metros hasta x= 13 metros el área aumenta, y para $x > 15$ el área disminuye.

- ¿Cuál es el mayor valor para el área que se encuentra en la tabla?. ¿Es el mayor valor posible?. ¿Crees que para valores de x comprendidos entre 13 y 15, esto es, para toda x, tal que $13 < x < 15$, el área se mantenga igual a 195,

- De la tabla 2 se deduce que la medida x de la base para lo cual se obtiene el valor máximo del área se encuentra entre 13 y 15 metros, es decir, $13< x < 15$.

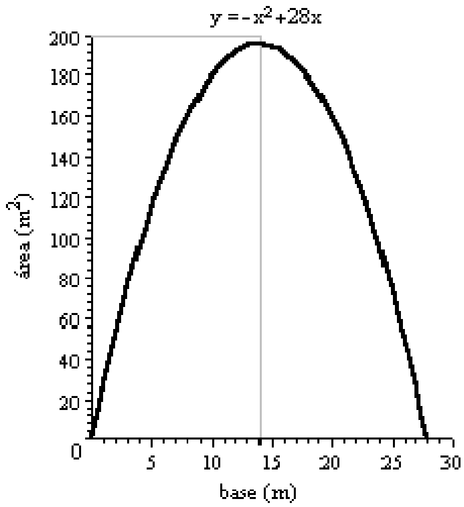
- Construyendo una gráfica podrán apreciarse con más claridad las relaciones entre la base y el área del rectángulo. Para elaborar la gráfica localizamos en el plano cartesiano los puntos correspondientes a los pares de números que se encuentran en la tabla 2. Sobre el eje horizontal se ubican los valores de la variable independiente, *x* (base), y sobre el eje vertical los de la variable dependiente, *y* (área).

Podemos obtener más puntos al considerar otros valores de x entre 0 y 28, más aún, el conjunto de los números reales mayores que 0 y menores que 28 es infinito, así que en realidad la gráfica consta de un número infinito de puntos; si todos se dibujaran se obtendría una línea sin interrupciones. Por eso, una vez ubicados los puntos, los unimos por medio de una línea continua (gráfica 2).

La gráfica que hemos obtenido es una curva llamada parábola y el punto más alto de esta parábola se denomina vértice; la ecuación de la parábola es: $y = -x^2 + 28x$

x	y
2	**52**
5	**115**
8	**160**
19	**171**
20	**160**

Tabla 3



Gráfica 2

Nota: Observa la gráfica 2 y recuerda que el concepto de función nos indica que a cada valor de “x” le corresponde uno de “y” (por ordenada).

- ¿Para qué valores de x el área del rectángulo va aumentando?.
- ¿En qué intervalo de valores de x el área va disminuyendo?.
- ¿Qué relación hay entre el vértice de la parábola y el valor máximo del área?.

De la gráfica 2 concluimos que:

El área crece para valores de x desde 0 hasta un número entre 13 y 15, a partir del cual disminuye.

El área decrece para valores de un número entre 13 y 15 hasta 28.

La ordenada (y) del vértice es el valor máximo del área y su abscisa (x) es la longitud de la base que hace máxima el área del rectángulo. Por lo tanto, encontrando las coordenadas del vértice tendremos la solución a nuestro problema.

¿Cómo pueden determinarse las coordenadas del vértice?.

Por la gráfica sabemos que la abscisa x, del vértice está entre 13 y 15, y que su ordenada, y, es un poco mayor que 195. La gráfica nos proporciona únicamente una solución aproximada.

Ensayemos otro método.

1.1.2.2 Método de Aproximaciones Sucesivas

Calculando y para valores de x entre 13 y 15 podemos aproximarnos más a las coordenadas del vértice.

Ensayemos con algunos valores de x tales que 13 < x < 15. Por ejemplo: si x = 13.9, $y = -(13.9)^2 - 28(13.9) = 195.99$. Para este valor de x el área es mayor que 195, el valor del área que aparece en la tabla 2; pero, ¿es el valor máximo de y?.

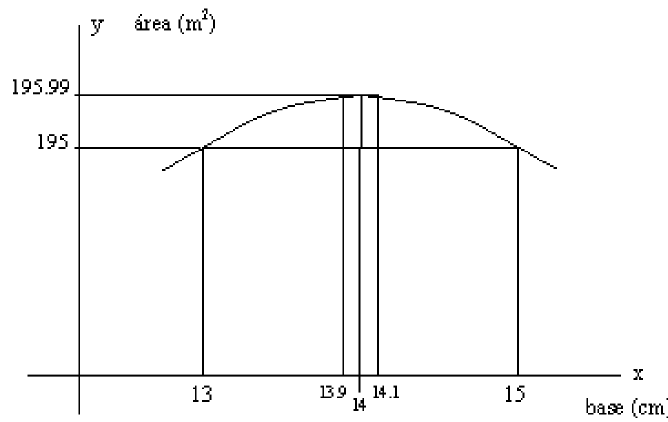
Prueba para x=14.1 y obtendrás que y =195.99; entonces debe ser 13.9 < x < 14.1.

Para x= 13.99 se obtiene y=195.9999. Para este valor de x el área es mayor aún, lo puedes observar en la figura 3.

Probemos para 13.99 < x < 14.1. Por ejemplo: si x=14.05, entonces y=195.9975. En este caso el área es menor; luego, 13.99 < x < 14.04. En la tabla siguiente se resumen los resultados:

x	y
13.9	195.99
13.99	195.9999
14.05	195.9975
14.1	195.99

Tabla 4



Gráfica 3

La figura 3 muestra una ampliación de la zona de la gráfica $y = -x^2 + 28x$ para 13 < x< 15.

Examinadas la tabla 4 y la gráfica 3 se concluye que el valor de x, para el cual es máxima el área (y), está entre 13.99 y 14.05.

Por tanto este método, mediante ensayo y errores, es posible acercarse a las coordenadas del vértice tanto como se desee.

- Ensaya con otros valores de x entre 13.99 y 14.05. Analizando las aproximaciones sucesivas que se han obtenido, ¿tienes alguna conjetura acerca de cuál es el valor de x que maximiza el área?.

El ser humano siempre ha buscado la manera de explicarse ciertas características y/o comportamientos que representan algunos fenómenos sociales o naturales más aún si se encuentran relacionadas con las Matemáticas.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

Comprueba los resultados anteriores usando una calculadora. Si no coinciden con los anotados en el texto, revisa la secuencia de tus operaciones; es importante que aprendas a usar correctamente este instrumento y advertir que éste es un valioso auxiliar.

1.1.2.3 Método de Álgebra y Geometría

Los métodos que hasta ahora hemos usado nos han permitido hallar soluciones aproximadas para nuestro problema, pero si nos interesa encontrar la solución exacta necesitamos emplear otros recursos. La combinación de Álgebra y Geometría que se logra con la introducción del sistema de coordenadas cartesianas constituye una herramienta valiosa para la resolución de una gran cantidad de problemas.

A continuación se estudian de manera informal algunas propiedades de la parábola y su relación con los modelos polinomiales cuadráticos.

Algunas propiedades de la parábola

Con anterioridad se determinó que las coordenadas (x,y) del vértice de la parábola que se obtiene al graficar la relación $y = -x^2 + 28x$ (gráfica 2) proporcionan el valor de x que hace máxima el área del rectángulo correspondiente al problema del huerto. Y el valor máximo “y” de ésta, constituye para encontrar ciertas propiedades de esta curva.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

A continuación se presentan una serie de ejercicios que tendrás que resolver de acuerdo a lo que ya estudiaste, si tienes dudas para su solución, acude con tu Asesor de Contenido.

A) Resuelve lo siguiente:

1. En papel cebolla copia la gráfica de $y=-x^2+28x$ (gráfica 2).

2. Dóblala a lo largo tratando que coincidan las dos mitades de la parábola.

3. Marca el doblez.

4. Traza una recta sobre el doblez.

La recta que has trazado sobre el doblez divide la figura en dos partes en forma tal que una es la imagen de la otra, por lo que se dice que la *parábola tiene simetría reflexiva o axial* (con respecto de un eje). La recta que determina el doblez es el eje de *simetría* de la parábola.

En la parábola que nos ocupa el eje de simetría es vertical, esto es, paralelo al eje *Y*.

– ¿Qué puntos de la parábola coinciden al doblarla por su eje de simetría. En tu respuesta deberán estar, entre otros:

(5, 115)	y	(23, 115)
(7, 147)	y	(21, 147)
(9, 171)	y	(19, 171)

Se dice que éstos son puntos simétricos de la *parábola*.

Gráfica de la relación

– Traza en el plano cartesiano los puntos correspondientes a los datos de la tabla 5 (emplea una hoja de papel milimétrico para conseguir mayor aproximación).

– Compara las ordenadas de los pares de puntos simétricos de la parábola. ¿Cómo son éstas?.

Habrás advertido que dos puntos simétricos de una parábola con eje de simetría paralelo al eje Y tienen la misma ordenada.

Por otra parte, al examinar la copia de la gráfica en el papel cebolla y doblándola por el eje de simetría, se advierte que:

- El eje de simetría pasa por el punto medio de cada uno de los segmentos que unen dos puntos simétricos.

- El vértice de la parábola está sobre el eje de simetría, y dicho vértice se representa por el punto v(h, k), donde h es el valor de la abscisa y k es el valor de la ordenada.

De las aseveraciones 1 y 2, y del hecho de que el eje de simetría de la parábola que estamos estudiando es paralelo al eje Y deducimos que:

El valor de la abscisa del vértice de una parábola con eje de simetría vertical se puede determinar del punto medio del segmento que une a un par cualquiera de puntos simétricos.

¿Adviertes la importancia del último enunciado?

En él se encuentra la clave para obtener la base del rectángulo del área máxima, la cual es precisamente la solución del problema en estudio. Tomemos dos puntos simétricos de la parábola; por ejemplo:

A(5, 115) y A' (23, 115)

El valor de la abscisa x, del punto medio del segmento AA´ es el promedio de las abscisas de sus extremos. Entonces:

$$x = \frac{5+23}{2} = 14$$

– ¿Qué relación tiene este resultado con el vértice de la parábola relativa al problema que deseamos resolver? ¿Cuál es entonces la solución del problema? ¿Cuáles son las coordenadas del vértice (h,k).

¡Eureka! La abscisa del vértice es x= 14, y 14 metros es exactamente la medida de la base que requiere el área máxima del rectángulo que constituye el terreno del huerto.

1. Calcula la altura del rectángulo con una base de 14m. ¿Qué clase de rectángulo es éste?.

El área máxima de l terreno se obtiene sustituyendo x por 14 en $y = -x^2 + 28x$

– Calcula el área máxima del terreno del huerto. ¿Qué relación hay entre el área máxima y las coordenadas del vértice?.

– ¿Deben unirse los dos puntos dibujados?. ¿Por qué?.

– ¿Qué tipo de figura se obtiene?.

Los modelos matemáticos nos permiten hacer predicciones, imitando los efectos de las variaciones de una cantidad sobre otras relacionadas con ella. En el ejemplo siguiente analizaremos las relaciones entre el tiempo y la distancia recorrida por un cuerpo con el fin de predecir su comportamiento en una situación determinada.

B) Resuelve el siguiente problema

1. Un avión que parte del reposo avanza sobre la pista de despegue de un aeropuerto con una trayectoria rectilínea. Durante los primeros 12 segundos, a intervalos de dos segundos, se registra la distancia recorrida obteniéndose la siguiente tabla:

tiempo (segundos)	**desplazamiento (metros)**
0	0
2	15
4	60
6	135
8	240
10	375
12	540

Tabla 5

La pista es la que permite un recorrido máximo de 1 500 metros antes del despegue. ¿En qué tiempo llegará al avión al límite de la pista si continúa desplazándose con el mismo patrón con que siguió los primeros 12 segundos?.

A partir de los datos experimentales trataremos de encontrar un modelo que describa la relación entre el tiempo y el desplazamiento del avión (distancia medida en una dirección determinada). En este problema intervienen dos variables: el tiempo (t) y el desplazamiento (s).

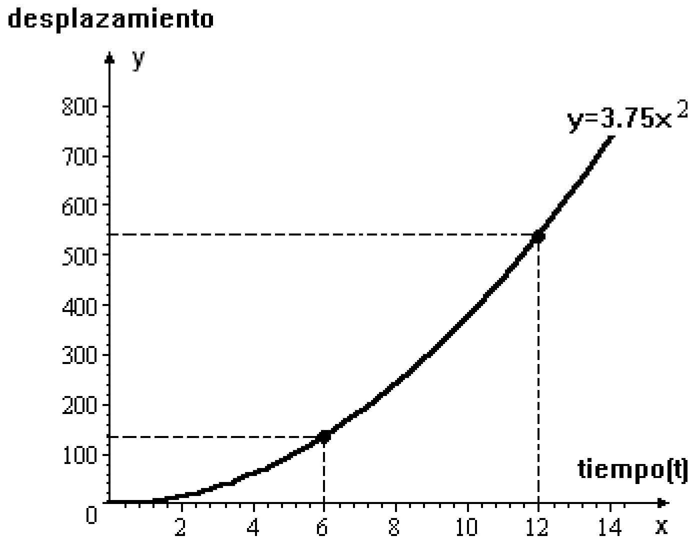
De acuerdo con la definición de función.

¿Cuál de las variables consideras que es la independiente y cuál la dependiente?.

Ya que el desplazamiento de un cuerpo depende del tiempo que dure el movimiento, la variable dependiente es *s* y la independiente es *t*.

En la gráfica 4, correspondiente a la gráfica de la relación entre el tiempo recorrido el desplazamiento, los puntos se unen, ya que no se pasa con brusquedad de, por ejemplo, 2 a 4 segundos, sino que el tiempo va tomando los valores intermedios entre 2 y 4 segundos. La figura que se obtiene es la “mitad” de una parábola.

x	y
6 12	135 540



Gráfica 4

Analicemos la tabla 5 tratando de descubrir un patrón para el comportamiento del desplazamiento al variar el tiempo.

– ¿Qué aprecias a primera vista en la tabla 5?. Se observa que al aumentar el tiempo aumenta la distancia que recorre el avión.

– En este caso, ¿el desplazamiento es directamente proporcional al tiempo?.

Dividiendo algunos valores del desplazamiento entre el tiempo correspondiente (distinto de cero) se encontrará la respuesta a la última pregunta. Si sabemos que $v = \frac{s}{t}$

v=velocidad, s=desplazamiento, t=tiempo

$$v_1 \frac{15}{2} = 7.5\frac{m}{seg} \qquad v_2 \frac{60}{4} = 15\frac{m}{seg} \qquad v_3 \frac{135}{6} = 22.5\frac{m}{seg} \qquad v_4 \frac{240}{8} = 30\frac{m}{seg}$$

Las razones de los diferentes valores de desplazamiento en los tiempos correspondientes no son iguales, por cuanto que la distancia no es directamente proporcional al tiempo. Esto significa que el movimiento del avión no es uniforme, es decir, no viaja con una velocidad constante. Sin embargo, existe cierta regularidad en el comportamiento de las razones que se calcularon.

– Encuentras algún patrón que te permita determinar ¿cuál será el cociente del siguiente par de números de la tabla 4?

Observa que:

$$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\bullet(2)(7.5) \qquad \frac{60}{4}=\frac{1}{2}\bullet(4)(7.5) \qquad \frac{135}{6}=\frac{1}{2}\bullet(6)(7.5)$$

Esto es,

$$\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}}=\frac{1}{2}(t)(7.5),$$

o bien:

$$\frac{s}{t}=\frac{1}{2}(7.5)t$$

Despejando de la igualdad anterior a “s” se obtiene:

$$s=\frac{1}{2}(7.5)t^2 \quad \text{---} \quad (1)$$

La igualdad (1) es un modelo que describe la relación entre la distancia y el tiempo en movimiento del avión del problema en estudio. Es un modelo de función polinomial cuadrática para este problema en particular, y se puede simplificar para obtener:

$$s=3.75t^2$$

Si de esta última igualdad se despeja la constante 3.75 se obtiene:

$$\frac{s}{t^2}=3.75,$$

lo que significa que, en el caso de nuestro problema, el desplazamiento es directamente proporcional al cuadrado del tiempo. La característica anterior es propia de una clase de movimiento: el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este tipo de movimiento la velocidad no se mantiene constante, sino que aumenta de manera uniforme a medida que transcurre el tiempo.

Modelos “listos para usarse” o estandarizados.

Si en un libro de Física buscamos una fórmula que relacione el desplazamiento y el tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, encontraremos:

$$s=Vot+\frac{1}{2}at^2 \qquad (1)$$

donde:
s = desplazamiento
Vo = velocidad inicial
a = aceleración
t = tiempo

La fórmula anterior es un modelo “listo para usarse”, establecido para aplicarse a cualquier situación donde intervenga un movimiento del mismo tipo que el avión del problema.

En el caso que se analiza, la velocidad inicial (Vo) es igual a cero, por lo que la fórmula se reduce a:

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Si en esta fórmula sustituimos la variable “a” por 7.5 coincidirá con la fórmula que obtuvimos a partir del análisis de los datos experimentales. El valor que se atribuye a la variable “a” sale de la operación $\frac{15}{2}$, dividiendo $\frac{\text{deplazamiento}}{\text{tiempo}}$. Dato incorporado de la tabla 5.

3) Comprueba que la fórmula es válida para todos los valores del tiempo anotados en la tabla 5.

– Lee de nuevo el texto del problema que tratamos de resolver. ¿Cuál es el cuestionamiento básico?.

En el enunciado del problema se nos pide encontrar el tiempo en que el avión llegará al límite de la pista: 1 500 m.

– ¿Cómo emplearías la fórmula (1) para encontrar la solución del problema?.

Para encontrar el tiempo que tomaría el avión en llegar al límite de la pista, en la igualdad (1) sustituimos la variable *s* por 1 500.

Así,

$$1500 = \frac{1}{2}7.5t^2$$

o

$$1500 = 3.75t^2$$

La igualdad anterior es una ecuación de segundo grado o cuadrática con una incógnita: Despejar *t* de esta ecuación es muy sencillo.

– Resolver la ecuación $1500 = 3.75t^2$

El proceso para resolver la ecuación anterior es el siguiente:

$$\frac{1500}{3.75} = t^2$$
$$400 = t^2,$$

$\pm\sqrt{400} = t$. Recuerda que estamos despejando el exponente entonces t es un número que elevado al cuadrado es igual a 400.

– ¿Cuál es el número?

Hay dos números que cumplen la condición dada: 20 y -20.

Recuerda:

Si un número real t es tal que $t^2 = x$ (x real no negativo), entonces t es una raíz cuadrada de x. Si t es positivo o cero, entonces es la raíz cuadrada principal de *x* y se denota con $t=\sqrt{x}$; si t es negativo, entonces es la raíz cuadrada negativa de x y se denota con $t = -\sqrt{x}$.

– ¿Es correcto escribir $\sqrt{4 =} \pm 2$?. ¿Por qué?.

La ecuación s= 3.75 t^2 tiene dos soluciones:

$$t_1 = 20 \quad y \quad t_2 = -20$$

Sin embargo, un tiempo igual a -20 no tiene sentido en el problema que estamos resolviendo, porque no hay tiempo negativo, por lo tanto, la solución del problema es: *el tiempo que el avión tardaría en llegar al límite de la pista es igual a 20 segundos.*

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí podemos establecer algunas conclusiones:

- La Construcción del MODELO ALGEBRAICO, está sujeto a las características y/o contexto del problema, por ello se recomienda leer, tantas veces como sea necesario, para establecer las variables e incógnitas del problema.

- En los modelos algebraicos, polinomial y cuadrático, pueden intervenir dos o más variables: “x” y “y”. El valor de “y” depende del valor de x; por tal razón podemos decir que “y” es la variable dependiente y x la variable independiente.

- Para la solución de problemas que conducen a funciones polinomiales cuadráticas, se revisaron los siguientes métodos:

  a) por tabulación
  b) de aproximación sucesiva.
  c) de álgebra y geometría.

  En conjunto, los tres métodos recaen en el modelo gráfico.

- Recuerda que en una parábola:

  La abscisa del vértice con respecto al eje de simetría vertical es igual a la abscisa del punto medio del segmento que une a un par cualquiera de puntos simétricos de la parábola.

1.2 CONCEPTO DE FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA

En las secciones anteriores se resolvieron problemas en los que se relacionan dos conjuntos de números. A cada número de un primer conjunto D se le asocia el único número de un segundo conjunto "I" que satisface las condiciones establecidas por el modelo matemático.

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 28\}$$

En el ejemplo 1 sobre el terreno para un huerto, a cada elemento "x" del conjunto de todas las posibles medidas de la base se le hace corresponder un único número "y" del conjunto $I = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 196\}$ de todos los posibles valores del área.

$$I = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 196\}$$

El criterio para determinar qué elemento de I corresponde a un elemento dado de D lo proporciona la igualdad:

$$y = -x^2 + 28x$$

Cada valor que adopte x en esta igualdad determinará un valor único de y. Una correspondencia como la que se establece en el ejemplo 1 se dice que es una función. A las funciones se les asigna alguna letra para identificarlas y por lo general se usan las letras *f,g,* y *h,* en ciertas ocasiones con subíndices.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN:

El primer conjunto (*D)* se le llama dominio o conjunto de *definición de la función*. Se dice que el segundo conjunto (I) es el rango o la imagen de la función.

Si f es una función, al elemento "y" de su rango, que corresponde a un elemento x de su dominio, se le llama imagen de x bajo la *función f* o *valor de f en x* y se denota con y=f(x).

El criterio para determinar la imagen f(x) de cualquier elemento de x de D es la regla de correspondencia de la función. Por ejemplo, en la función f, surgida del problema del terreno para el huerto, la imagen de 3 es 75, esto es

En $f(x)=-x^2+28x$ si $x=3$

se tendra

$$f(3)=-(3)^2+28(3)=75$$

De lo anterior se desprende que para definir una función se debe proporcionar su dominio y su regla de correspondencia. El rango puede determinarse a partir del dominio y la regla.

> En las *funciones numéricas* de una variable real, en donde tanto el dominio como el codominio son conjuntos de números reales, únicamente suele indicarse la regla de correspondencia. En tal caso el dominio se considera como el conjunto de todos los números reales para los cuales exista una imagen según la regla dada.

– Determina el dominio, la regla de correspondencia y el rango de:

a) La función que se establece en el problema del ejemplo 2: un avión en la pista de despegue.

$$f(t)=3.75t^2$$

b) La función que se origina en el inicio del capítulo (el problema del gimnasio Zeus).

$$f(x)=-5x^2+150x9000$$

Las reglas de correspondencia de las funciones de los problemas del inicio del capitulo 1, y de los ejemplo 1 y 2 son respectivamente:

a) $y=-5x^2+150x+9000$ b) $y=-x^2+28x$ c) $y=3.75t^2$

Estas igualdades tienen dos variables. La dependiente está despejada en el primer miembro de cada igualdad. El segundo miembro es, en todos los casos, un polinomio de segundo grado o cuadrático en la variable independiente.

En resumen, todas las igualdades tienen la forma:

$$y=ax^2+bx+c, \text{ donde } a\neq 0$$

Porque de lo contrario éste término cuadrático se anularía y dejaría de ser una función cuadrática.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

Completa el siguiente cuadro anotando los coeficientes *a, b, y c* de cada una de las siguientes funciones polinomiales cuadráticas.

POLINOMIO	***a***	***b***	***c***
$y = -5x^2 + 150x + 9000$			
$y = -x^2 + 28x$			
$y = 3.75t^2$			

Las relaciones que se han presentado en este fascículo son funciones polinomiales cuadráticas.

Funciones polinomiales cuadráticas

> Las funciones cuya regla de correspondencia es una igualdad de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde *a, b y c* son números reales, $a \neq 0$, son llamadas funciones polinomiales cuadráticas o simplemente funciones cuadráticas completas.

Pueden ser incompletas:

a) $f(x) = ax^2$

b) $f(x) = ax^2 + bx$

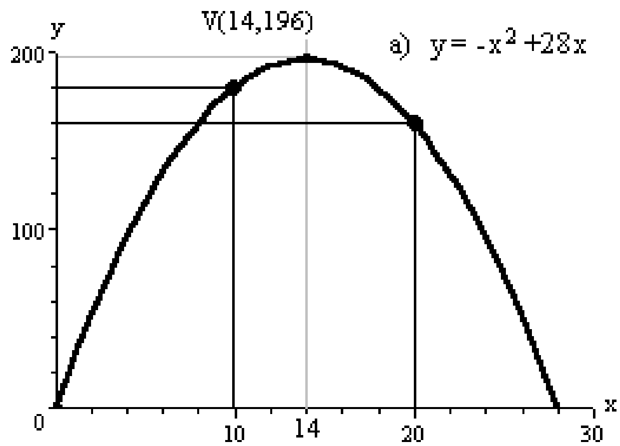
c) $f(x) = ax^2 + c$

1.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES CUADRÁTICAS

Durante el estudio de los problemas planteados en este trabajo se elaboraron las gráficas de las funciones cuadráticas definidas por: a) $y = -x^2 + 28x$ (figura 5) y b) $y = 3.75x^2$ (figura 6). En ambos casos se obtuvieron parábolas con eje de simetría vertical (paralelo al eje Y).

x	y
10	180
20	160
28	0

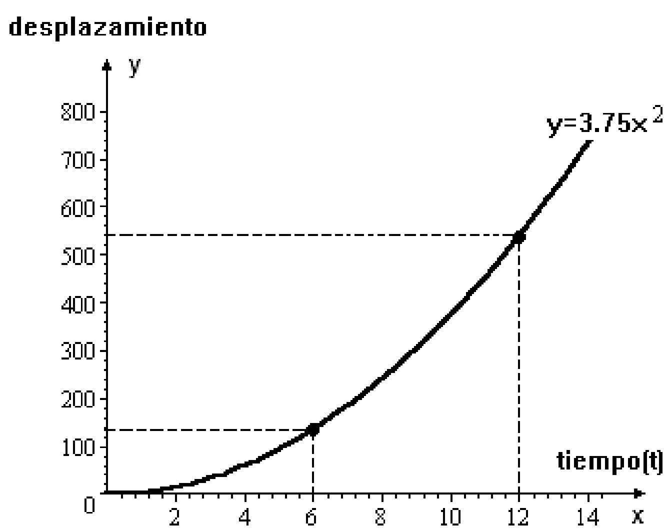
Tabla 6



Gráfica 5

x	y
6	135
12	540

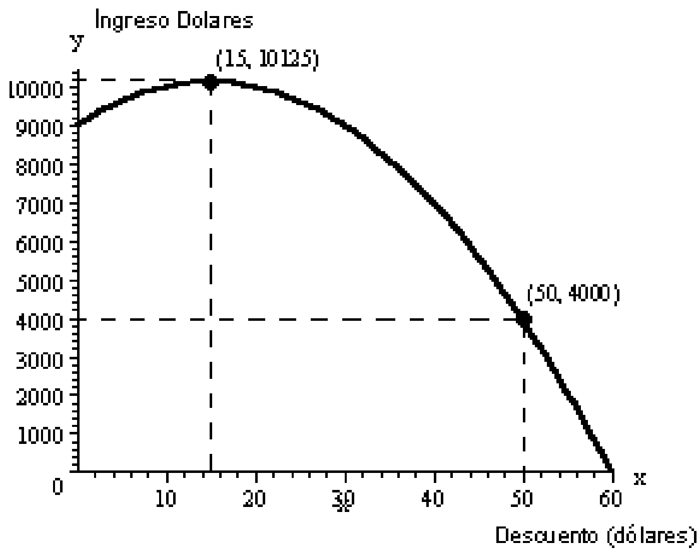
Tabla 7



Gráfica 6

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Esboza la gráfica de la función cuadrática definida por $y = -5x^2 + 150x + 9000$ (problema del inicio del capítulo), completando previamente la siguiente tabla:



Gráfica 7

x	y
0	
10	10 000
20	
30	
40	
50	4 000
60	0

Tabla 8

Los puntos del esbozo de la gráfica de la función definida por $y = -5x^2 + 150x + 9000$ no se unen, ya que x toma únicamente valores enteros (no se admite que la cuota disminuya fracciones de dólar). La gráfica consta de un número finito de puntos, aunque no son todos los que se han dibujado.

Las funciones como ésta, cuya gráfica es un conjunto de puntos aislados , se les llama <u>funciones discretas</u>. De cualquier manera, los puntos de la gráfica de la función del problema del Gimnasio Zeus están dispuestos sobre una parábola con eje vertical y esto no es casual.

> Las gráficas de todas las funciones cuadráticas son parábolas. El eje de simetría de las parábolas involucradas en las gráficas de las funciones cuadráticas es paralelo al eje Y.

Las propiedades de las parábolas se han aprovechado en múltiples aplicaciones. Seguramente conoces las antenas parabólicas para captar señales de televisión procedentes de satélites artificiales.

1.3.1 VÉRTICE DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En diversas situaciones, como en los problemas del Gimnasio Zeus y del terreno para el huerto, se necesita conocer el valor máximo o mínimo de una función cuadrática. Hemos observado que este valor es precisamente la ordenada, "y" del vértice de la parábola que constituye la gráfica de la función. Debido a lo anterior, es necesario encontrar procedimientos para obtener con exactitud las coordenadas del vértice de las parábolas con eje vertical.

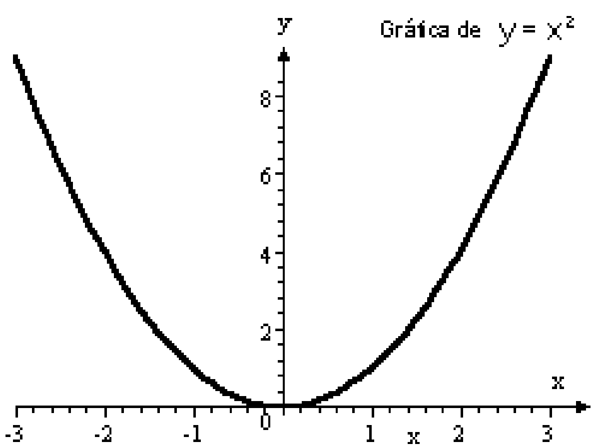
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Al realizar la siguiente actividad obtendremos interesantes resultados.

– Traza las gráficas de las funciones cuyas reglas de correspondencia se dan a continuación, considerando como su dominio de definición el conjunto ℝ de los números reales.

a) $y = x^2$
b) $y = x^2 + 2$
c) $y = x^2 - 3$
d) $y = (x+3)^2$
e) $y = (x-2)^2$
f) $y = 3x^2$
g) $y = \frac{1}{3}x^2$
h) $y = -x^2$
y) $y = -x^2 + 2$
j) $y = (x+3)^2 + 2$

Comparemos las gráficas de las funciones de los incisos b hasta j con la gráfica de $y = x^2$ (inciso a).



Gráfica 8

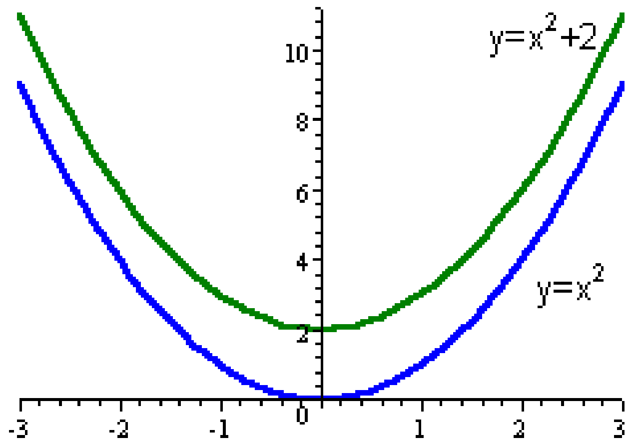
x	$y = x^2$	y
-3	$(-3)^2 =$	9
-2	$(-2)^2 =$	4
-1	$(-1)^2 =$	1
0	$(0)^2 =$	0
1	$(1)^2 =$	1
2	$(2)^2 =$	4
3	$(3)^2 =$	9

Tabla 9

La gráfica de $y = x^2$ es una parábola con las siguientes características:

a) Cóncava hacia arriba.
b) Eje de simetría: el eje Y.
c) Vértice en el origen.

Ahora observemos la gráfica del inciso b que es: Gráfica de $y = x^2 + 2$.



Gráfica 9

Esta gráfica es igual a la de $y = x^2$, pero traslada 2 unidades hacia arriba.

a) Su eje de simetría coincide con el eje Y.
b) Es cóncava hacia arriba.
c) Su vértice es el punto *V* (0, 2).

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios:

A) Traza la gráfica de $y = x^2 - 3$, anota sus características y compáralas con la de
$y = x^2$.

Generalización

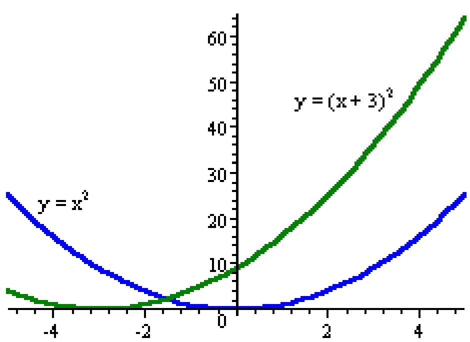
> La gráfica de la función definida por $y = x^2 + c$ es una parábola igual a la gráfica de $y = x^2$, pero una translación vertical *c* unidades hacia arriba, si *c* > 0 y c unidades hacia abajo, si c < 0.

– Aplicando los resultados del párrafo anterior determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las parábolas determinadas por:

a) $y = x^2 + 6$ b) $y = x^2 - 1/3$

Intenta resolver este ejercicio sin dibujar las gráficas.

Gráfica de $y = (x + 3)^2$



Gráfica 10

Esta gráfica ha resultado igual a la de $y = x^2$, pero trasladada 3 unidades a la izquierda.

– Es cóncava hacia arriba.

– Su eje de simetría es la recta paralela al eje “Y” tal que todos sus puntos tienen abscisa x=-3.

Ningún punto fuera de esa recta tiene abscisa igual a -3. Por lo anterior se dice que la ecuación del eje de simetría es x=-3.

– El vértice de la parábola esta en (-3, 0).

B) Traza la gráfica de $y = (x - 2)^2$. Compárala con la de $y = x^2$ y determina su concavidad, la ecuación de su eje de simetría y las coordenadas de su vértice.

Generalización

> Del análisis de las dos últimas gráficas se concluye que la gráfica de la función definida por $y = (x + k)^2$ es igual a la de $y = x^2$, pero trasladada k unidades a la izquierda, si k es positivo; y k unidades a la derecha, si k es negativo. Entonces la parábola tiene las siguientes características:

a) Es cóncava hacia arriba.
b) Su eje de simetría tienen por ecuación x=-k.
c) Su vértice es el punto V(-k,0).

Sin trazar las gráficas, determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las parábolas siguientes: a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = (x - 5)^2$.

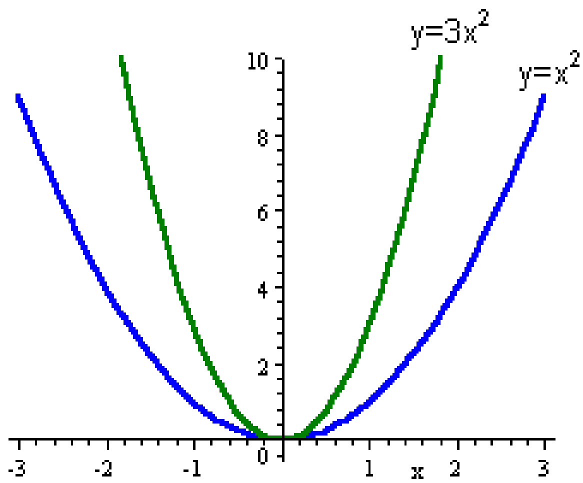
Compara las tablas 9 y 10. ¿Qué adviertes en relación con los valores de y?.

x	**$y = 3x^2 = y$**
-3	$3\ (-3)^2 = 27$
-2	$3\ (-2)^2 = 12$
-1	$3\ (-1)^2 = 3$
0	$3\ (-0)^2 = 0$
1	$3\ (-1)^2 = 3$
2	$3\ (-2)^2 = 12$
3	$3\ (-3)^2 = 27$

Tabla 10

$y = 3x^2$

Cada valor de “y” en la tabla 9 está multiplicado por 3 en la tabla 10. Esto produce un alargamiento o expansión de la gráfica de $y = x^2$. La concavidad, el eje de simetría y el vértice no se alteran.



Gráfica 11

– Ahora traza la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^2$. Analízala y compárala con la de $y = x^2$.

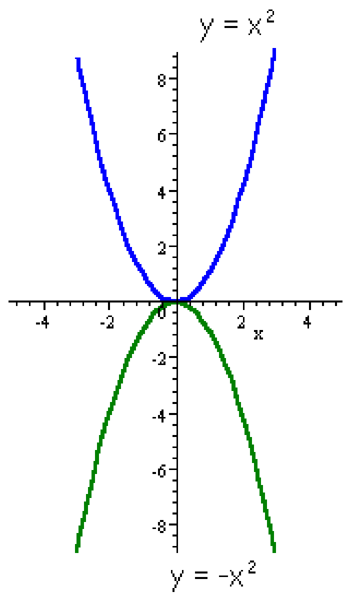
Generalización

Del análisis de las dos últimas gráficas se desprende que la gráfica de $y = ax^2$ es la de $y = x^2$ expandida por el factor "a" si a<1 y contraída por el factor "a", si 0<a<1. La concavidad, el eje de simetría y las coordenadas del vértice no se alteran.

C) Determina la concavidad, la ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice de las gráficas.

a) $y = 5x^2$ b) $y = \frac{2}{3}x^2$

De las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$, nos damos cuenta que únicamente difieren en el signo; por lo cual su concavidad es distinta como se observa en la figura. 12 de las gráficas se concluye que el eje de simetría y el vértice no cambian de posición, pero la concavidad sí; ahora es hacia abajo.



Gráfica 12

D) Elabora la gráfica de $y = -x^2 + 2$. Analiza sus propiedades, en especial la concavidad. ¿Qué relación encuentras entre el signo del coeficiente de x^2 y la concavidad de las parábolas que se han trazado?.

Generalización

> El signo del coeficiente de x^2 en la función $y = ax^2 + bx + c$ determina la concavidad de su gráfica. Si *a* es positivo, la concavidad es hacia arriba, y si a es negativo, entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

Durante el desarrollo de esta sección hemos estudiado varios casos particulares de gráficas de funciones cuadráticas y hemos llegado a formular generalizaciones que son meras conjeturas. La veracidad de estas generalizaciones se demostrará en cursos posteriores, ya que ahora no contamos con la herramienta matemática suficiente para hacerlo.

De acuerdo con los resultados que hemos obtenido es posible determinar ciertas características de las funciones cuadráticas a partir del análisis de su regla de correspondencia.

Ejemplo:

Obtener

a) Las coordenadas del vértice.

b) La ecuación del eje de simetría y determinar la concavidad de la parábola dada por:

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

Solución

La gráfica de $y = (x - 3)^2 - 1$ es igual a la de $y = x^2$ trasladada 3 unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo.

a) El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = x^2$ es el punto V (0, 0). Como a cada uno de sus puntos, al vértice se le han aplicado los movimientos descritos, de manera que el vértice de la parábola representada por $y = (x - 3)^2 - 1$ es *V* (3,-1).

b) Todos los puntos del eje de la parábola tienen su abscisa igual a la del vértice, entonces la ecuación del eje de simetría es x=3.

c) La concavidad de la parábola depende del signo del coeficiente de x^2. Dado que en este caso es positivo, la concavidad es hacia arriba.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios, considerando la información anterior.

Ejemplo 1

– Determina las coordenadas del vértice, la ecuación del eje de simetría y la concavidad de la gráfica de las funciones dadas por:

1) $f_1(x) = (x - 4)^2 + 5$ 2) $f_2(x) = -2(x + 5)^2 - 3$

Comprueba tus respuestas trazando las gráficas de estas funciones. De los incisos anteriores se concluye que:

La gráfica de la función $f(x) = a(x+h)^2 + k$ en donde a, h y k son números reales cualesquiera, $a \neq 0$ es una parábola con eje de simetría paralelo al eje Y, con vértice en el punto V= (-h, k) y cuyo eje de simetría tiene la ecuación x=-h.

El problema que ahora se nos presenta es ¿cómo obtener las coordenadas del vértice de la gráfica de una función cuadrática definida por una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$?.

Ejemplo 2

Determinar las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es:

$$y = 2x^2 + 4x + 3$$

Si encontramos una ecuación equivalente a $y = 2x^2 + 4x + 3$, pero que tenga la forma $y = a(x+h)^2 + k$ entonces el vértice será el punto V(-h,k).

Tratemos de darle a $y = 2x^2 + 4x + 3$ la forma indicada. Separemos del segundo miembro de la ecuación al binomio $2x^2 + 4x$.

Factorizando el binomio (caso del factor común) obtenemos:

$$2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x)$$

Si agregamos al binomio que está dentro del paréntesis $(x^2 + 2x)$ el término adecuado, lo transformaremos en un *trinomio cuadrado perfecto*.

¿Cuál es el término que tenemos necesitamos agregar?.

El término 1^2, esto es, el coeficiente de x dividido entre 2 y elevado al cuadrado, completa el trinomio cuadrado perfecto. Entonces:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

así que

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

y regresando a la expresión original

$$2(x^2 + 2x) = 2\left[(x+1)^2 - 1\right]$$

$$2(x^2 + 2x) = 2(x+1)^2 - 2$$

Entonces

$$2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2$$

Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación de la parábola:

$$y = 2x^2 + 4x + 3$$

obtenemos

$$y = 2(x+1)^2 - 2 + 3$$

$$y = 2(x+1)^2 + 1$$

La ecuación anterior tiene la forma deseada y, por lo tanto, las coordenadas del vértice son: x=-1; y=1.

– Traza la gráfica de la función $y = 2x^2 + 4x + 3$ para comprobar que las coordenadas del vértice son: x=-1, y=1.

Apliquemos el proceso anterior a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b, y c son números reales cualesquiera, $a \neq 0$.

Factorizando el binomio $ax^2 + bx$ obtenemos:

$$ax^2 + bx = a(x^2 + \frac{b}{a}x)$$

Agregamos al binomio $x^2 + \frac{b}{a}x$ la mitad de $\frac{b}{a}$ que es $\frac{b}{2a}$ y se leva al cuadrado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2$$

Factorizando el trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (x + \frac{b}{2a})^2$$

Entonces:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

Sustituyendo este resultado en $a(x^2 + \frac{b}{a}x)$ obtenemos:

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Entonces:

$$ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Sustituyendo este resultado en $y = ax^2 + bx + c$ obtenemos:

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c,$$

Pero: $$-\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a};$$

Luego: $$Y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (\frac{4ac - b^2}{4a})$$

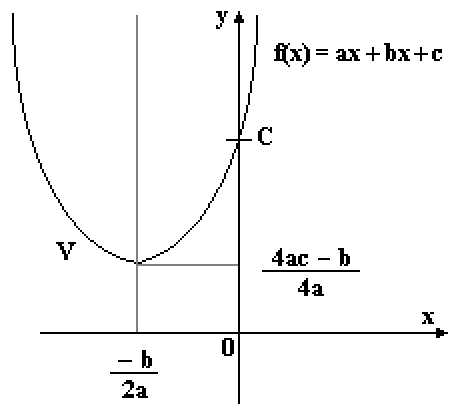
Por lo tanto

Las coordenadas del vértice son:

$$x = -\frac{b}{2a}; y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

1.3.2 VALOR EXTREMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

El valor extremo absoluto de una función cuadrática con dominio igual a ℝ es su valor máximo o mínimo, según el caso. Con anterioridad se ha visto que la ordenada del vértice de la gráfica de una función cuadrática es el valor máximo o mínimo de una función, por ello los resultados de esta sección nos permiten hallar el valor extremo de la función.



Gráfica 13

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza la siguiente actividad considerando lo anterior:

A) Calcula el valor máximo de la función, con dominio ℝ dada por:

$$y = -5x^2 + 150x + 9000$$

A partir de este resultado, resuelve el problema del inicio del capítulo.

Solución. La reducción en la tarifa para lo cual se obtiene el máximo ingreso es de 15 dólares. El ingreso máximo es de 10125 dólares.

1.3.3 INTERSECCIONES DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON LOS EJES COORDENADOS

Ejemplo

Desde un minisubmarino en la superficie del mar se dispara un proyectil dirigido a un barco cuyo punto más cercano se encuentra a 13 m de distancia del punto de partida del proyectil, el cual está al ras del agua y la trayectoria que sigue el proyectil en el aire está dada por la función:

$$y = -x^2 + 12x - 20$$

1. ¿El proyectil alcanza al barco?.

2. Si no es así, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento el proyectil entra al agua?.

Para resolver este problema emplearemos los conocimientos adquiridos en este fascículo.

- ¿Cuál es el modelo matemático para la trayectoria del proyectil?.

El modelo matemático para la trayectoria que sigue el proyectil está dado en el problema:

$$y = -x^2 + 12x - 20$$

La igualdad anterior determina la altura "y" a la que el proyectil está sobre la superficie del agua, cuando su distancia al eje de las ordenadas (Y) es x; por ejemplo, cuando el proyectil se encuentra a una distancia horizontal de 5 m, su altura es de:

$$\begin{aligned} y &= -(5)^2 + 12(5) - 20 \\ y &= -25 + 60 - 20 \\ y &= 15\text{m} \end{aligned}$$

Examinado el modelo dado en el enunciado del problema podemos obtener mucha información acerca de la trayectoria del proyectil.

– ¿Qué clase de función determina la igualdad $y = -x^2 + 12x - 20$?

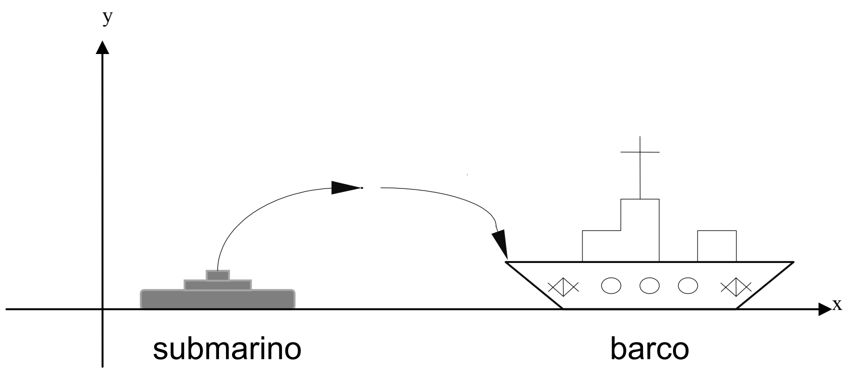
– ¿Al graficarla qué figura se obtiene?.

– La igualdad $y = -x^2 + 12x - 20$ determina una función cuadrática, ya que tiene la forma $y = ax^2 + bx + c$. La gráfica de esta función, como la de toda función cuadrática, es una parábola con eje de simetría vertical.

¿Cómo es la concavidad de la parábola?.

Para analizar problemas que surgen en situaciones como ésta, podemos sustituir el escenario real de los hechos por un bosquejo sobre su papel.

B) Traza un bosquejo en donde aparezcan las posiciones relativas del submarino, el barco y la trayectoria del proyectil.



Gráfica 14. Bosquejo de la situación que describe el problema.

Observa el bosquejo, ¿cuál es la altura del proyectil en el momento en que hace contacto con el agua?; en otras palabras, ¿cuánto vale y cuándo toca el agua el proyectil?.

En el momento en que el proyectil toca el agua y = 0.

La intersección de la gráfica de una función con el eje X es el conjunto de los puntos de la gráfica en donde y = 0.

- ¿A qué distancia se encuentra el proyectil del origen del plano cartesiano al hacer contacto con el agua?.

La respuesta a la pregunta anterior está dada por el valor de “x” cuando “y” es igual a 0 en la igualdad:

$$y = -x^2 + 12x - 20$$

Si hacemos Y = 0 en la igualdad anterior, obtenemos la ecuación de segundo grado con una incógnita:

$$0 = -x^2 + 12x - 20$$

Por la propiedad de simetría de la igualdad:

$$-x^2 + 12x - 20 = 0$$

Ésta es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a=-1.

¿Cuánto valen los coeficientes *b* y *c*?.

Como todos los coeficientes son diferentes de cero, se dice que la ecuación es completa, de manera que para resolverla podemos emplear diferentes métodos.

Resolución por factorización

En el curso de Matemáticas I estudiaste varios casos de factorización de expresiones algebraicas; aplica esos conocimientos para factorizar el trinomio $-x^2+12x-20$.

El primer miembro de la ecuación:

$$-x^2+12x-20=0$$

es el trinomio:

$$-x^2+12x-20.$$

Factoricémoslo:

$$-x^2+12x-20=-1\,(x^2-12x+20)$$

$$-x^2+12x-20=-1\,(x-2)(x-10)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1) obtenemos:

$$-1\,(x-2)(x-10)=0$$

Multiplicando por -1 los dos miembros de la ecuación se obtiene:

$$(x-2)\,(x-10) = 0$$

En secciones anteriores llegamos a la conclusión de que si el producto de dos números reales cualesquiera, *a* y *b*, es igual a cero, entonces *a,* o bien *b*, tiene que ser cero.

Aplicando esta propiedad a (x-2) (x-10) = 0, se deduce que:

$$x-2 = 0, \text{ o bien, } x-10 = 0.$$

Si x-2 = 0, entonces x=2; y si x-10 = 0, entonces x = 10.

La ecuación $-x^2+12x-20$ queda resuelta y tiene dos soluciones o raíces: x=2 y x= 10.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Elabora lo siguiente:

A) Comprueba sustituyendo en $-x^2+12x-20=0$ primero a x por dos y después por 10, pues ambos valores son soluciones o raíces de la ecuación.

– ¿Qué significado tienen las dos soluciones de la ecuación para el problema del submarino?.

El proyectil partió del punto (2,0) y entró en el agua en el punto (10,0).

– ¿Cuál es la distancia entre el punto de partida del proyectil y el punto donde éste entra al agua?. ¿El proyectil alcanza o no al barco?. ¿Por qué?.

Ceros de una función

Para resolver problemas que, como el anterior, conducen a funciones cuadráticas, es decir, a funciones cuya regla de correspondencia es la forma $f(x)=ax^2+bx+c$, con frecuencia es necesario encontrar el valor de x (la abscisa) de los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x. Estos valores de x se llaman *ceros o raices de la función* y son soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, por que en esos puntos f(x) = 0.

En el problema que acabamos de resolver ¿cuáles son los ceros de la función
$f(x)=-x^2+12x-20$
$-x+12x-20=0$

Intersección con el eje Y

La intersección de la gráfica de una función con el eje Y es el conjunto de los puntos de la gráfica en donde x= 0.

B) Encuentra la intersección de la gráfica de $f(x)=-x^2+12x-20$ con eje Y. Traza la gráfica f, señalando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Durante el desarrollo de este fascículo ha sido necesario resolver varias ecuaciones cuadráticas con una incógnita, y se ha tenido que consultar otros temas y/o conceptos de otras áreas ya que a veces la magnitud o grado de dificultad que presentan los problemas así lo requieren, para esto se ha apoyado en modelos “listos para usarse o estandarizados”.

- La fórmula que relaciona al desplazamiento y el tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme acelerado:

S = desplazamiento
Vo = velocidad inicial
a = aceleración
t = tiempo

$$S = Vot + \frac{1}{2}at^2$$

- Recuerda:

Si un número real “t” es tal que $t^2 = x$ (x real no negativo), entonces t es una raíz cuadrada de x. Si t es positivo o cero, entonces es la raíz cuadrada principal de “x” y se denota con $t = \sqrt{x}$; si t es negativo, entonces es la raíz cuadrada negativa de x y se denota con $T = -\sqrt{X}$.

- A las funciones se les asigna alguna letra para identificarlas y por lo general se usan las letras, f, g y h, en ciertas ocasiones con subíndices.

- El primer conjunto (D) se llama dominio o conjunto de definición. Se dice que el segundo conjunto (Y) es el rango o la imagen de la función.

- Si f es una función, al elemento y de su rango, que corresponde a un elemento x de su dominio, se le llama imagen de x bajo la función f en x y se denota con y= f(x).

En las funciones numéricas de una variable real, en donde tanto el dominio como el codominio son conjuntos de números reales, únicamente suele indicarse la regla de correspondencia. En tal caso el dominio se considera como el conjunto de todos los números reales para los cuales exista una imagen según la regla dador.

- Las funciones cuya regla de correspondencia es una igualdad de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ son llamadas funciones polinomiales cuadráticas o simplemente funciones cuadráticas.

- Recuerda que las gráficas de todas las funciones cuadráticas son parabólicas, el eje de simetría de las parábolas involucradas en las gráficas de las funciones cuadráticas es paralelo al eje Y.

- Recuerda que el signo del coeficiente de x^2 en la función $y = ax^2 + bx + c$ determina la concavidad de su gráfica. Si a es positivo, la concavidad es hacia arriba, y si a es negativo, entonces la parábola es cóncava hacia abajo.

1.4 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SU RELACIÓN CON LA FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA

Durante el desarrollo de este fascículo ha sido necesario resolver varias ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Para encontrar el tiempo que un avión, que partió del reposo y se desplaza con movimiento uniforme acelerado, tarda en recorrer 1 500 m, resolvimos la ecuación:

$$3.75t^2 = 1500$$

Nota: Consulta en un libro de Física que la ecuación que se obtiene es la misma que se aplica para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

También se resolvió la ecuación para el problema del submarino y de acuerdo con ésto, nos dimos cuenta que la solución de una ecuación cuadrática son los ceros de la función polinomial cuadrática.

1.5 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS

En este tipo de ecuaciones el coeficiente del término (b) de primer grado es igual a cero, mientras que a y c son diferentes de cero.

La ecuación (1) $3.75t^2 = 1500$ puede adoptar esta forma. En ecuaciones como ésta, la incógnita se despeja con facilidad.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza la siguiente actividad.

1. Revisa el proceso que se siguió para resolver la ecuación del problema en el ejemplo.

2. Resuelve las ecuaciones que a continuación se anotan, siguiendo el mismo procedimiento.

a) $12x^2 - 1452 = 0$

b) $15x^2 = 735$

¿Cuántas soluciones encontraste para cada una de las ecuaciones?.

¿Cuáles son los ceros de las funciones f, $(x) = 12x^2 - 1452$ y $f_2(x) = 15x^2 - 735$ en otras palabras, ¿cuáles son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas con eje x?.

3. Comprueba tus resultados en las gráficas de las funciones f_1 y f_2.
4. Resuelve la ecuación $4x^2 + 36 = 0$. ¿Cuántas soluciones encontraste?.

5. Traza la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 + 36$. ¿Cuáles son los ceros de la función?.

6. Redacta tus conclusiones sobre los resultados de las actividades 4 y 5.

La solución de una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$, donde $a \neq 0$, se obtiene mediante el siguiente procedimiento:

$$ax^2 + c = 0,$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

¿Qué signo tiene el número x^2?. ¿Puede ser $x^2 = -4$?.

La ecuación $ax^2 + c = 0$ tiene dos soluciones o raíces, ya que para todo número real x hay dos números reales x_1 y x_2 que, elevados al cuadrado, son iguales a x^2.

1.5.1 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES INCOMPLETAS DE LA FORMA $ax^2+bx=0$

En el proceso de resolución de un problema que conduce a una función cuadrática podemos encontrarnos con ecuaciones cuadráticas.

Por ejemplo:

Si en el problema del inicio de capítulo que habla sobre el Gimnasio Zeus, se desea saber ¿para qué descuento en la cuota se obtiene el mismo ingreso que cuando no se rebaja ésta?, puede realizarse el procedimiento que sigue.

Cuando la cuota no disminuye, se obtiene un ingreso de 9 000 dólares; así que en $y = -5x^2 + 150x + 9000$ hacemos y= 9 000, con lo que obtenemos la ecuación cuadrática con una incógnita:

$$9000 = -5x^2 + 150x + 9000$$

Resolvamos esta ecuación:

Sumando -9 000 a ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$0 = -5x^2 + 150x$$

Por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$-5x^2 + 150x = 0$$

Factorizando el primer miembro de la ecuación (caso del factor común) obtenemos:

$$5x(-x+30)= 0$$

Reflexiona:

¿Para qué valores de los factores “a” y “b” es verdadera la igualdad a (b) = 0?.

Para que el producto de 5x y-x+30 sea igual a cero, es necesario que 5x=0 ó -x+30=0.

Resuelve la ecuación 5x=0 y obtendrás x=0 y al resolver la ecuación -x+30=0, encontrarás x=30; entonces, la ecuación tiene dos soluciones: x_1=0 y x_2=30.

¿Cómo interpretas este resultado en el problema que estamos estudiando?.

Para un descuento de 30 dólares se obtiene el mismo ingreso que si no se hace descuento alguno. Analicemos el procedimiento que se usó para resolver la ecuación $-5x^2 + 150x = 0$.

La ecuación anterior tiene la forma $ax^2 + bx = 0$. Las ecuaciones de este tipo se resuelven, como en el caso de la ecuación del problema, factorizando a su primer miembro:

$$x(ax + b) = 0$$

La igualdad anterior implica que:

$$x= 0 \text{ ó } ax+b=0$$

Si ax+b = 0, entonces $x = -\frac{b}{a}$.

Si x= 0, entonces tenemos otra solución de la ecuación; ésta es precisamente x= 0.

Resumiendo:

Cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$ tiene dos soluciones:

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

No se recomienda memorizar las fórmulas anteriores es más conveniente seguir el proceso que emplea la factorización.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas:

a) $9x^2 - 72x = 0$

b) $5x^2 = 65x$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Para reafirmar lo aprendido de este tema de “Resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + bx = 0$.

– Recuerda:

– Para la ecuación que tiene la fórmula $ax^2 + bx = 0$, se resuelve mediante el procedimiento por la factorización de factor común.

– Cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$, tiene dos soluciones:

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Nota: No se recomienda que memorices las fórmulas que aparecen en este tema, es más conveniente seguir el proceso de factorización.

1.6 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS $ax^2+bx+c=0$

En este apartado estudiarás los métodos posibles para resolver las Ecuaciones Cuadráticas Completas, como son: Método por Factorización, Método de completar un Trinomio Cuadrado Perfecto, Fórmula General para resolver Ecuaciones Cuadráticas, Solución Gráfica de Ecuaciones Cuadráticas y Ajuste de Curvas.

1.6.1 MÉTODO POR FACTORIZACIÓN

Una ecuación cuadrática completa tiene la forma $ax^2 + bx = 0$ con a, b y c distintos de cero. Un ejemplo de este tipo de ecuación es la que se resolvió en el problema del submarino: $-x^2 + 12x - 20$.

Localiza en este fascículo la resolución de la ecuación $-x^2 + 12x - 20$ y revísala cuidadosamente.

Las ecuaciones completas pueden resolverse, como la del ejemplo el submarino, por factorización; por ello es necesario conocer los diferentes casos de factorización de un trinomio de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En el fascículo 2 de Matemáticas I repasa los procedimientos para factorizar trinomios de segundo grado. Resuelve por factorización, como en el ejemplo del submarino, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$ b) $4x^2 - 2x - 12 = 0$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de factorización.

a) $x^2 -2x -3 = 0$

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$

1.6.2 MÉTODO DE COMPLETAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Cuando no es posible resolver una ecuación cuadrática completa por factorización puede emplearse el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. A continuación resolveremos en forme simultánea las ecuaciones $5x^2 - 6x - 2 = 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$ por el método de "completar cuadrados".

$$5x^2 - 6x - 2 = 0 \qquad\qquad ax^2 + bx + c = 0$$

$$5x^2 - 6x = 2 \qquad\qquad ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{2}{5} \qquad\qquad x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 - \frac{6}{5} + (\frac{3}{5})^2 = \frac{2}{5} + (\frac{3}{5})^2 \qquad\qquad x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$(x - \frac{3}{5})^2 = \frac{2}{5} + \frac{9}{25} \qquad\qquad (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(x - \frac{3}{5})^2 = \frac{19}{25} \qquad\qquad (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Como $\frac{19}{25} > 0$ si $b^2 - 4ac \geq 0$

$$x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} \qquad\qquad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x' = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \qquad\qquad x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' = \frac{3 + \sqrt{19}}{5} \qquad\qquad x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5} \qquad\qquad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 4ac}}{2a}$$ donde:

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve las siguientes ecuaciones por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 - 16x + 63 = 0$

b) $x^2 - 2x - 15 = 0$

La resolución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto da origen al siguiente...

1.6.3 FÓRMULA GENERAL PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo de la fórmula general.
RESOLVER

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \boxed{1}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve las siguientes ecuaciones, aplicando la fórmula general.

a) $-3x^2 + 7x + 6$

b) $49x^2 - 70x + 25$

1.6.3.1 El Discriminante de Una Ecuación Cuadrática

Una ecuación cuadrática puede no tener soluciones reales. La interpretación gráfica de las soluciones de este tipo de ecuaciones es útil para entender esta solución.

Grafiquemos las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = x^2 + 2x - 15$ b) $f_2(x) = x^2 + 2x + 15$ c) $f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$

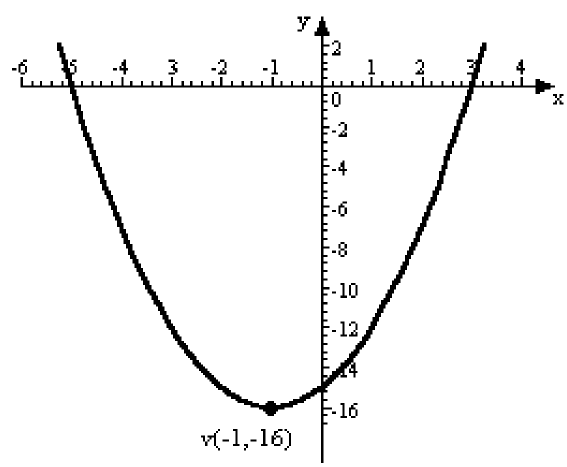
a = 1 b = 2 c = -15

$$V\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{2}{2(1)},\ \frac{-60 - 4}{4}\right) = (-1,\ -16)$$

a) $f_1(x) = x^2 + 2x - 15$

x	$(6)^2+2(-6)-15$	y
-6		9
-5		0
-4		-7
-3		-12
-2		-15
-1		-16
0		-15
1		-12
2		-7
3		0
4		9

Tabla 11

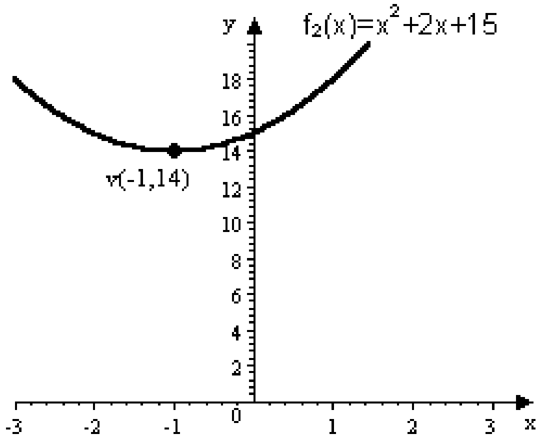


Gráfica 15

b) $f_2(x) = x^2 + 2x + 15$

x	y
-3	**18**
-2	**15**
-1	**14**
0	**15**
1	**18**
2	**23**

Tabla 12

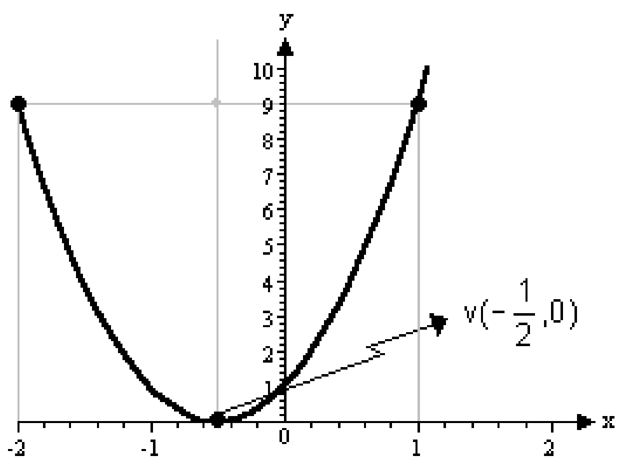


Gráfica 16

c) $f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$

x	$4x^2 + 4x + 1$	y
-2	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**9**
-3/2	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**4**
-1	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**1**
-1/2	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**0**
0	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**1**
1/2	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**4**
1	$4(-2)^1+4(-2)+1$	**9**

Tabla 13



Gráfica 17

La solución de las ecuaciones $x^2 + 2x - 15 = 0$, $x^2 - 2x + 15 = 0$ y $4x^2 + 4x + 1 = 0$ son las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones de lo incisos a, b y c, respectivamente, con el eje x.

Basándote sólo en la lectura de la gráfica determina cuántas y cuáles son las soluciones de cada una de las ecuaciones de los incisos a, b y c.

En la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas interviene el radicando b^2 -4ac.

Si $b^2 - 4ac$ es un número negativo, entonces no tiene raíces cuadradas reales; si $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces tiene dos raíces cuadradas, y si $b^2 - 4ac$ es cero, entonces tiene una raíz cuadrada real.

De esta manera, la solución de una ecuación cuadrática depende del valor de la expresión b^2-4ac, la cual recibe el nombre de discriminante. Si se calcula el discriminante de una ecuación antes de intentar resolverla puede evitarse un trabajo infructuoso.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Calcula el discriminante de las ecuaciones de los incisos a, b y c y úsalo para determinar el tipo de soluciones que tienen éstas. Compara tus conclusiones con las soluciones gráficas que previamente obtuviste.

1.6.4 SOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

En la sección anterior se resolvieron de manera algebraica varias ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ahora estudiaremos otra manera de resolver en forma gráfica ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 1

Resolver gráficamente la ecuación $x^2 + 2x = 15$.

Método de solución

a) Representar en forma de función cada miembro de la igualdad, $f(x) = x^2 + 2x$ y g(x)=15.

b) Traza en el mismo plano cartesiano las gráficas de las funciones f(x) y g(x).

c) Analiza las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas.

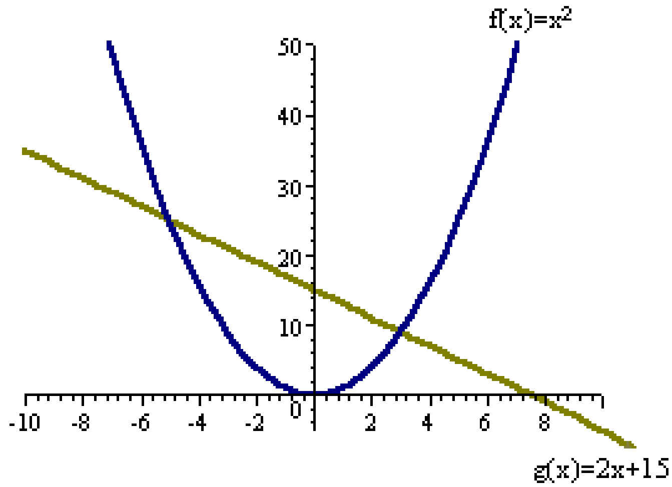
d) Las abscisas de los puntos de intersección, x´=-5, x´´=3, son las soluciones de la ecuación.

e) Completa la tabulación obteniendo los valores para “y” y compruébalas ubicándolos en la gráfica

Ejemplo 1

x	-2x+15	y
-8	-2(-8)+15=	31
-7	-2(-7)+15=	29
-6	-2(-6)+15=	27
-5	-2(-5)+15=	25
-4	-2(-4)+15=	23
-3	-2(-3)+15=	21
-2	-2(-2)+15=	19
-1	-2(-1)+15=	17
0	-2(-0)+15=	15
1	-2(1)+15=	13
2	-2(2)+15=	11
3	-2(3)+15=	9
4	-2(4)+15=	7
5	-2(5)+15=	5

Tabla 14



Gráfica 18

Ejemplo 2

Resolver gráficamente la ecuación $x^2 = -2x + 15$

Para encontrar las soluciones seguimos el método del ejemplo 1: graficamos las funciones $f(x) = x^2$ y g(x)=-2x+15 y analizamos las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas x´=-5, x´´=3; éstas son las soluciones de la ecuación $x^2 = -2x + 15$

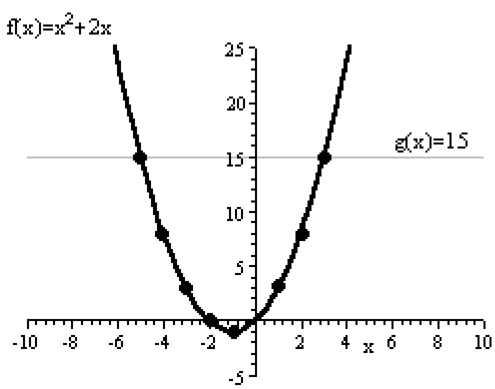


Figura 19

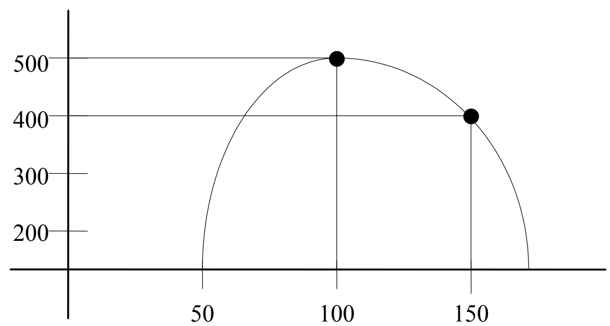
Observa que las ecuaciones $x^2 + 2x = 15$, $x^2 = -2x + 15$ y $x^2 + 2x - 15 = 0$ son equivalentes; luego, despeja el término independiente, es decir x^2, y graficando las funciones de ambos lados de la igualdad podemos también resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

1.6.5 AJUSTE DE CURVAS

Analiza la situación siguiente: En una región de África, considerada como reserva ecológica, un grupo de biólogos ha obtenido datos sobre la relación que hay entre el número de animales herbívoros y el número de animales depredadores, y los ha graficado (figura 20). Ellos desean construir un modelo matemático que se ajuste a los datos que han obtenido.

x	y
50	0
60	180
80	425
100	500
120	400
140	180
150	0

Tabla 15



Gráfica 20

Como los puntos de la gráfica tienen una disposición parabólica, se traza la parábola que mejor se ajuste a la serie de puntos. La curva corta al eje *x* en x=50 y x =150, de modo que estos valores de *x* deben ser soluciones de la ecuación f(x)=0.

> La regla de correspondencia de la función debe ser de la forma
>
> $y = ax^2+bx+c$ con $a < 0$

Como las soluciones de la ecuación, son $x_1 = 50$ y $x_2 = 150$. Y si igualamos a cero dichas soluciones, obtenemos las expresiones x-50=0; x-150=0.

Al realizar el producto de ambas expresiones igualado a cero, (x-50) (x-150)=0; obtenemos una ecuación cuadrática, cuyas soluciones son las intersecciones de la gráfica con el eje “x”.

Dicha ecuación es: $x^2 - 200x + 7500 = 0$

Esto nos hace pensar que la función que buscamos es:

$$y = x^2 - 200x + 7500 \qquad (1)$$

pero en la figura 18 se advierte que el vértice de la gráfica es *V*(100, 500).

Si a la ecuación (1) le damos la forma común para encontrar las coordenadas del vértice de su gráfica, obtenemos:

$$y = (x - 100)^2 - 2500 \qquad (2)$$

Por lo tanto, el vértice está en (100, -2 500).

Del estudio de la sección correspondiente al vértice de la gráfica de una función cuadrática se deduce que si multiplicamos el segundo miembro de la igualdad (2) por un número menor que 1, la gráfica se acortará.

Multiplicando el segundo miembro de (2) por -1/5 obtenemos:

$$y = -\frac{1}{5}(x - 100)^2 + 500 \qquad \text{“Porque } -2500\left(-\frac{1}{5}\right) = 500\text{”} \qquad (3)$$

Las coordenadas del vértice de la gráfica de la ecuación (3) son justamente las que necesitamos. Los puntos de intersección de la gráfica de esta ecuación con el eje X son (50, 0) y (150, 0). Por lo tanto, la función que se ajusta a los datos obtenidos es:

$$f(x) = -\frac{1}{5}(x - 100)^2 + 500 \quad \text{de donde la función original es} \quad f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 40x - 1500$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve lo siguiente:

Comprueba que la función anterior se ajusta a los datos del problema y luego calcula en forma algebraica las coordenadas de los puntos de intersección con el eje X y traza su gráfica.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Durante el estudio de los problemas planteados en este trabajo se construyeron las gráficas de las funciones cuadráticas, con el fin de que puedas comprobar y/o reafirmar resultados: además repasa lo siguiente:

- Recuerda que para la solución de estos problemas, se revisó el método de completar el trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ de este método se deriva la solución por medio de la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$$

  El discriminante es $b^2 - 4ac$

- La solución de una ecuación cuadrática depende del valor de la expresión $b^2 -4ac$, la cual recibe el nombre de discriminante de la ecuación.

Una vez que se han explicado los métodos de solución de las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, éstos métodos los podrás aplicar en la solución de problemas que conducen a una ecuación de segundo grado.

RECAPITULACIÓN

A continuación encontrarás un mapa conceptual que sintetiza los conceptos más importantes del capítulo que acabas de estudiar .

FUNCIONES POLINOMINARES CUADRÁTICAS

La resolución de problemas puede solucionarse por distintos métodos

MÉTODO DE TABULACIÓN

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

MÉTODO DE TABULACIÓN

Las cuales tienen en común obtener el valor máximo de los modelos

GEOMÉTRICOS

NUMÉRICOS

ALGEBRAICOS

Estos modelos tienden a relacionarse con

MODELO POLINOMIAL CUADRÁTICO

Son modelos algebraicos que tienen la forma

$y = ax^2 + bx + c$

en el cual

a, b y c representan números reales. $a \neq 0$

se deduce

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; a \neq 0$$

FUNCIÓN POLINOMIAL CUADRÁTICA

se establece

Una regla de correspondencia R a R conjunto de números reales

y esto lleva

$f(x)=ax^2+bx + c$

asociada a las funciones

La variable dependiente es “y” y la variable independiente “x”

se deduce

a, b y c son números REALES $a \neq 0$

ACTIVIDADES INTEGRALES

Verifica los conocimientos que has alcanzado realizando las siguientes actividades:

1. Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba desde una torre de lanzamiento de 20 m de altura con una velocidad inicial de 250 m/s. La aceleración (g = 9.8 m/s^2) debido a la gravedad de la Tierra afecta su movimiento y se desea determinar la altura del cohete en diferentes instantes.

a) Investiga en un libro de Física la fórmula que relaciona el desplazamiento y el tiempo de movimiento del cohete.

b) Construye el modelo adaptando la fórmula para el caso del cohete.

c) Elabora una tabla con valores aceptables.

d) Traza la gráfica.

e) A partir del modelo que obtuviste, calcula la altura máxima que, sobre el suelo, alcanza el cohete.

f) ¿En cuántos segundos alcanza su altura máxima?.

2. Para cada una de las funciones $f_1(x) = -x^2 + 2x + 8$; $f_2(x) = -x^2 + 6x$ y $f_3(x) = x^2 - 4x - 5$:

a) Determina las coordenadas del vértice, las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes, la concavidad y la ecuación del eje de simetría de la gráfica de la función.

b) Aplicando los resultados del inciso anterior bosqueja la gráfica.

c) Determina el valor máximo o mínimo de la función.

d) Determina los ceros de la función.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones empleando el método que en cada caso se indica:

Por factorización:

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $2x^2 + 7x - 4 = 0$

Completando trinomio cuadrado perfecto

c) $x^2 - 10x + 5 = 0$

d) $4x^2 - 8x + 5 = 0$

Empleando la fórmula general:

e) $2x^2 + x - 105 = 0$

f) $10x^2 + 9x - 7 = 0$

Gráficamente, despejando X^2

g) $x^2 + x - 12 = 0$

h) $6x^2 - 5x - 6 = 0$

4. Resuelve los siguientes problemas:

a) Las dimensiones de la pantalla de un televisor se dan comercialmente por la medida de su diagonal. Si la razón del largo al ancho debe ser de 4/3 ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la pantalla de un televisor de 14 pulgadas?

b) La velocidad de escape (V) de un planeta depende de su radio (R) y del valor de aceleración (g) debida a su gravedad. La fórmula $V^2 = 2gR$ expresa la relación que existe entre esas cantidades. ¿Cuál es la velocidad de escape, en km/s, en un planeta cuyo radio mide 5 000 km y donde g = 0.002 $\mathrm{km/s^2}$?.

c) Un grupo de estudiantes compró una calculadora con graficador que costó N$ 600. Al inicio el grupo se componía de x alumnos, pero al agregarse otros cinco, la cantidad que cada uno debía pagar se redujo en N$10 pesos. ¿De cuántos alumnos constaba el grupo inicial?.

AUTOEVALUACIÓN

Soluciones a las Actividades Integrales para que puedas verificar tus resultados:

1.
b) $h = -4.9t^2+250t+20$

e) h= 3 208.7 m

f) t= 25.5 s

2. $f_1(x) = -x^2+2x+8$

Vértice	V(1,9)
Intersección con X	(-2, 0) (4,0)
Intersección con Y	(0,8)
Concavidad	hacia abajo
Eje de simetría	x = 1
Valor máximo	f_1 (1) = 9
Ceros	x= -2; x= 4.

$f_2(x)=-x^2+6x$

Vértice	V(3,-9)
Intersección con X	(0, 0) (6,0)
Intersección con Y	(0,0)
Concavidad	hacia abajo
Eje de simetría	x = 3
Valor máximo	f_2 (3) = 9
Ceros	x= 0; x= 6.

$f_3(x)=x^2-4x-5$

Vértice	V(2,-9)
Intersección con X	(-1, 0) (5,0)
Intersección con Y	(0, -5)
Concavidad	hacia arriba
Eje de simetría	x = 2
Valor máximo	f_3 (2) = -9
Ceros	x= -1; x= 5.

3.

a) x´=3; x´´=-2

b) x´=1/2; x´´=-4

c) $x' = 5+\sqrt{20}; x'' = 5-\sqrt{20}$

d) No tiene solución real

e) x´= -15/2; x´´ = 7

f) x´= 1/2; x´´ = - 7/5

g) x´= -4; x´´ = 3

h) x´= - 2/3; x´´ = 3/2

4.

a) Largo 11.2 Pulgadas; ancho 8.4 Pulgadas

b) 4.47 km/s

c) 15 alumnos.

C A P Í T U L O 2

FUNCIONES POLINOMIALES: CONCEPTO, CLASIFICACIÓN Y GRÁFICA.

1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES

1.2 ANÁLISIS DE FUNCIONES: CONCEPTO, CLASIFICACIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

1.2.1 Función Constante
1.2.2 Función Discreta
1.2.3 Función Continua

PROPÓSITO

En el fascículo y capítulo anterior estudiaste algunas funciones polinomiales, como las lineales y las cuadráticas, ambas te permitirán describir y analizar diversas situaciones que constantemente se presentan en nuestra vida diaria.

Para este capítulo:

¿Qué aprenderás?

A conocer y a desarrollar los modelos de funciones polinomiales en la representación gráfica, además identificar sus elementos y características de cada una de ellas.

¿Cómo lo lograrás?

Considerando el estudio previo que debes tener sobre la función lineal y cuadrática, la tabulación y su representación gráfica, así como la solución de ecuaciones que además se revisaron en capítulos anteriores, te serán de gran ayuda para poder graficar y clasificar las funciones polinomiales

¿Para qué te va a servir?

Con el logro de estos conocimientos lograrás identificar las características de los modelos algebraicos, conocer el concepto general de función y la clasificación de funciones, para que puedas resolver diferentes fenómenos naturales, económicos y sociales.

SIMBOLOGÍA

A continuación aparece una lista de algunos símbolos que se encuentran en este fascículo, el cual tiene como finalidad que lo consultes las veces que sea necesario, ya que esto te permitirá conocer su significado y/o entender los temas clave que se manejan en él.

v ________________	Volumen
r ________________	Radio
b ________________	Base
h ________________	Altura
s ________________	Superficie
T ________________	Temperatura
t ________________	Tiempo
D ________________	Dominio
R ________________	Rango
$\in$ ________________	Pertenece
/ ________________	Tal que
°C _______________	Grados Centígrados
$\approx$ _______________	Aproximadamente
g(x) ______________	Valor de g en x
f(x) ______________	Valor de f en x

CAPÍTULO 2. FUNCIONES POLINOMIALES: CONCEPTO, CLASIFICACIÓN Y GRÁFICA

En el fascículo y capítulo anterior estudiaste algunas funciones polinomiales, como la lineal y la cuadrática ambas te permitieron describir y analizar diversos fenómenos y situaciones que constantemente se presentan en nuestra vida diaria y en la sociedad. Por ejemplo; en ocasiones se te habrá presentado algún problema de cómo incrementar los ingresos en un negocio, acertar en el blanco al lanzar proyectiles, calcular la distancia que recorre un cuerpo que se desplaza con movimiento uniforme acelerado, etc.

Estamos seguros que estos y otros problemas, los has resuelto con la ayuda de las funciones cuadrática y lineal. Ahora en este capítulo conocerás y aplicarás un nuevo concepto como el de función cúbica polinomial, constante, discreta y contínua, que de igual manera será de gran utilidad para resolver algunos fenómenos y/o problemas. Alguna vez te habrás preguntado, ¿cuál será la resistencia que tienen las vigas que sostienen los puentes peatonales que utilizamos para cruzar las avenidas?. A continuación te presentamos el siguiente ejemplo donde se muestra que los cables de suspensión de un puente bajo una carga uniforme están descritos por una función determinada. Ver figura 1.

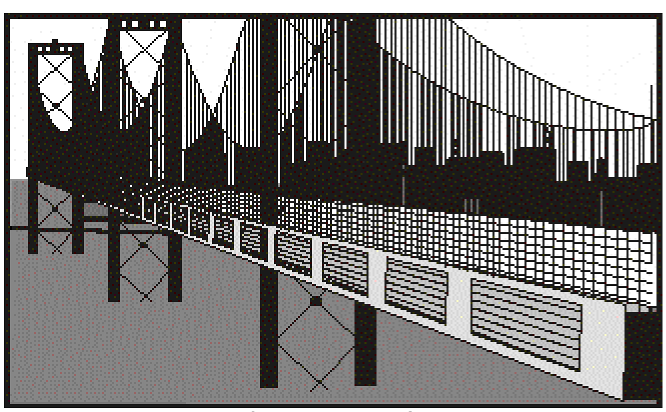


Figura 1. El famoso puente de San Francisco

Los cables de un puente de suspensión bajo una carga uniforme adoptan la forma de una parábola.

La forma de las vigas de cualquier estructura bajo ciertas cargas puede describirse aproximadamente por medio de funciones polinomiales. Consideremos un ejemplo:

En una viga de acero sostenida por un extremo hay ciertos puntos en los que, al aplicarles una fuerza, la viga no se dobla (momento de flexión igual a cero). Este fenómeno está determinado por la función:

$$f(x) = 9x^4 - 18x^3 + 11x^3 - 22x$$

Donde "x" es la distancia en metros del punto de aplicación de la fuerza al extremo de la viga.

¿Cuáles son los valores de "x" para los momentos de flixión iguales a cero?.

2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINOMIALES

Las gráficas de funciones, que hasta hoy eres capaz de trazar, son las del tipo lineal y cuadrático, pero éstas no son suficientes para describir los distintos fenómenos naturales, económicos y sociales que se presentan en el desarrollo de un país, como, por ejemplo, la necesidad de reducir al máximo el material con que se fabrican cajas para envasar productos comerciales, o la de construir puentes para comunicar dos ciudades.

Por esta razón representaremos algunas otras funciones y sus gráficas, a fin de que puedas describir la mayoría de dichos fenómenos mediante modelos algebraicos que representen, a su vez, los respectivos procesos de cambio; así mismo, vamos a perfeccionar el método de tabulación que hemos empleado hasta ahora para graficar funciones, ahora de tipo polinomial.

Un modelo de función que surge a menudo durante la solución de algunos problemas de economía es:

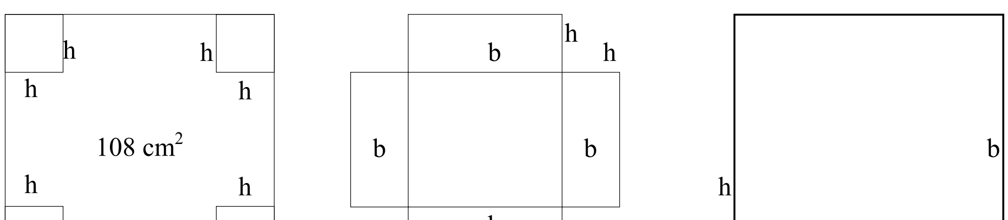
$$V(b) = -\frac{b^3}{4} + 27b \qquad (1)$$

Este tipo de modelo es común, ya que toda empresa busca siempre emplear el mínimo de material en sus procesos para obtener la máxima utilidad. El siguiente ejemplo proporciona un modelo como el anterior.

Ejemplo 1

Una empacadora necesita reducir lo más posible el costo de las cajas de base cuadrada y sin tapa que emplea con el fin de utilizar menos cajas y, desde luego, reducir su costo. Para ello es necesario encontrar las dimensiones que proporcionen mayor volumen con 108 cm^2 de material destinado a cada caja.

Para elaborar el modelo matemático que represente la solución al problema, puedes partir de las dimensiones representadas en la siguiente figura (2).



b= lado de la base cuadarada

h = altura de la caja

Figura 3

Nota: Observa las siguientes figuras de izquierda a derecha y recuerda que a la “caja” se le va a quitar una mínima parte en cada extremo de la superficie, para que de esta forma pueda tomar una caja sin tapa que tenga un volumen máximo.

¿Sabes cómo se calcula el volumen de este cuerpo?. Se hace mediante esta fórmula:

V= Área de la base por altura como el largo es igual al ancho por ser cuadrada la base $V = b^2h$
entonces $A = b^2$ = Área de la base
donde: A lateral = bh como son 4 tenemos que:

La superficie total del material es:

$$S = b^2 + 4bh = 108 \qquad \text{¿Por qué?}$$

Como queremos usar una cantidad fija de material en la elaboración de cada caja, y obtener el volumen máximo, se necesita encontrar una relación entre la superficie y el volumen de la caja.

Para lograr lo anterior despejemos h de la expresión que dimos para S. Por lo tanto,

$$h = \frac{108 - b^2}{4b}$$

En este último cociente, como puedes ver, no será posible que b tenga el valor de cero. ¿Por qué?. Si sustituimos el valor de h en la expresión del volumen, dicho volumen quedará en términos de b:

$$V = b^2\left(\frac{108 - b^2}{4b}\right) = 27b - \frac{b^3}{4},$$

o sea:

$$V(b) = -\frac{b^3}{4} + 27\,b,$$

que es la misma función que la expresión (1).

Esta función nos permite buscar la medida de b que hace máximo el volumen de la caja.

Como puedes observar, el binomio representa una función de tercer grado, lo cual nos indica que la función del volumen de la caja es cúbica.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

A) Ahora completa la siguiente tabla calculando los valores numéricos que faltan. En este caso puedes usar calculadora.

b	V(b)	
		$V(b) = -\frac{b^3}{4} + 27b$
$\frac{1}{3}$	$\frac{971}{108}$	$V(\frac{1}{3}) = -\frac{(\frac{1}{3})^3}{4} + 27(\frac{1}{3}) = -\frac{(\frac{1}{27})}{4} + 9 = -\frac{1}{108} + 9 = \frac{971}{108} \approx 8.99$
$\frac{1}{2}$		$V(\frac{1}{2}) =$
2	52	$V(2) = -\frac{(2)^3}{4} + 27(2) = 52$
	92	V ( )
6	108	V (6)
8		V (8)
10	20	$V(10) = -\frac{(10)^3}{4} + 27(10) = 20$

Tabla 16

Observa que sólo hemos dado valores positivos a *b*. Explica por qué.

Asigna otros valores a *b* y calcula los de *V*.

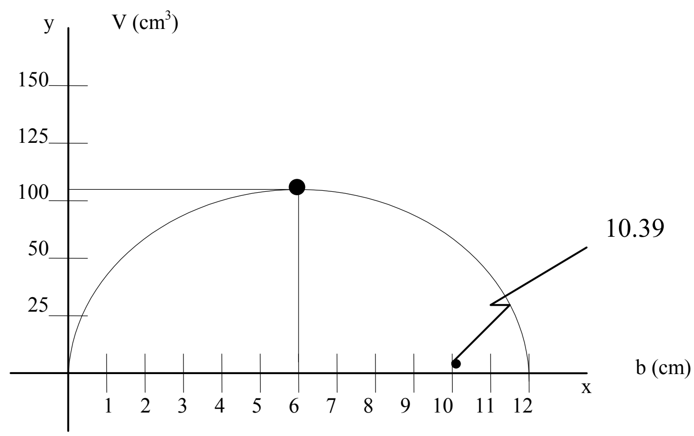
A continuación anota el Dominio (D) de la función:

D = $\{\ ,\ \}$

Comprueba ahora que el conjunto de valores que se puede calcular para V, a partir del conjunto anterior, es:

$$R = \{y \in IR / 0 \le y \le 108\}$$

B) Gráfica los valores de la tabla (1) en el plano cartesiano y une los puntos mediante una línea curva para que aprecies la forma aproximada de la gráfica de la función V(b).



Gráfica 21

Si analizas la gráfica y la tabla anterior, puedes realizar las siguientes actividades:

- La gráfica es cóncava hacia abajo en el intervalo (0,).
- Escribe el valor aproximado de b al que corresponde el volumen *máximo.*

Respuesta: b = 6

Evalúa la función en dicho punto para que encuentres las coordenadas del punto más alto de la gráfica, al cual se le llama máximo.

V (6) = ________________________

Coordenadas: (,   ).

¿Te has dado cuenta de que la recta cruza a los ejes en algunos puntos?. A estos se les llama intercepciones con los ejes.

Si la gráfica intercepta con el eje "b", esto quiere decir que en ese momento el valor de "V" es igual a cero.

De acuerdo con lo anterior, calculemos los valores de "b" cuando V=0 por medio de la ecuación $\frac{-b^3}{4} + 27b = 0$

Factorización: $(b)\left(\frac{-b^2}{4} + 27\right) = 0$

Resolviendo la ecuación de 2do. grado que está dentro del paréntesis, se tiene que

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = \sqrt{108} = 10.392$$

$$b_3 = -\sqrt{108} = -10.392$$

Una vez obtenidos los valores de "b", nos damos cuenta que la gráfica intercepta al eje "b" en tres puntos distintos; de los cuales únicamente nos interesan dos; el cero y $\sqrt{108}$. Y el tercer valor lo descartamos, ya que la caja no puede tener dimensiones negativas.

Las coordenadas de los puntos de intersepción, son (0, 0) y ($\sqrt{108}$, 0).

Traza una recta vertical por el punto máximo y comprueba que tal recta es eje de simetría de la curva.

Una función cúbica puede representar otro tipo de problema como el que se muestra a continuación:

Ejemplo 2

Calcula la rapidez con que crece o decrece la población de venados en una sierra.

La función en este caso es $R(t) = -4t^3 + 42t$, y como el estudio de la población debe proyectarse conforme al futuro y a periodos anteriores, hay que asignar valores tanto positivos como negativos al tiempo t.

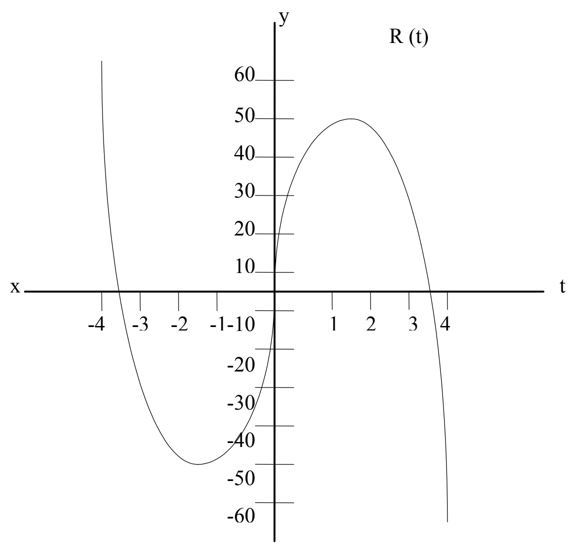
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios:

Completa la siguiente tabla de valores y traza formalmente los puntos cartesianos para que compruebes que la gráfica tiene la forma bosquejada tal como en la figura que sigue:

t	R (t)
-4	88
-3.5	24.5
-2	
-0.5	-20.5
0	
1	
2	52
3.5	-24.5
4	

Tabla 17



Gráfica 22

Contesta las siguientes preguntas o completa los enunciados.

¿En cuál intervalo la curva es cóncava hacia arriba y en cuál lo es hacia abajo?.

Hacia arriba (,]

Hacia abajo [,)

Anota un intervalo aproximado para la abscisa de los puntos máximo y mínimo.

Encuentra una recta respecto de la cual la curva es simétrica.

Escribe los valores de t para los puntos de intersección con los ejes. (Para encontrar estos valores deberás factorizar la función y posteriormente resolver la ecuación cuadrática).

Ejemplo 3

Se ha encontrado por vía experimental que al sostener una viga de acero por sus extremos hay cuatro puntos en los que, al aplicarles una fuerza, la viga no se dobla (momento de flexión igual a cero). Este fenómeno está determinado por la función:

$$f(x) = 0.1x^4 - 1.8x^3 + 10.4x^2 - 19.2x$$

donde x es la distancia en metros del punto de aplicación de la fuerza a un extremo de la viga. Ahora, hay que obtener los valores de x para los cuales el momento de flexión es cero.

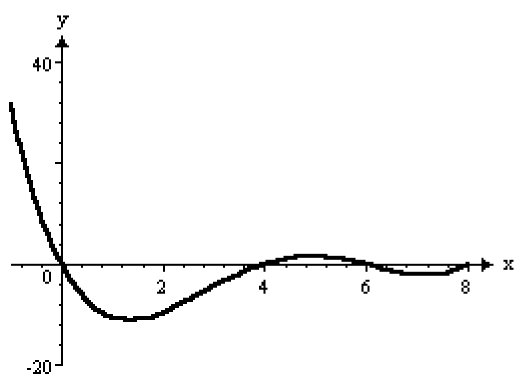
Para ello aplica el procedimiento de tabulación y podrás encontrar algunas de las características de la función, tales como: concavidad, intersección con los ejes, puntos máximos, mínimos y simetría.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Considera lo anterior para poder resolver los siguientes ejercicios:

Calcula el valor máximo de f(0), f(0,5), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7) y f(8) para elaborar la tabla de valores.

La gráfica de $f(x) = 0.1x^4 - 1.8x^3 + 10.4x^2 - 19.2x$ corresponde a la figura siguiente:



Gráfica 23

A partir de la tabla que acabas de hacer, localiza los puntos en el plano cartesiano y prueba que efectivamente pertenecen a la curva bosquejada.

Encuentra los intervalos de x donde la curva es cóncava. Calcula los valores aproximados para los valores de x de los puntos máximos, mínimos y de intersección con los ejes.

Evalúa la función en estos valores para que encuentres las coordenadas de dichos puntos.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí podemos establecer algunas conclusiones como las siguientes:

– Recuerda que en el fascículo anterior conociste la elaboración de gráficas de tipo lineal y cuadrático, no obstante; que ambas no son suficientes para describir los distintos fenómenos naturales, económicos y sociales que se presentan en el desarrollo de un país y de la vida misma. Es por esto que en este tema se conoció la elaboración de gráficas junto con su tabulación correspondiente y su procedimiento algebraico para conocer la intersección con los ejes, ahora de tipo polinomial cúbica y de cuarto grado.

– Se tiene que tomar en cuenta que la construcción del *Modelo Algebraico*, estará sujeto a las características y/o contexto del problema, por ello se recomienda leer tantas veces sea necesario para establecer las variables e incógnitas del problema.

– Recuerda que en una función cúbica puede tener valores tanto positivos como negativos asignados al tiempo, temperatura, velocidad, etc., esto dependerá de las características que presente el problema.

2.2 ANÁLISIS DE FUNCIONES: CONCEPTO, CLASIFICACIÓN Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Todas las cosas que ocurren en la Naturaleza y en la sociedad sufren alteraciones en el transcurso del tiempo, por lo que a su vez unos fenómenos varían con respecto de otros, aunque algunos valores calculados o medidos no cambian en ciertos periodos. Ejemplo de ello son: el movimiento de los planetas, el volumen de la materia cuando se calienta y la reproducción de microorganismos infecciosos.

Desde siempre el hombre ha tratado de comprender y representar dichos cambios tanto mental como matemáticamente. Las expresiones desarrolladas para este efecto son lo que conoces como funciones.

Los investigadores y científicos necesitan representar en forma algebraica los fenómeno que desean estudiar para descubrir sus propiedades y encontrarles aplicaciones.

Para comprender lo que es una función partiremos de un problema práctico.

Ejemplo 1

Un estudiante en el laboratorio de su escuela, que se encuentra cerca de la playa, desea comprender qué ocurre con el agua al calentarla. Para ello enciende el mechero Bunsen, comienza a calentar el agua y mide su temperatura cada dos minutos. Para no olvidar los valores registra en una tabla el tiempo y la temperatura. Puedes hacer tus propias mediciones en la clase de Física.

t (min)	T °C
0	30
2	36
4	42
6	48
8	54
10	60
12	66
14	72
16	78
18	84
20	90
22	96
24	100
26	100
28	100

Tabla 18

Si escribes cada valor de la temperatura utilizando la temperatura inicial de 30°C y los tiempos que van transcurriendo se obtendrá lo siguiente:

$T= 30 =30+0=30+3(0)$

$T=36=30+6=30+3(2)$

$T=42=30+12=30+3(4)$

$T=48=30+18=30+3(6)$

Ahora tú desglosa el siguiente valor.

$T=54=$ ___________________________

Generalizando estas expresiones se obtiene:

$T=30+3(t)$ (1)

Como puedes observar en el tiempo t=0 se realiza la primera medida de temperatura de 30°C llamada temperatura inicial.

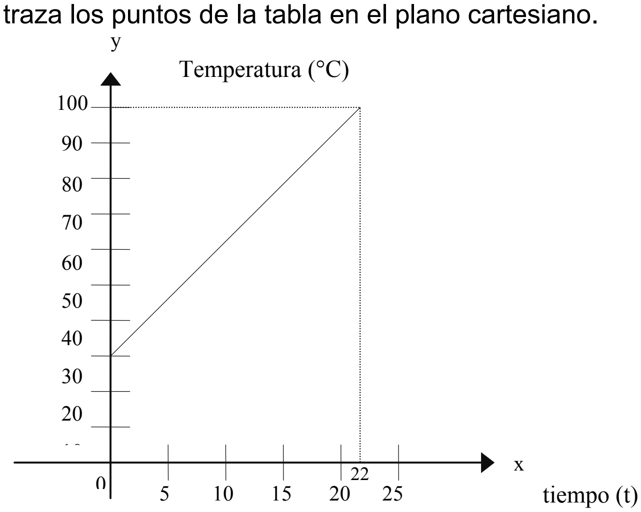
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Elabora los ejercicios considerando lo que ya estudiaste.

A) Responde ahora las siguientes preguntas o completa las frases según se requiera.

- Elige dos temperaturas consecutivas entre 0° y 22° y anota en cuánto difieren: ________ °C.
- ¿Cuánto varía la temperatura de una medición a otra? ____________ °C.
- Si continuas tomando mediciones después de los 28 minutos, ¿qué valores esperas que marque el termómetro?. ____
____.
- Como la temperatura no cambia en dichas mediciones, resulta ser una cantidad llamada _____.

Para continuar traza los puntos de la tabla en el plano cartesiano.



Gráfica 24

Observa que la temperatura aumenta al transcurrir el tiempo y que esto ocurre hasta el minuto 24, a partir del cual la temperatura se conserva en el valor de 100°C por más que avance el tiempo.

Por lo anterior vemos que hasta el minuto 24 los valores de la temperatura dependen del tiempo en que se midan, por lo que se dice que T es función del tiempo y, y entonces la expresión (1) se debe escribir de la siguiente forma:

$$T(t) = 30+3t \qquad (2)$$

Esta expresión corresponde a un modelo más general, como el siguiente:

$$f(x) = 30+3x,$$

el cual representa otros fenómenos con características similares. Consulta otros ejemplos en las referencias o bibliografía.

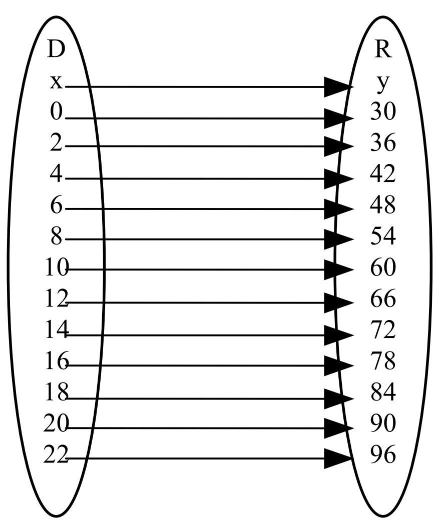
B) Representa ahora los valores del tiempo t mediante el conjunto D y los de la temperatura T, con R mediante un diagrama de Venn y señala en el mismo la relación entre dichos valores.

Como te habrás dado cuenta, los elementos de R se pueden calcular a partir de los correspondientes de D usando la expresión (2).
De esta manera, esta relación de correspondencia entre los conjuntos D y R representa la función T(t) = 30+3t.

D		R
0	→	30
2	→	36
4	→	42
6	→	48
8	→	54
10	→	60
12	→	66
14	→	72
16	→	78
18	→	84
20	→	90
22	→	96
•		•
•		•
•		•
t	—	30 + 3 (t)

Tabla 19

Diagrama de Venn



C) De acuerdo con el diagrama, completa los siguientes enunciados.

- Solamente un valor R se obtiene con cada __________ de D en el intervalo (0, 22).

A las relaciones entre los elementos de dos conjuntos que siguen una regla o comportamiento se les ha dado el nombre de funciones. A un valor del Dominio (D), le corresponde uno y solo un valor del Rango (R).

Escribe los valores que se le pueden asignar al tiempo t en el conjunto D= $\{\ \}$ para la función (2).

A partir de este conjunto, ¿cuáles son los valores que se obtienen para la temperatura T?.

R= $\{\ \}$.

¿Conoces el nombre que se le da a los conjuntos D y R?.

Respuesta: *D* se llama *domino de la función* y *R* se llama *rango de la función*.

Con esta respuesta puedes comprender por qué se asignó las letras D y R a los conjuntos anteriores.

El nombre que recibe cada conjunto *R* es ___________________________.

Como podrás observar, cada valor de la temperatura depende del valor del tiempo transcurrido. Por tal motivo:

A la temperatura *T* se le llama *variable dependiente* y al tiempo *t* se le llama *variable independiente*, es decir, los valores de la función los determina o "domina" el tiempo *t*.

2.2.1 FUNCIÓN CONSTANTE

Al analizar la gráfica de la función (2) vemos que hay puntos a la misma altura, es decir, alineados horizontalmente, que tienen la misma ordenada. Para estos puntos desglosamos una función que se presenta en la forma:

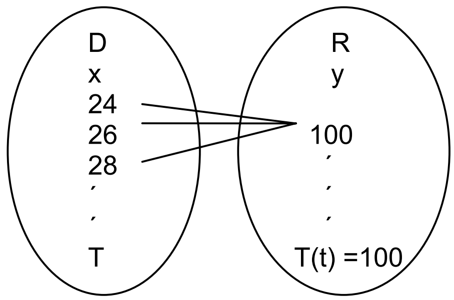
$$T(t) = 100$$

Esto significa que el valor de la temperatura es siempre el mismo para cualquier tiempo mayor o igual a 24 minutos.

$$T \geq 24''$$

Por esta razón, cualquier función de modelo como la anterior se denomina función constante.

Y el Diagrama Venn para la relación de los datos de ésta función es:



FUNCION LINEAL

En cambio, los valores de $0 \leq t \leq 22$ corresponden a los puntos alineados oblicuamente a los ejes, es decir, sobre una línea oblicua, que son de la función T (t) = 30+30(t).

A cualquier función que presente esta propiedad se le conoce como función lineal.

Veamos ahora si a partir de este ejemplo puedes construir otra función e identificar sus elementos, los cuales como sabemos, son:

- Regla de correspondencia: y=f(x)
- Dominio de la función: $D = \{x / x \in IR\}$
- Rango de la función: R ={(y/y = f(x)}

2.2.2 FUNCIÓN DISCRETA

Ejemplo 2

Un jugador de fútbol americano profesional recibe un sueldo de 10 000 dólares por cada juego que realiza y le descuentan 500 por cada falta que comete dentro del juego.

¿Puedes deducir la función que determina el sueldo neto?, para obtener dicho sueldo, se deduce la expresión:

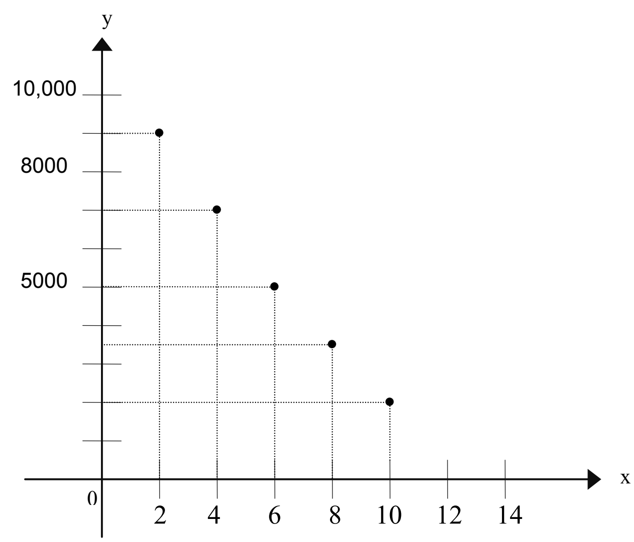
$$f(x) = 10\,000 - 500x$$

y el modelo general de la función es de la forma: f(x) = ax + b

En ella la variable independiente x representa el número de faltas.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Calcula el valor numérico de f(0), f(1), f(2), f(3) y f(4); anota la tabla de coordenadas y comprueba que la gráfica que se obtiene es la siguiente:



Gráfica 25

Si a un jugador sólo se le puede descontar la mitad de su sueldo por partido, calcula el número máximo de faltas que puede cometer en un juego.

¿Sería posible que le descontaran 1 250 por su faltas?.

Si analizas detenidamente la respuesta a esta pregunta puedes encontrar el dominio de la función dado por números enteros:

$$D= \{ \quad \}$$

Además, el valor de 1 250 correspondería a 2.5 faltas, por lo que los números decimales no pertenecen al dominio.

A partir de los elementos del dominio encuentra los del rango para completar el siguiente conjunto.

$$R = \{ \quad \}$$

Como el jugador no puede cometer medias faltas, la gráfica resulta un conjunto de puntos separados entre sí, y por esta razón a la función se le denomina discreta.

¿Cuál sería la imagen que correspondería a siete faltas?.

Hasta el momento hemos visto el modelo algebraico de una función constante, de una lineal y una discreta.

2.2.3 FUNCIÓN CONTINUA

Ejemplo 3

El tanque de gasolina de un automóvil tiene una capacidad de 40 litros. Ese automóvil tiene un rendimiento de 10 km por litro; como su medidor del contenido de gasolina no funciona, el chofer necesita conocer cuánta gasolina le queda después de recorrer cierta distancia x, a fin de saber si tiene que cargar más.

La función que describe el volumen restante de gasolina resulta:

$$f(x) = 40 - \frac{1}{10}x$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

1. Te sugerimos que apliques lo aprendido en el primer ejemplo y deduzcas esta función.

Conforme determines el rango de la función y la grafiques, podrás ir respondiendo a las siguientes preguntas o completando las proposiciones.

Al agotarse la gasolina el automóvil habrá recorrido ______________________ kilómetros.

¿Puede recorrer 1.5 km?.

¿Puede gastar 2.75 litros de gasolina?.

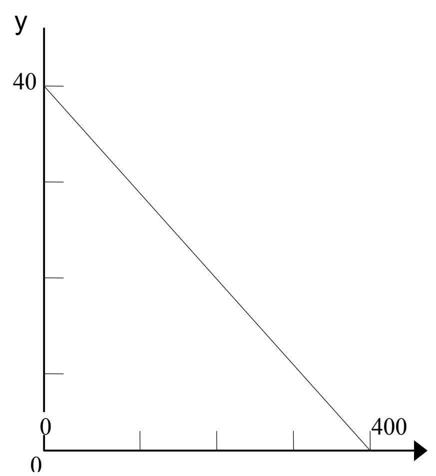
Explica por qué el dominio de la función es:

$$D = \{ \ x \in IR \ / \ 0 \leq x \leq 400 \ \}$$

Completa el siguiente conjunto que representa el rango de la función.

$$R = \{ y \in IR \ / \qquad \qquad \}$$

Observa que el automóvil puede recorrer kilómetros o fracciones de kilómetro, al igual que consumir litros o mililitros de gasolina. Por esta razón la gráfica puede obtenerse con una sucesión continua de puntos de tal forma que se traza mediante una línea recta y se le denomina función *continua.*



Gráfica 26

Ahora nos ocuparemos de la gráfica de una función cuyos valores no sean enteros.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo 4

Se lanza un proyectil cuya trayectoria se describe con la función:

$$f(x)=-0.1x^2+x$$

(Recuerda que los proyectiles siguen trayectorias parabólicas)

Unos segundos después se lanza un antiproyectil cuyo movimiento se calcula con la función:

$$g(x) = -0.1x^2 + 3.6,$$

y que está diseñado para interceptar al proyectil y destruirlo. Traza las curvas que representen las trayectorias de los móviles y determina las coordenadas del punto de intersección.

2. A continuación hemos calculado los valores f(0) y f(2.5), así como el de g(0). Prosigue con los cálculos de los valores de f(5), f(7.5), f(10) y g(0), g(1.5), g(3), g(4.5) y g(6). En seguida elabora una tabla para el dominio y rango de f(x) y otra para g(x), trazando ambas gráficas en el mismo sistema cartesiano a fin de que identifiques el punto de encuentro entre proyectiles.

x	$f(x) = -0.1x^2 + x$	y
0	$f(0) = -0.1(0)^2 + 0$	0
	$f(2.5) = -0.1(2.5)^2 + 2.5$	1.85
	f(5) =	
	f(7.5) =	
	f(10) =	

Tabla 20

x	$g(x) = -0.1x^2+3.6$	y
0	$g(0) = -0.1(0)^2+3.6$	3.6
1.5	g(1.5) =	
3	g(3) =	
4.5	g(4.5) =	
6	g(6)* =	

Tabla 21

Al completar la gráfica nos damos cuenta que es laborioso encontrar el punto en donde se van a interceptar el proyectil y el antiproyectil. Es por ello que a continuación aplicaremos métodos algebraicos para calcular el punto de intersección, y esto se hace igualando ambas funciones y obtener la otra coordenada del punto de intersección.

Proyectil

$$f(x) = -0.1x^2 + x$$

Antiproyectil

$$g(x) = -0.1x^2 + 3.6$$

Se igualan las dos funciones:

$$-0.1x^2 + x = -0.1x^2 + 3.6 \because x = 3.6$$

Se resuelve la igualdad:

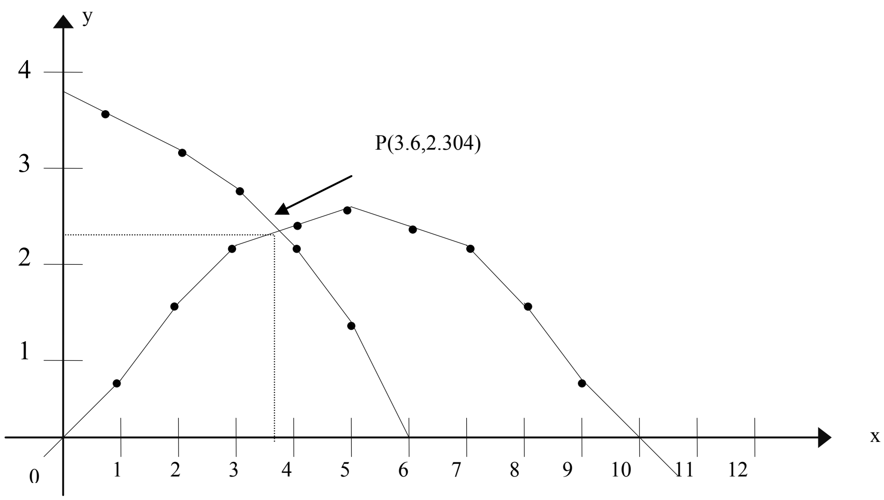
Se sustituye el valor "x" en una de las funciones:

$$\begin{aligned} f(3.6) &= -0.1\,(3.6)^2 + 3.6 \\ &= -0.1\,(12.96) + 3.6 \\ &= -1.296 + 3.6 \\ &= 2.304 \end{aligned}$$

Entonces el punto de encuentro de los móviles es:

$$P(\ 3.6,\ 2.304\ )$$

Corrobora ésto mediante aproximaciones en la gráfica que traces.



Gráfica 27

FUNCIÓN DE TERCERA POTENCIA

Ejemplo 5

Una empacadora de sardinas emplea latas cilíndricas. Encuentra el volumen de una de esta latas como función del radio, de tal forma que la altura mida 3 cm más que el radio. Puedes partir de las dimensiones consideradas en la siguiente figura (3).

h= altura
v= volumen
r= radio

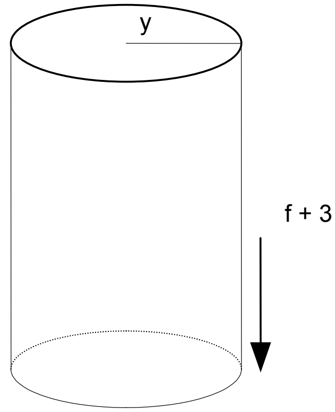


Figura 4

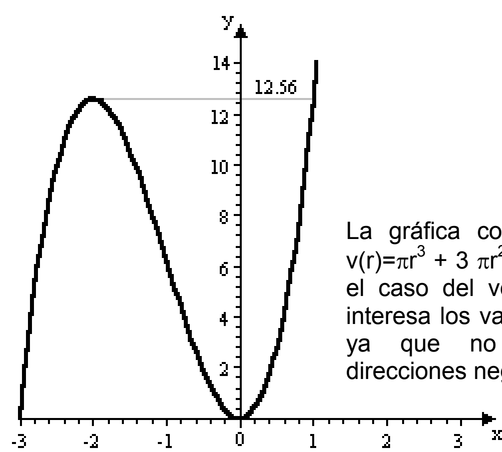
Si usas la fórmula que aprendiste en tus clases de Geometría para calcular el volumen del cilindro obtendrás lo siguiente:

$v = \pi r^2 h$ como h =r+3 entonces;

$v(r) = \pi r^2(r+3)$ realizando el producto se obtiene la función $V(r) = \pi r^3 + 3\pi r^2$

Una vez que diseñes la función, podrás trazar la gráfica y determinar el dominio, el rango, la concavidad y los puntos de intersección con los ejes cartesianos.

La gráfica corresponde a la función $V(r) = \pi r^3 + 3\pi r^2$ pero recuerda que para el caso del volumen únicamentenos interesa los valores positivos del radio, ya que no se pueden asignar dimensiones negativas a dicho radio.



La gráfica corresponde a la función v(r)=$\pi r^3 + 3\ \pi r^2$ pero recuerda que para el caso del volúmen únicamente nos interesa los valores positivos del radio, ya que no se pueden asignar direcciones negativas a dicho radio

Gráfica 28

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

Para ejercitar el aprendizaje aplica tus conocimientos en la solución de los siguientes interrogantes mediante los cuales desarrollarás el modelo de una función e identificarás sus propiedades.

Todos los días lees libros, periódicos, revistas o anuncios. ¿Te habías imaginado que la acción de imprimir tiene que ver con el uso de funciones?.

Piensa que tienes una imprenta y debes imprimir un folleto. La hoja debe tener 24 cm^2 de impresión y necesitas calcular las dimensiones que te permitan ahorrar el máximo de papel.

¿Qué debes reducir de la hoja, lo más que sea posible, en el momento de cortar el papel?. Representa algebraicamente el largo y el ancho de la hoja. Si los márgenes izquierdo y derecho son de 1.0 cm y el superior e inferior 1.5 cm, ¿cómo representas las dimensiones del rectángulo que formará la impresión de la hoja?.

largo:
ancho:

Usa estas dimensiones para que representes el área impresa que escribirás igual a los 24 cm^2. ¿Te has dado cuenta que obtuviste una ecuación con dos incógnitas que corresponden al largo y al ancho del papel?. De esta expresión, despeja el valor del ancho de la hoja y con el valor despejado y la otra dimensión de la hoja representa algebraicamente el área de la misma. Acabas de obtener la función área con una de las dimensiones como variable independiente.

En el conjunto que aparece enseguida escribe los valores que puede tomar la variable independiente de dicha función:

$$L = \{ \quad \}$$

¿Cómo se le llama a este conjunto? ¿Cuáles serán los valores que resultan para el área a partir de cada valor del conjunto anterior?.

$$A = \{ \quad \}$$

¿Qué nombre recibe este conjunto?.

o bien

$$A(y) = 3\left(\frac{y^2 + 6y}{y-2} \right),$$

donde *y* representa el ancho de la hoja dependiendo la dimensión *x* o *y* se haya elegido como variable independiente. Ahora puedes graficar la primera función, y localizar su dominio, rango y puntos de intersección con los ejes.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí hemos podido establecer algunas conclusiones como son las siguientes:

- Recuerda que a las relaciones entre los elementos dados de un conjunto que siguen una regla de correspondencia o comportamiento se les ha dado el nombre de funciones.

- A un valor del Dominio (D), le corresponde uno y solo un valor del Rango (R).

- Algunas características que presenta una función constante son que sus puntos que aparecen en la gráfica correspondiente se encuentran a la misma altura, alineados horizontalmente y además de que tienen la misma ordenada.

- Por el contrario cuando en una gráfica del plano cartesiano resulta una serie de puntos aislados entre sí, se dice que es una función discreta (ver ejemplo gráfica 5).

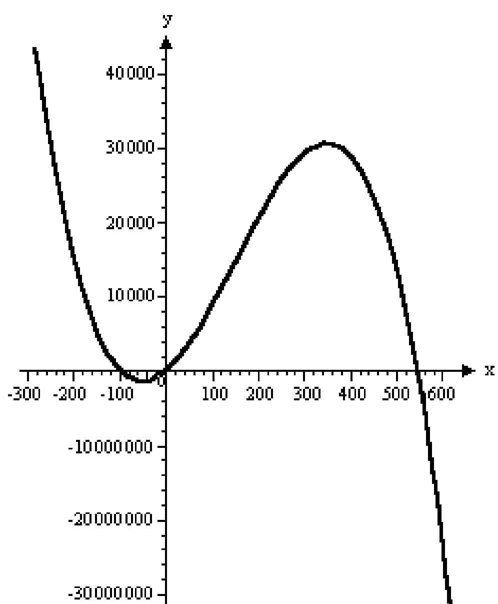
- Cuando solo aparece una sucesión continua de puntos en una gráfica, y éstos se trazan a través de una línea recta se le denomina función continua (ver ejemplo gráfica 6).

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

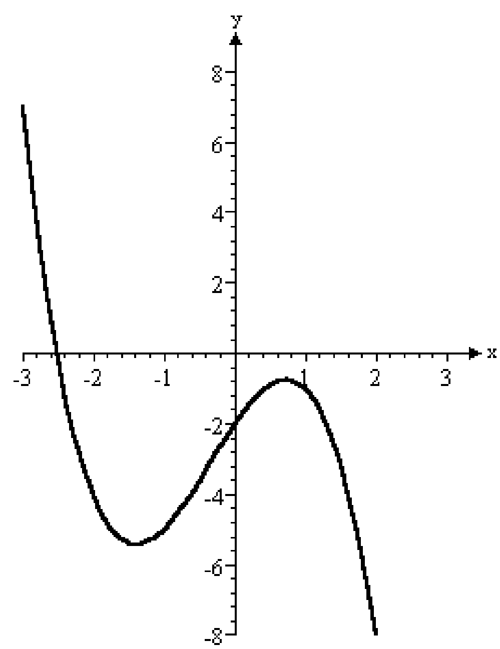
A continuación se presentan lo siguientes ejercicios, con la finalidad que apliques los conocimientos que has alcanzado; si se te presentara alguna duda en cuanto a su graficación, consulta tu asesor de Matemáticas.

Desarrolla una tabulación para cada una de las siguientes funciones, localiza los puntos en el plano cartesiano, bosqueja la curva que representa e identifica sus intervalos de concavidad, los valores aproximados de los puntos máximo o mínimo y de las intersecciones con los ejes cartesianos.

1. $f(x) = -x^3 + 450x^2 + 52500x$
2. $f(x) = -x^3 - x^2 + 3x - 2$

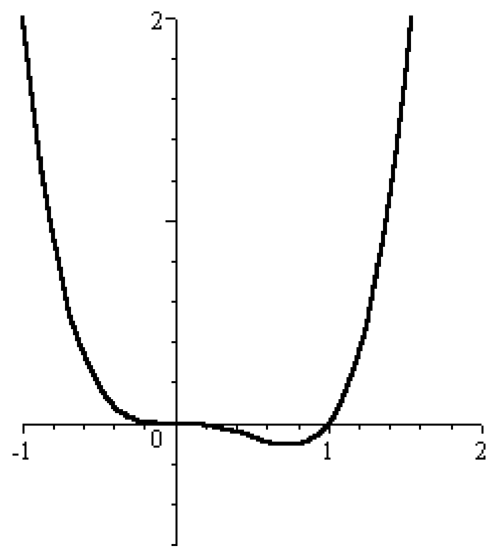


Función 1



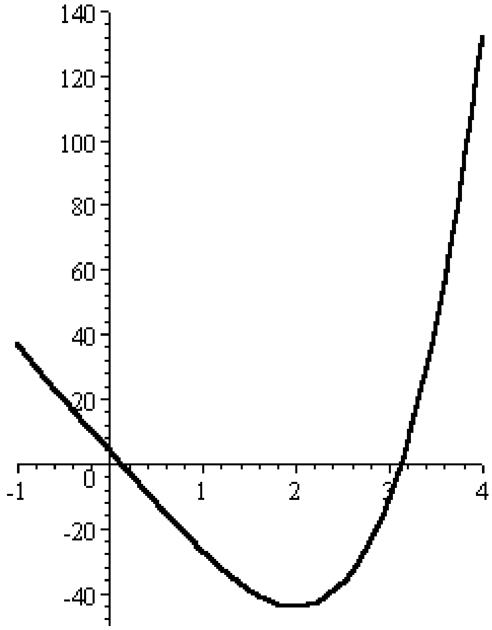
Función 2

3. $f(x) = x^4 - x^3$



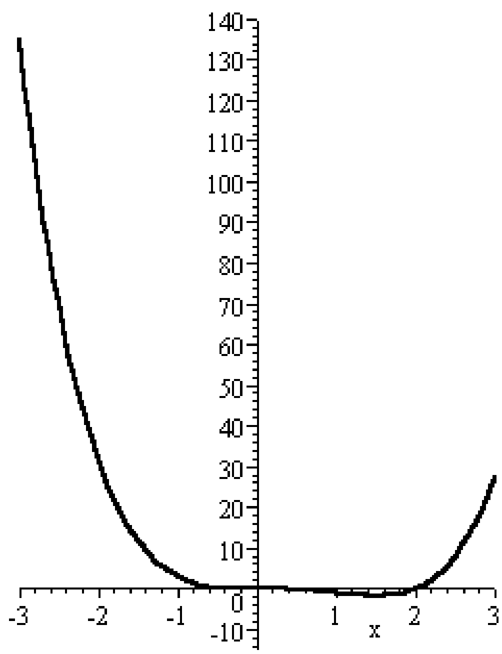
Función 3

4. $f(x) = x^4 - 32x + 4$



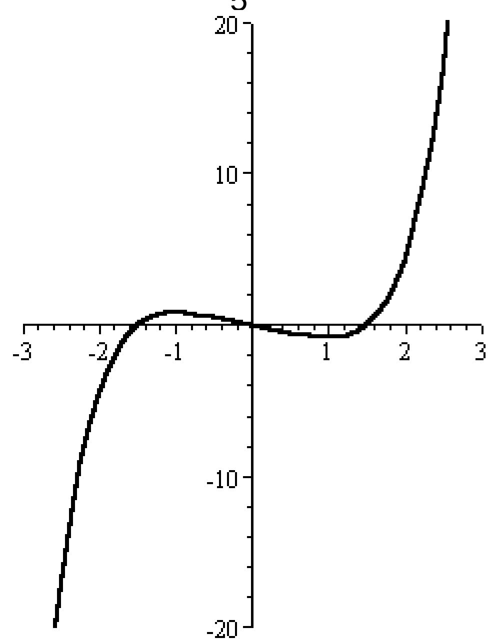
Función 4

5. $f(x) = x^4 - 2x^3$



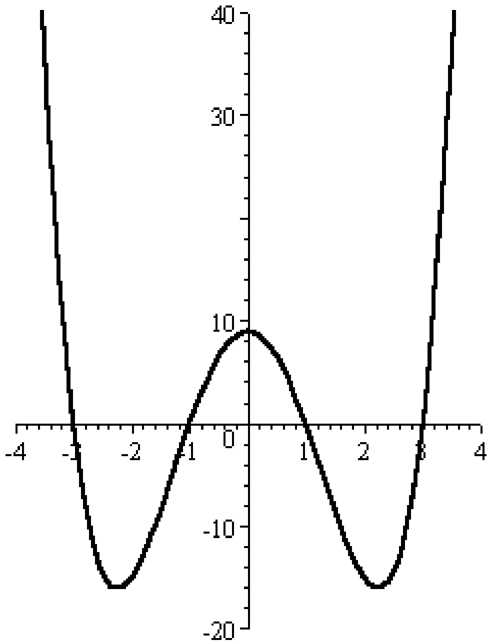
Función 5

6. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x$



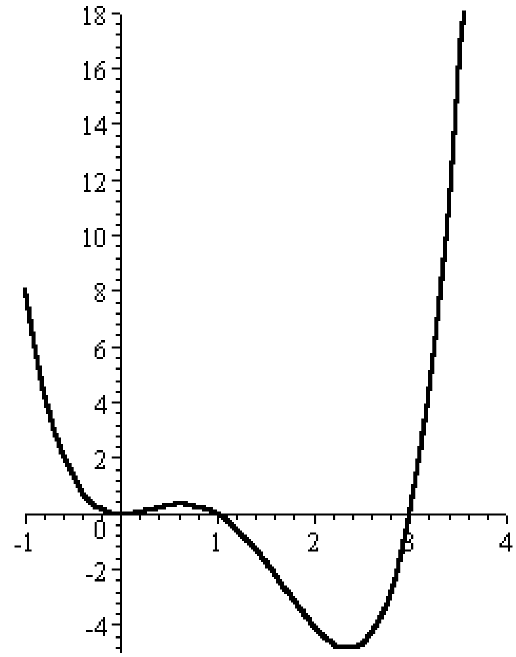
Función 6

7. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$



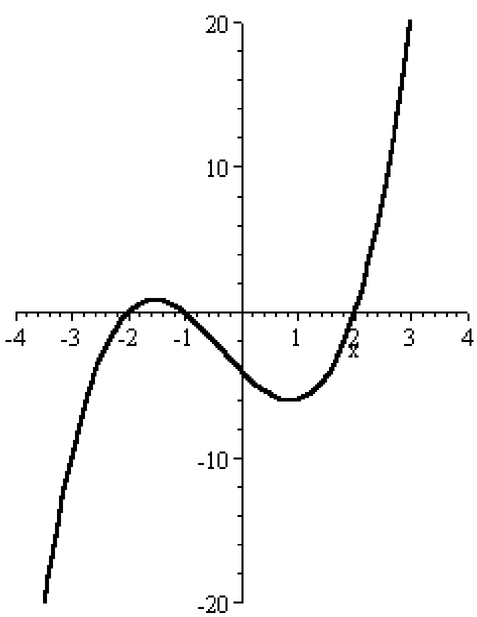
Función 7

8. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$



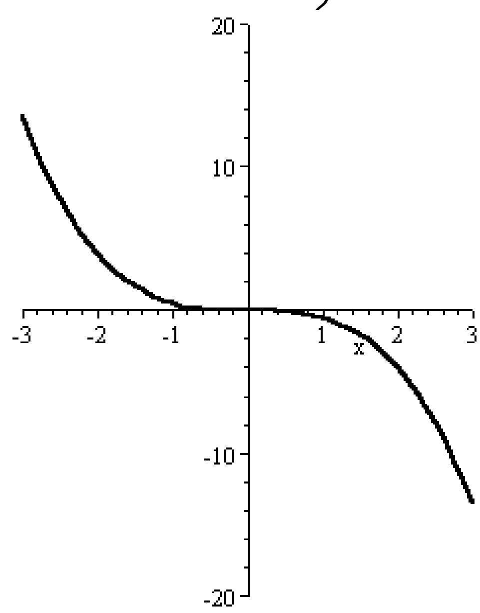
Función 8

9. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$



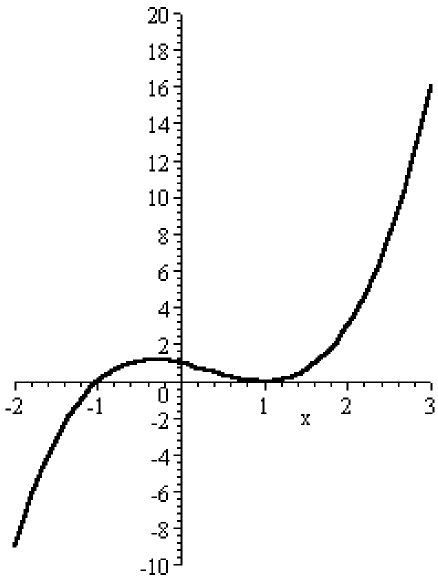
Función 9

10. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$



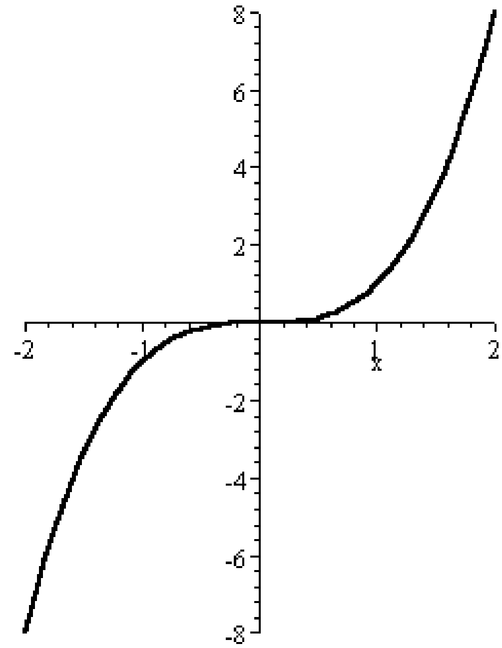
Función 10

11. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$



Función 11

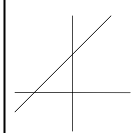
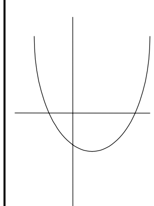
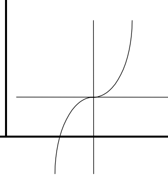
12. $f(x) = x^3$



Función 12

RECAPITULACIÓN

En el siguiente cuadro encontrarás una síntesis de los temas que acabas de estudiar:

Nombre de Función	Expresión Algebraica	Gráfica	Aplicaciones
Lineal	$f(x) = ax + b$		Depreciación de costos, diseño de dietas (para disminución de peso), cálculo de interés simple, etc.
Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$		Diseño de antenas de radar, trayectoria de proyectiles, antenas parabólicas, espejos para telescopios, túneles, puentes de suspensión; cálculo de áreas máximas, etc.
Cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$		Cálculo de volúmenes, crecimiento o decremento de población , etc.
Polinomial	Estas funciones no tienen una gráfica definida como las anteriores. $f(x) = anx^n + an - 1^{x^{n-1}} + ..a_1x + a$		Cálculo de momentos de flexión de vigas, diseño de estructuras, etc.

En el estudio de funciones es importante determinar el dominio y el rango, realizar una tabulación, obtener los puntos que sirven de referencia para esbozar la gráfica, los intervalos de concavidad, los puntos donde la curva corta al eje x y los puntos donde la curva tiene un máximo o un mínimo, o ambas cosas.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Verifica los conocimientos que has alcanzado realizando las siguientes actividades; si tienes alguna duda acude con tu asesor de matemáticas para que te pueda ayudar y orientar.

1. Para calcular la rapidez con que se llena una piscina se emplea una función como:

$$\boxed{f(x) = x^3 + 42x^2 + 216x}$$

Bosqueja su gráfica, encuentra su dominio y rango.

2. Para determinar la dosis de un medicamento que se debe suministrar a los pacientes con tos, se estudia cómo varía la velocidad del aire que circula por la tráquea como función de contracción del radio de ésta, ya que con la tos se contrae y dificulta la respiración.

   La función velocidad v del radio r de la tráquea tiene la forma:

$$V(r) = -\ 0.\ 2\ r^3 + 0.4$$

   Traza puntos en el plano cartesiano que delineen la función y describe su dominio y su rango.

3. Para calcular la producción máxima diaria de una mina de cobre se emplea una función del tiempo de operación:

$$P(t) = 54t - 0.09t^3$$

   Bosqueja su gráfica, y encuentra su dominio y rango.

4. En la Física moderna, el estudio de la cantidad de movimiento de una partícula de polvo se realiza mediante la función:

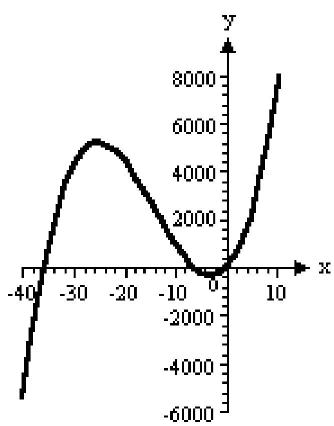
$$P(r) = \frac{40}{3}\pi r^3$$

Encuentra el dominio y el rango que corresponden a partículas reales y bosqueja la función.

AUTOEVALUACIÓN

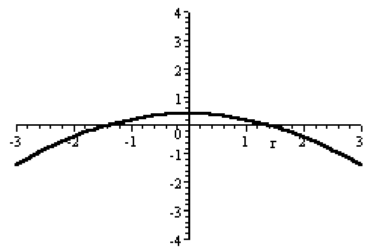
Compara las respuestas que diste a las Actividades de Consolidación. Si tienes alguna duda consúltala con tu asesor.

1. $f(x) = x^3 + 42x^2 + 216x$



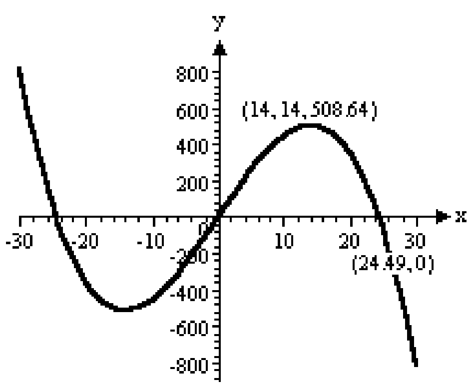
Dominio R^+
Rango R^+

2. $V(r) = -0.2r^2 + 0.4$



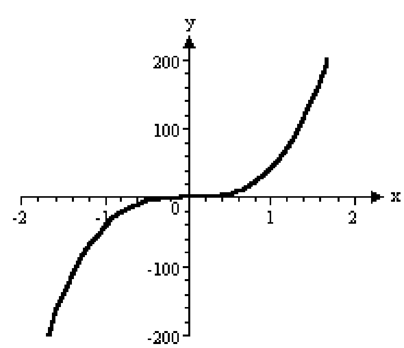
Dominio $(0, \sqrt[3]{2})$
Rango (0, 0.4)

3. $P(t) = 54t - 0.09t^3$



Dominio (0, 24, 49)
Rango (0, 508.64)

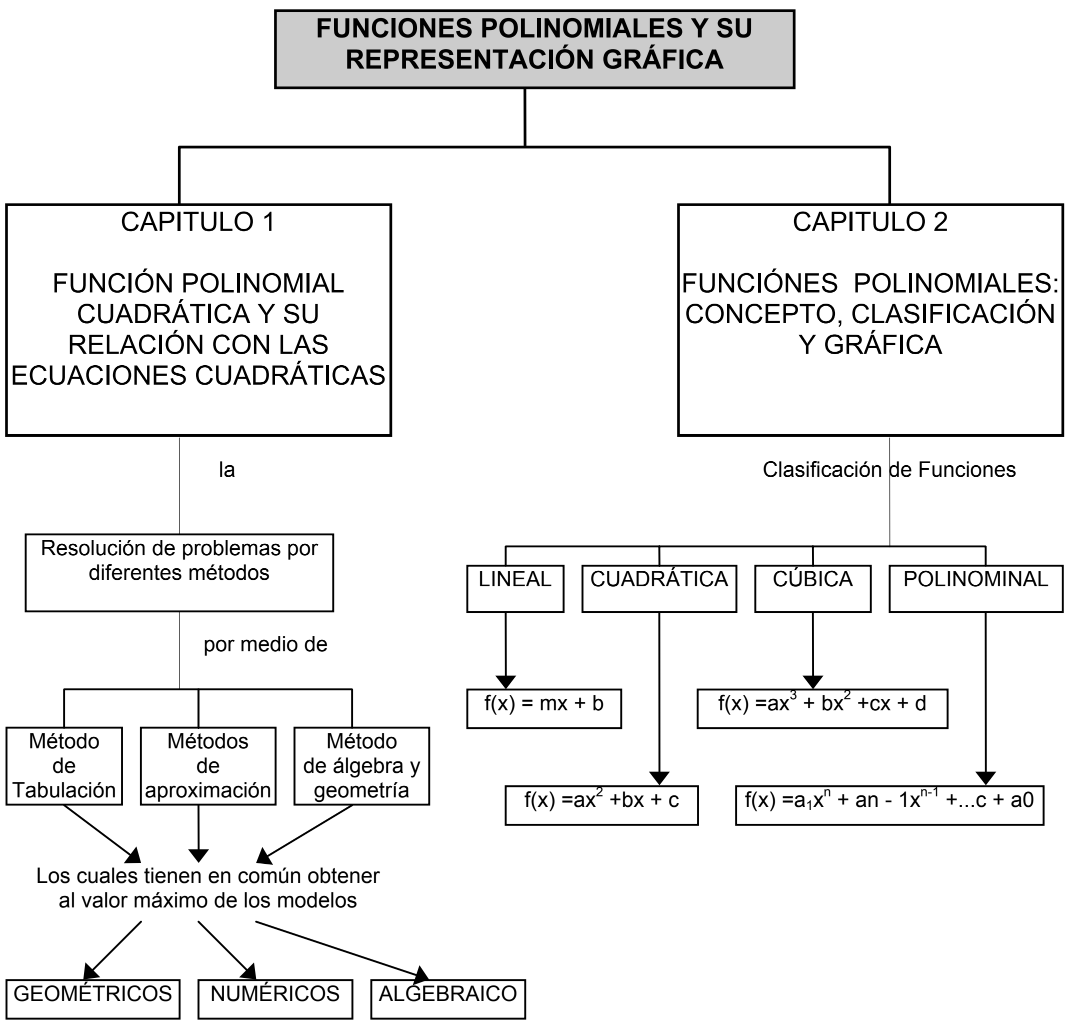
4. $P(r) = \frac{40}{3}\pi r^3$



Dominio $[0, \alpha)$
Rango $[0, \alpha)$

RECAPITULACIÓN GENERAL

En este apartado encontrarás una síntesis de ambos capítulos para que puedas recordar lo más importante:



ACTIVIDADES DE CONSOLIDACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios considerando los capítulos que ya estudiaste.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a) $5x^2 - 180 = 0$

b) $-2x^2 + \frac{1}{8} = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

d) $2x^2 + 3x = 0$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas empleando el método que en cada caso se indica.

Por factorización

a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $6x^2 - 5x = 6$

Por medio de completar el trinomio

c) $x^2 - 2x - 9 = 0$

d) $x^2 + 8x + \frac{108}{7} = 0$

Aplicando fórmula general

e) $x^2 + 3x = 12$

f) $-x^2 + 3x = 2$

3. Interpreta gráficamente las siguientes funciones, para que puedas determinar las característica que en cada caso se piden.

a) Determina las coordenadas del vértice, las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes, la concavidad, el eje de simetría y el valor máximo o mínimo de la función $f(x) = x^2 + x - 6$.

b) Construye la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ con un intervalo de valores para el dominio de $D\{-3 \leq X \leq 4\}$

Posteriormente indica los valores para el rango, la intersección de la curva con los ejes y los valores máximo y mínimo aproximados.

c) Construye la gráfica de la función $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ con un dominio $D\{-3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5\}$.

Posteriormente indica los valores para el rango, la intersección de la curva con los ejes y el valor mínimo.

4. Resuelve los siguientes problemas:

a) Un helicóptero que opera entre el aeropuerto y el centro de la ciudad cobra $100.00 y transporta 300 personas por día. El gerente estima que por cada $10.00 de aumento en el pasaje, pierde 15 pasajeros. ¿De cuánto debe ser la tarifa para obtener una máxima ganancia?. (Interpreta el modelo de la función y el resultado del problema).

b) Una base de un trapecio mide 5 cm más que la otra, mientras que la altura es de 4/5 de longitud de la base mayor. Encontrar las longitudes de las bases, si el área es de 100 cm^2. (Únicamente plantea la ecuación cuadrática).

c) Una embotelladora de jugos emplea envases tetra brick. El volumen de éstos envases deberá estar en función de la dimensión de su altura (h); de tal forma que el largo debe medir dos terceras partes de lo que mide la altura y el ancho debe medir dos quintas partes de lo que mide el largo.

Con base a la información, plantea la función cúbica que describe el volumen de los envases.

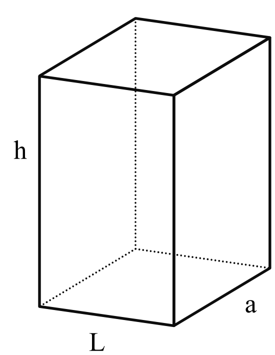


Figura 1.

AUTOEVALUACIÓN

A continuación podrás verificar los resultados de los ejercicios del apartado anterior.

1.
a) $x_1 = 6; x_2 = -6$

b) $x_1 = 1/4; x_2 = -1/4$

c) $x_1 = 0; x_2 = 3$

d) $x_1 = 0; x_2 = -3/2$

2.
a) $x_1 = 3; x_2 = -2$

b) $x_1 = 3/2; x_2 = -2/3$

c) $x_1 = 1 + \sqrt{10}; \quad x^2 = 1 - \sqrt{10}$

d) $x_1 = -4 + \frac{2}{\sqrt{7}}; x_2 \; -4 - \frac{2}{\sqrt{7}}$

e) $x_1 \frac{3 + \sqrt{57}}{2}; \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{2}$

f) $x_1 = 1; \quad x_2 = 2$

3.

a) Vértice P (-1/2, -25/4)

Intersección con X $\Rightarrow$ P, (2,0); P2 (-3,0)

Intersección con y, P(0, -6)

La gráfica es cóncava hacia arriba

Eje de simetría x = -1/2

Valor mínimo y = - 25/4

b) Rango $R(-24 \le y \le 18)$

Intersección con x $\Rightarrow$ $P_1(-2,0)$; $P_2(1,0)$; $P_3(3,0)$

Intersección con y $\Rightarrow$ $P_1(0,6)$

Valor máximo y = 8

Valor mínimo y = -4

c) Rango $R(-1 \le y \le 56)$

Intersección con x $P_1(1/2,0)$; $P_2(-1,0)$

Intersección con y P (0, -1)

Valor mínimo y = -1

4.

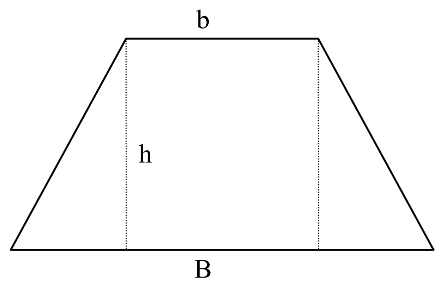
a) Modelo: y= (300-15x) (100+10x) $\Rightarrow$ $\boxed{y = -150x^2 + 1500x + 30000}$

ó $y = (300 - \frac{3}{2}x^2)(100 + x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y = -\frac{3}{2}x^2 + 150x + 30000}$

Para obtener la máxima ganancia, se debe cobrar $150.00
lo cual arroja $ 33, 750.00

b) Ecuación :

$$A=\frac{(B+b)h}{2}\Rightarrow 100=\frac{\left[\ (x+5)+x\ \right]\left[\ (\frac{4}{5}(x+5)\ \right]}{2}\Rightarrow\boxed{\frac{4}{5}x^{2}+6x+10=0}$$



c) Altura h x

Largo $l=\frac{2}{3}x$ .. Función $V(x)=\frac{4}{15}x^{3}$

Ancho $a=\frac{2}{5}x$

ACTIVIDADES DE GENERALIZACIÓN

La solución de los siguientes problemas te permitirá identificar la utilidad que tiene la función polinomial cuadrática para interpretar diversos fenómenos que se presenten en diferentes áreas por ejemplo: en Contabilidad, Física, Química, Ciencias Naturales, Electrónica, Geometría, entre otras.

1. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 34 m/s desde una altura de 210 m sobre la superficie de Marte; la altura (h) sobre la superficie (t) segundos después.

Está descrita por la función: $f(t) = -3t^2 + 34t + 210$; donde h = f (t)

¿La altura máxima alcanzada por la piedra, es?:

2. Si la base y la altura de un tinaco que mide 40 x 20 pulgadas aumentan la misma cantidad, el área de un nuevo tinaco será el doble del antiguo ¿cuáles son las dimisiones del nuevo tinaco?.

Nota: Para tu resultado puedes utilizar decimales.

3. Un patinadero mide 100 m de largo y 70 m de ancho. El propietario desea aumentar su área a 13000 m^2, agregando franjas de igual ancho a un lado y a un extremo, esto es con la finalidad de mantener el patinadero en su misma forma rectangular. Por lo tanto las dimensiones de las franjas deben ser:

4. Las dimensiones de las pantallas del televisor se dan comercialmente por la medida de su diagonal. Si la razón del ancho al largo debe ser de 3/4, ¿cuáles son las dimensiones (largo y ancho) de la pantalla de un televisor de 14 pulgadas?.

   Nota: Aplicar el Teorema de Pitágoras.

GLOSARIO

A continuación te presentamos la siguiente lista de palabras, las cuales se encuentran ordenadas alfabéticamente, en este glosario podrás consultar las palabras que no entiendas y así conocer su significado.

Abscisa: Es la coordenada horizontal que determina la posición de un punto en el plano cartesiano.

Cóncavo: Figura plana, o cilíndrica que tienen sus líneas o superficie hacia adentro.

Desplazamiento: Recorrido que hace un móvil de un punto a otro.

Dominio: Son los valores que adquiere la variable independiente en una función

Funcion Lineal: Es un modelo algebraico que expresa la relación entre variable independiente con grado uno y la dependiente de un problema.

Intersección: Punto o línea donde se cruzan dos o más líneas.

Intervalo: Espacio entre dos tiempos, números, variables o lugares.

Método: Proceso seguido para alcanzar un objetivo especialmente para descubrir la verdad y sistematizar los conocimientos.

Parábola: Lugar Geométrico de todos los puntos que equidistan de un un punto fijo y de una recta llamada directriz..

Rango: Son los valores que adquiere la variable dependiente en una función.

Rectilíneo: De líneas recta.

Simetría: Proporción adecuada de las partes de un todo entre sí y con el todo mismo.

Tabular: Expresar por medio de tablas, valores u otros datos.

Variable: Dependiente: son los valores obtenidos para la variable “y”.

Varaible: Independiente: son los valores asignados a la variable “x”.

Vértice: Punto en que ocurren tres o mas planos.

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

A continuación te presentamos un listado de libros de consulta, para que puedas recurrir a ellos como apoyo a tu aprendizaje.

BALDOR, Aurelio. Álgebra, Publicaciones Cultural. 1985.

BARNET, Raymond A . Álgebra y Trigonometría. 2a. De. En español. Trad. Diego Edmundo Barahona Peña y María González Cerezo. Mc. Graw-Hill, México 1978.

BERISTÁIN, Márquez Eloísa y Campos, Campos Yolanda. Relaciones y Funciones. Colección Educación Media Superior, Mc Graw-Hill, 1990.

BRITTON, Jack T., y Bello, Ignacio . Álgebra y Trigonometría Contemporánea. Harla, México, 1988.

HOCKETT, Shirley, y Sternstein Martín. Cálculo por Objetivos y Aplicaciones. CECSA, México, 1982.

LOVAGLIA, Florence. Álgebra. Editorial Harla. México.

PHILLIPS, Elizabeth, Thomas Butts; Shaughnessy. Álgebra con Aplicaciones. Ed. Harla, México 1978.

SERIE, Anfossi y Flores, Meyer. Curso de Álgebra. Editorial Progreso S.A.

SCHOLS, Council. Modelos Polinomiales. Cecsa, México, 1985.

SWOKOWSKI; Earl W.. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 2a Ed.., Iberoamericana, 1986.

COLEGIO DE BACHILLERES

MATEMÁTICAS II

FASCÍCULO 3. ANÁLISIS DE FUNCIONES:
EJEMPLOS INTERESANTES

Autores: Emigdio Arroyo Cervantes
Guillermo Gómez Alcaraz
Juan Matus Parra

COLEGIO DE
BACHILLERES

COLABORADORES:
Mario Arturo Badillo Arenas
Juan Pérez Rodríguez

Asesoría Pedagógica
Dora Ma. Mireles Alvarado

Revisión de contenido
Guadalupe Xochitl Chávez Pérez
Miguel Angel Marrufo Chan

Diseño Editorial
Leonel Bello Cuevas
Javier Darío Cruz Ortiz

Í N D I C E

INTRODUCCIÓN

En este fascículo desarrollarás el concepto de función, elaborarás su gráfica e identificarás sus elementos (regla de correspondencia, dominio, contra dominio e imagen), diferenciarás funciones continuas y discretas desarrollando habilidades de análisis, abstracción e integración en la representación y solución de situaciones concretas, lo anterior te ayudará a que comprendas los modelos algebraicos que permiten analizar e interpretar las relaciones entre los elementos de problemas y llegar a su solución para adquirir los conocimientos adecuados.

El fascículo está divido en dos capítulos; el primero de ellos se titula “La Función Exponencial y Función Logarítmica”, temas que han sido de gran ayuda en diversos campos de estudio, por ejemplo, las matemáticas se han desarrollado a través del tiempo y del espacio en la medida en que el hombre ha tenido la necesidad de resolver ciertos problemas cotidianos o bien para cuantificar un fenómeno natural que le interesa comprender.

Asimismo, ciencias como la Física, Química, Sociales, Economía, Administrativas, etcétera le han planteado una serie de problemas que, para darle solución ha tenido que inventar nuevas matemáticas, dándole así un mayor impulso a esta ciencia.

A las Matemáticas se debe el estudio de la relatividad de Einstein, de la microfísica, de la transformación del Uranio U-238 en otros elementos mediante su decaimiento, la predicción de elementos ultrauránicos con la vida media de microsegundos, los viajes espaciales , la tecnología avanzada en las comunicaciones y en la electrónica etcétera.

Cómo te habrás dado cuenta que tan interesante y necesario es conocer la solución de diferentes problemas por medio del aprendizaje de las funciones, es por esto y más; que nos revela la necesidad e importancia que tiene el estudio de este fascículo.

Para el segundo capítulo cuyo título es “Las Sucesiones, Recurrencia e Iteraciones” se estudiarán temas como: sucesiones numéricas, las maneras de generar una sucesión Aritmética, Suma Parcial de una Sucesión Aritmética y la Sucesión Geométrica, y la suma parcial de una Sucesión Geométrica, por último la Recurrencia de Iteraciones.

Algunos ejemplos donde puede aplicarse estos conocimientos es en lugares donde trabajaran con grandes hornos, como; panaderías industriales y donde se necesita saber la hora en que ocurrió el ilícito, pues conociendo la temperatura el cuerpo del delito puede determinarse el instante en que ocurrió éste. Lo que está detrás de este tipo de proceso en la ley de enfriamiento de NEWTON modelo cuya solución se expresa a través de la función exponencial.

CAPÍTULO 1: FUNCIONES EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL
1.2 FUNCIÓN INVERSA
1.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA
1.3.1 Propiedades de los logaritmos

P R O P Ó S I T O

En los fascículos anteriores estudiaste algunas funciones polinomiales y sus características, como por ejemplo; función constante, función discreta, función lineal, función continua, función discreta, función cuadrática, función polinominal, cúbica y de 4o. grado y sus características.

En este capítulo:

¿QUÉ APRENDERÁS?

Conocerás y desarrollarás la solución de diversos tipos de problemas que, de acuerdo con su regla de correspondencia, puede ser: función exponencial, función logarítmica y función inversa correspondiente a las funciones trascendentales.

¿CÓMO LO LOGRARÁS?

Con el estudio previo de las leyes de los exponentes y las propiedades de los logaritmos además de la representación de puntos en el plano cartesiano, de igual manera es necesario que te apoyes en problemas que conduzcan al planteamiento de funciones polinomiales como la que has revisado y estudiado hasta el momento (función lineal, cuadrática entre otras otras).

¿PARA QUÉ TE VA A SERVIR?

Esto te ayudará a comprender mejor los conceptos y la relación que existe entre la función logarítmica y la exponencial conjuntamente con sus propiedades; con ello podrás resolver problemas cuyo comportamiento describa cierta regla de correspondencia para que en un momento determinado puedas solucionar y/o interpretarlas.

SIMBOLOGÍA

A continuación aparece una lista de algunos símbolos que se estudiarán en este capítulo, la cual tiene como finalidad que la consultes las veces que sea necesario, ya que esto te permitirá conocer su significado y/o comprender mejor los temas claves que se manejan en él.

SÍMBOLO	SIGNIFICADO
$>$	Mayor que
$<$	Menor que
t	Tiempo
$\in$	Pertenece
$\approx$	Aproximadamente igual
U	Unión de conjuntos
Z^+	Conjunto de números enteros positivos
R	Conjunto de números reales
$A \to B$	A corresponda B = A en B
y =f(n)	Reglas de correspondencia
n^x	Número que indica la potencia a que se ha de elevar una cantidad.

CAPÍTULO 1: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

En el fascículo anterior estudiaste las funciones: Constante, Discreta y Continua. Conjuntamente con su clasificación y representación gráfica de las mismas. Estas te permitieron comprender, interpretar y calcular el momento de reflexión de una viga de acero, determinar la dosis de un medicamento que se debe suministrar a ciertos pacientes, determinar el volúmen de una caja sin tapa. Etcétera.

Como te habrás dado cuenta el aprendizaje y/o conocimiento de las funciones que hasta el momento se han estudiado son importantes y necesarias conocerlas, ya que son de gran ayuda para solucionar problemas que se presentan en nuestra vida diaria y en sociedad. Ahora en este fascículo conocerás y desarrollarás la solución de diversos problemas que dependerán de la regla de correspondencia que presente cada función.

A continuación te presentamos un ejemplo donde se aplica el aprendizaje que este capítulo te proporciona en la vida real.

LA DEPRECIACIÓN (Disminución del valor o precio)

Un ruletero compró su taxi ecológico de acuerdo con las recomendaciones del gobierno de la ciudad de México y, con base en sus conocimientos matemáticos, realizó los siguientes cálculos sobre los ingresos económicos del primer mes de trabajo:

Ingreso promedio diario	=	$ 140.00
Gastos de combustible y mantenimiento	=	$ 35.00
Gastos sobre la devaluación del vehículo	=	25.00
Sueldo por 8 hrs. De trabajo de chofer	=	80.00
Total	=	$280.00

Consideró que si a su vehículo le daba un buen mantenimiento su vida útil sería de seis años, y que con lo que ahorraría por devaluación podría adquirir otro automóvil, pero ¡oh sorpresa!, al final del quinto año su mantenimiento ya no era redituable porque permanecía más tiempo en el taller que trabajando y los ahorros hasta ese momento no alcanzaban por la compra de otro. Sus cálculos para planear su futuro fueron correctos,

pero ideales, es decir, en la práctica no ocurrieron en forma lineal como supuesto. Esto se debe a que sus conocimientos sobre la devaluación (depreciación) no eran suficientes, toda vez que ignoraba que para vehículos expuestos a trabajo rudo, como el transporte público, la función que erige a la depreciación es de tiempo exponencial, la cual le hubiera permitido realizar un cálculo exacto.

En este capítulo aprenderás a calcular la depreciación y comprenderás la relación que tiene con otros conceptos matemáticos.

1.1 FUNCIÓN EXPONENCIAL

En ocasiones nos enfrentamos a diversos problemas con el que se enuncia en el apartado anterior (depreciación), sobre los cuales nuestros conocimientos no siempre son suficientes, pero cuya solución se facilitaría con la aplicación de una función específica llamada exponencial, de la que en seguida se presentan diferentes ejemplos para su mero entendimiento.

Ejemplo 1. El crecimiento de un árbol

Al iniciar su educación primaria, el niño Iván Gerónimo sembró un árbol dentro de programa de reforestación que llevó a cabo la escuela en que estudiaba, el que cuidó con esmero durante los seis años de su permanencia en ella. Posteriormente, al finalizar sus estudios e ir a verlos exclamó ¡qué grande! Contó sus ramas y registró los datos como se muestra en la figura No. 1.

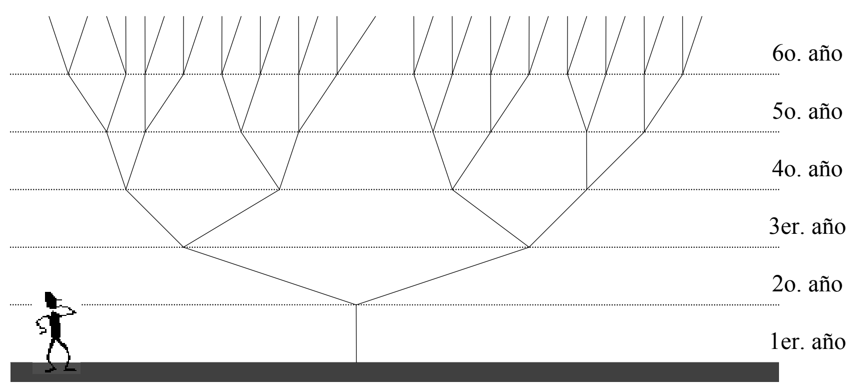


Figura 1.

Advirtió que el número de ramas había aumentado cada año y que las cantidades eran múltiplos de 2, por lo que ideó una representación equivalente en potencia de 2, como se indica en la tabla 1.

Tabla 1.

Núm. años	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . . .*n*
Número d e ramas	1	2	4	8	16	..					. . . .*y*

Equivalencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4				..	..	. . . . .?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Elabora los siguientes ejercicios:

a) Cuenta el número de ramas para el 5o. y 6o. Año (figura 1) y regístralo en la tabla 1.

b) Si el crecimiento del árbol siguió la misma tendencia observada en la figura 1, entonces completa el número de ramas que faltan en la tabla 1. (En relación con el crecimiento del árbol se plantean diferentes interrogantes que puedes contestar con ayuda de la tabla 1 o bien, al establecer una expresión matemática, predecir los resultados de lo que posiblemente ocurrirá en años futuros.)

c) Si representamos el número de años de crecimiento del árbol con $\underline{n}$, y el total de ramas que tiene en el enésimo año con $\underline{y}$, entonces escribe en la última columna de la tabla la expresión matemática para calcular el número de ramas para cualquier año.

d) ¿Cuántas ramas tendrá el árbol al cumplir 20 años?

e) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el árbol tenga 4 096 ramas?

Posteriormente, Iván Gerónimo tras estudiar la Secundaria y con nuevos conocimientos matemáticos, visitó el árbol que había sembrado en la escuela primaria donde estudió, contó el número de ramas y dedujo que éste creció durante dos años más desde la última vez que lo vio. Con estos datos generalizó el fenómeno del crecimiento de un árbol mediante la siguiente función:

Dominio de la función: A = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$, es el número de años en que se registro el crecimiento.

Imagen de la función: I = $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$, es el número de ramas por año.

Regla de correspondencia: $Y = f(n) = 2^{n-1}$ para $n = 1, 2,...8$, es la expresión.

matemática que define la función y a la vez predice ¿Cuántas ramas se tendrán al año “n”?.

La regla de correspondencia, también llamada regla para hallar imágenes, determina la imagen de cada elemento del dominio y con estos valores forma parejas ordenadas como se observa en la tabla 2.

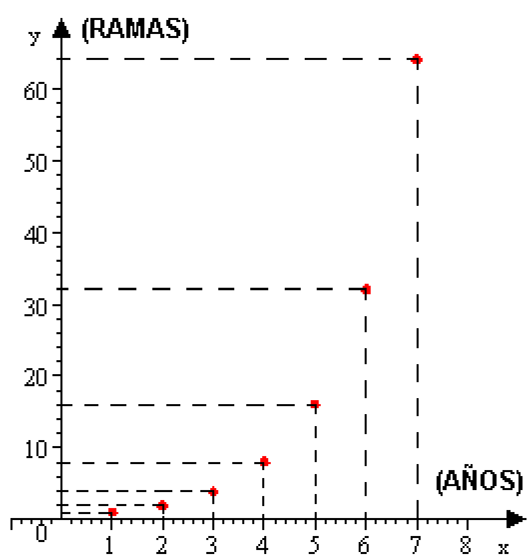
Años	$f(n)=2^{n-1}$			[n, f(n)]
1	$f(1) = 2^{1-1}$	$= 2^0 = 1$		(1, 1)
2	$f(2) = 2^{2-1}$	$= 2^1 = 2$		(2, 2)
3	$f(3) = 2^{3-1}$		= 4	(3, 4)
4	$f(4) = 2^{4-1}$		= 8	(4, 8)
5	$f(5) = 2^{5-1}$		= 16	(5, 16)
6	$f(6) = 2^{6-1}$		= 32	(6, 32)
7	$f(7) = 2^{7-1}$		= 64	(7, 64)
8	$f(8) = 2^{8-1}$		= 128	(8, 128)

Tabla 2

Tras establecer la relación entre el número de años de crecimiento del árbol y las ramas que tiene en cada año se obtiene el siguiente conjunto de parejas ordenadas que representa la función del crecimiento.

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 8), (5, 16), (6, 32), (7, 64), (8, 128)\}.$$

Como cada pareja ordenada representa un punto en el plano coordenado, al localizar dichas parejas se obtiene la siguiente representación gráfica de la función.



Gráfica 1.

En ésta se ve que conforme los años aumentan, el número de ramas también lo hace, cada caso en que la función es creciente en todo su dominio. Asimismo, para representar todos los puntos es necesario cambiar la escala del eje vertical.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve los siguientes ejercicios:

a) Analiza la gráfica y establece sus propiedades

b) ¿Por qué el dominio es A = $\{1, 2, 3, ...8\}$?

c) ¿Por qué no hay puntos en la parte negativa del eje horizontal?

d) ¿Por qué la gráfica de la función son puntos aislados?

Las funciones cuya gráfica en el plano coordenado son puntos aislados se llaman discretas, es decir, su valor es un número entero no habiendo continuidad en la gráfica.

La regla de correspondencia de la función anterior es:

$$f(n) = y = 2^{n-1} \qquad (1)$$

y si se le compara con la regla de correspondencia de la función

$$f(n) = y = n^2 \qquad (2)$$

se concluye que en la primera la variable independiente es el exponente de la base y en la segunda la variable independiente es la base, la cual forma la función cuadrática.

La primera es una función trascendente y la segunda, una *función algebraica*. De lo anterior se infiere:

Que en toda función exponencial, la variable independiente es el exponente de la base.

Ejemplo. 2 La representación de la amiba

Los estudios biológicos sobre un tipo de amiba nociva para la salud descubrieron en ésta las siguientes características:

a) Su reproducción es por bipartición, es decir, una se divide en dos, cada una en otras dos, etcétera.

b) Se reproducen en periodo de 20 minutos.

c) Su tamaño es del orden de milimicras, por lo que el ojo, humano no la detecta.

d) Su concentración es de 10 millones por milímetro cúbico.

e) Para su reproducción requiere de un medio acuoso llamado *caldo de cultivo*.

El estudio de la reproducción de la amiba se hace a través de una muestra de un milímetro cúbico; sin embargo con sólo estudiar una es suficiente, ya que los resultados de una se extrapolan para los 10 millones. Analicemos la reproducción de la amiba en la tabla 3.

Periodo de 20 min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8....t
Reproducción	1	2	4	8	16	32	. . .	. . .	. . . ?
Equivalencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	. . .	

Tabla 3.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes ejercicios con base a los siguientes:

a) Completa la tabla anterior para tres horas y determina el número de amibas para cada periodo. Observarás que ésta es similar la tabla del ejemplo 1.

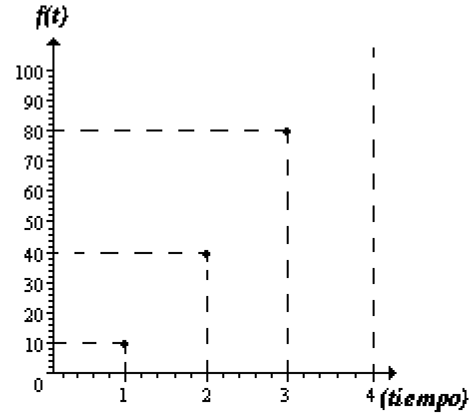
b) Si lo representa a los primeros 10 millones de amibas, y al total de éstas y t a un periodo de 20 minutos ¿cuál es la expresión exponencial que nos permitirá determinar el número de amibas en cualquier período t?

c) La expresión resultante en el inciso anterior es la regla de correspondencia de la función que define el problema; compárala con la correspondiente al ejemplo 1 y explica tus observaciones. (Para representar la gráfica de la función, primero se calculan algunas imágenes como se observa en la tabla 4, en que t son periodos de 20 minutos).

t	$f(t) = 10^1\ (2^t)$	[t, f(t)]
0	$f(0) = 10'\ (2^0) = 10'\ (1) = 10'$	(0, 10)
1	$f(1) = 10'\ (2^1) = 10'\ (2) = 20'$	(1, 20)
2	$f(2) = 10'\ (2^2) = 10'\ (4) = 40'$	(2, 40)
3	$f(3) = 10'\ (2^3) = 10'\ (8) = 80'$	(3, 80)
4	$f(4) = 10'\ (2^4) = 10'\ (16) = 160'$	(4, 160)
5	$f(5) = 10'\ (2^5) = 10'\ (32) = 320'$	(5, 320)
.	.	.
t		[t, $f(t)$]

Tabla 4.

Nota: 10' son 10 millones de amibas por mm^3



Gráfica 2.

d) Determina el dominio y la imagen para t = 3 horas en periodos de 20 minutos. (La gráfica de la función nuevamente son puntos aislados, lo cual se debe a que t son periodos de 20 minutos; ¿entre punto y punto de la gráfica no hay reproducción? Si analizamos cómo se está realizando ésta, concluiremos que sí la hay, es decir, los periodos de 20 minutos pueden iniciar en cualquier momento y al finalizar obtendremos una reproducción promedio).

e) Determina el número de amibas reproducidas tras 50 minutos. Localiza el punto en la gráfica. (De acuerdo con el resultado que obtuviste al colocar el punto en la gráfica habrás comprobado que hay muchos puntos que no se han calculado presentes en la gráfica).

Ejemplo 3. La explosión demográfica

En la sierra norte de Puebla hay un pintoresco municipio cuya población ha aumentado constantemente por personas atraídas por sus bellos paisajes. Éste, en 1980, tenía 10 mil habitantes, y en el censo de 1981 registró un incremento del 10%, mismo caso que en 1982 y 1983. Con estos datos podemos determinar la función de crecimiento de la población, para la cual representaremos con Ho a 10 mil habitantes. Veamos la tabla 5, donde: i es la tasa de crecimiento anual, es decir, i = 10% = 0.1; y n el número de años.

Tabla 5.

Al final de	*Incremento de la población*
1980	$H = H_0 = 10\,000 = H_0\,(1+i)^0$
1981	$H = Ho + Ho\textit{i} = Ho\,(1+i) = Ho\,(1+i)^1$
1982	$H = Ho\,(1+i) + Ho\,(1+i)i = Ho\,(1+i)\,(1+i) = -Ho\,(1+i)^2$
1983	$H = Ho\,(1+i)^2 + Ho\,(1+i)^2i = Ho\,(1+i)^2\,(1+i) = -Ho\,(1+i)^3$
1984	$H = Ho\,(1+i)^3 + Ho\,(1+i)^3i = Ho\,(1+i)^3\,(1+i) = -Ho\,(1+i)^4$
1985	**...**
1986	**...**
n	**...**

Observa que el factor entre paréntesis (1+*i*) es la base de la función exponencial y que su exponente crece en una unidad por cada año transcurrido; que la población al final de cada año sirve de base para calcular el siguiente año, para lo cual se multiplican por la tasa *i* para determinar el incremento, que se suma a la cantidad ya existente; para obtener la expresión final más compacta se efectúa una factorización; el primer paréntesis tiene exponente cero, el cual representa el año cero, año que se inicia el análisis. Recuerda que todo número elevado a un exponente cero, vale uno.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza los siguientes problemas

a) ¿Cuántos habitantes habrá en el año 2000, suponiendo que la tasa de crecimiento es la misma y no hay defunciones?
b) ¿En qué año habrá una población de 100 000 personas haciendo la misma suposición del inciso a?

Para hallar la representación gráfica en el plano coordenado, primero se calcula el número de habitantes por año, que representa la imagen de cada año, valores con los cuales formaremos las parejas ordenadas.

años	$f(n) = Ho(1+i)^n$	$[n, f(n)]$
1980	$f(0) = 10\,000\,(1.1)^0 = 10\,000$	(0, 10 000)
1981	$f(1) = 10\,000\,(1.1)^1 = 11\,000$	(1, 11 000)
1982	$f(2) = 10\,000\,(1.1)^2 = 12\,100$	(2, 12 100)
1983	$f(3) = 10\,000\,(1.1)^3 = 13\,310$	(3, 13 310)
1984	$f(4) = 10\,000\,(1.1)^4 = 14\,641$	(4, 14 641)
1985		
1986		
n	$f(n) = Ho\,(1+i)^n$	$[n, f(n)]$

Tabla 6.

c) Completa la tabla para los años que faltan. (Para obtener la gráfica en el plano coordenado se deben localizar los puntos de cada pareja ordenada).
d) ¿Podríamos unir los puntos? ¿Por qué?
e) ¿Tendrá sentido la parte negativa de *n*?

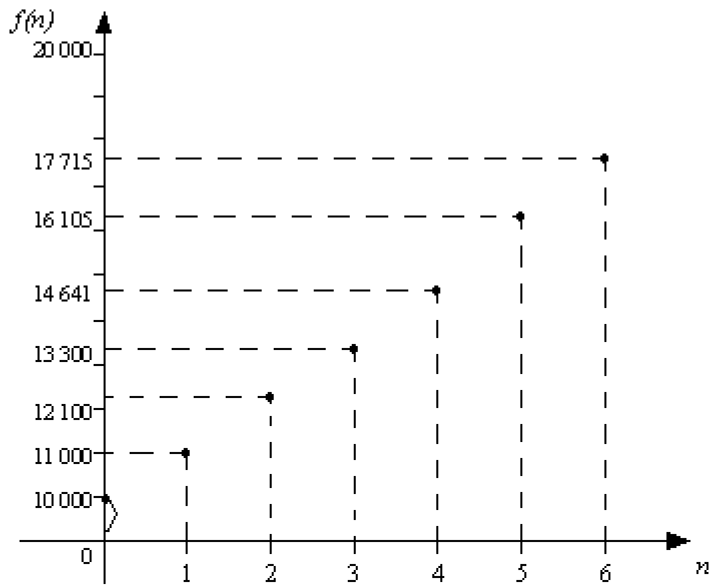
De la gráfica se deduce que el dominio es:

$$Z^+ U\{0\}.$$

El condominio de Z^+ (conjunto de enteros positivos).
La regla de correspondencia:

$$\boxed{f(n) = Ho\,(1+i)^n.}$$

Y la función más general:
$f: Z^+ U\{0\} \rightarrow Z,^+$ con $f(n) = Ho\,(1+i)^n$.



Gráfica 3.

La función es discreta porque su gráfica en el plano coordenado son puntos aislados, toda vez que cada punto representa un número de personas y no podemos hablar de fracciones de persona. Por lo tanto, en la vecindad de cada punto existe el vacío.

Es creciente en todo su dominio, porque al comparar la regla de correspondencia con los problemas anteriores, vemos que hay diferencia; sin embargo:

Es una función exponencial porque la variable independiente *n* es el exponente de la base (1+*i*).

Ejemplo 4. La difusión de la información

El cofre de Perote, volcán por muchos años inactivo, en los últimos días ha visto cierta actividad, por lo que científicos de la UNAM realizaron estudios para determinarla, descubriendo que a las 10:00 horas del 15 de junio de 1992 haría erupción y que la dirección de la lava era hacia la ciudad de Teziutlán, cuya población es de 90 000 familias. Los estudios concluyeron que en la madrugada del día 16 urgía evacuar la ciudad porque la descarga de lava amenazaba con cubrirla. Por lo anterior, la autoridad municipal recibió la orden de evacuar a las 6:50 horas y, gracias a que tenía conocimientos matemáticos, realizó cálculos como se observa en la tabla 7.

Periodos de 15 min.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
Familias avisadas	1	3	9	27	81	243	729					
Equivalencia	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7				

Tabla 7.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve lo siguiente

a) Completa la tabla.
b) Establece la expresión para *n* periodos.
c) Si la difusión informativa inició a las 7:00 horas, ¿en qué período todas las familias habían sido avisadas?
d) ¿Qué tiempo tenían las últimas familias para evacuar?(Para representar la gráfica en el plano coordenado se calcula la imagen de cada elemento del dominio y se forman las parejas, que son los puntos de la gráfica).

n	$f(n) = 3^n$	$[n, f(n)]$
0	$f(0) = 3^0 = 1$	(0, 1)
1	$f(1) = 3^1 = 3$	(1, 3)
2	$f(2) = 3^2 = 9$	(2, 9)
3	$f(3) = 3^3 = 27$	(3, 27)
4	$f(4) = 3^4 = 81$	(4, 81)
5	$f(5) = 3^5 = 243$	(5, 243)
6	$f(6) = 3^6 = 729$	(6, 729)
7	$f(7) = 3^7 = 2\,187$	(7, 2 187)
8	$f(8) = 3^8$	
9	$f(9) = 3^9$	
10	$f(10) = 3^{10}$	
n	$f(n) = 3^n$	$[n, f(n)]$

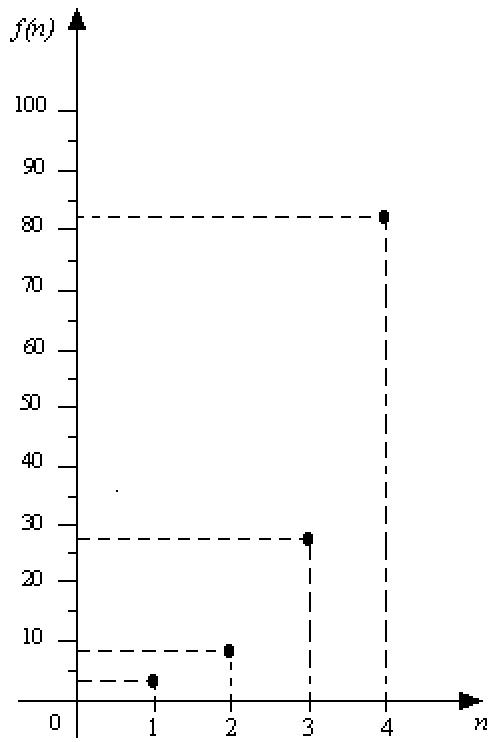
Tabla 8.

La generalización de la función es:

$$\boxed{f: A \rightarrow B \text{ con } f(n) = 3^n}$$

creciente en todo su dominio. Es una función discreta porque su representación gráfica son puntos aislados en el plano coordenado.

e) Determina el dominio.
f) Determina el codominio.
g) La regla de correspondencia.
h) Establece la función como conjunto de parejas ordenadas.



Gráfica 4.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Para reafirmar lo aprendido, en los siguientes problemas define la función general que los rige, determina en cada uno el dominio, codominio, regla de correspondencia y traza su gráfica, la que debes analizar y determinar sus características:

1. La función de crecimiento de un árbol que produce cada año tres ramas de cada una.
2. La función de crecimiento de la población de una ciudad de 50 000 habitantes con una tasa de crecimiento *i* = 15%.
3. La difusión de la información en una ciudad de 100 000 habitantes si cada persona le avisa a cuatro personas.
4. La función que define el número de descendientes en cualquier generación toda vez que debido al control natal cada familia sólo tuvo dos hijos. En caso detener alguna duda, consulta con tu asesor.

Ejemplo 5. Vida media del material radiactivo

Al analizar la vida media de un material radiactivo (tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de dicho material), se determinó que éste cada año disminuía a la mitad. Establece la vida media del radioisótopo. Para ello, primero se analizará lo que sucede con un kilogramo de material tomado para el tiempo *t*, periodos de 20 años. Veamos la tabla 9.

Al final de cada 20 años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	..t
Kg de material	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$				
Equivalencia	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}				

Tabla 9.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Elabora lo siguiente:

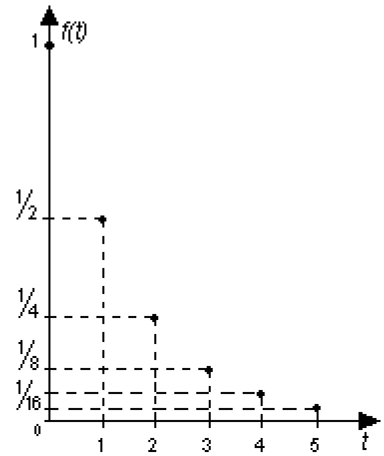
a) Completa las columnas que faltan en la tabla.
b) Determina la regla de correspondencia para *t* periodos.
c) Establece la función general de la vida del radioisótopo.

Analiza el comportamiento de la tabla (10) y establece el dominio si definimos la función de la vida media de un radioisótopo por:

$$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

Periodos de 20 años	$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{2^t}$	$[t, f(t)]$
0	$f(0) = 1$	(0, 1)
1	$f(1) = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$f(2) = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$f(3) = \frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$
4	$f(4) = \frac{1}{16}$	$\left(4, \frac{1}{16}\right)$
5	$f(5) = \frac{1}{32}$	$\left(5, \frac{1}{32}\right)$
6	$f(6) = \frac{1}{64}$	$\left(6, \frac{1}{64}\right)$
7		
8		
9		
t	$f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$	$[t, f(t)]$

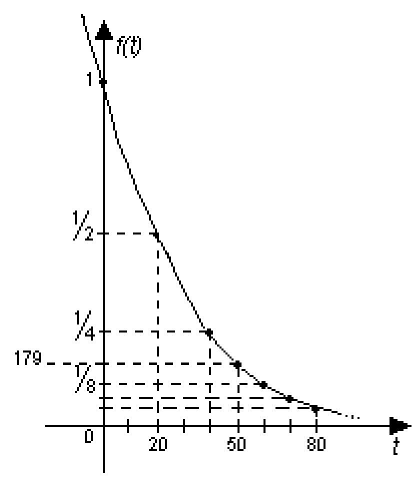
Tabla 10.



Gráfica 5.

d) Calcula las parejas que faltan.
e) ¿Por qué la función es discreta?
f) ¿Qué comportamiento tiene la función: creciente o decreciente? ¿por qué?

Si en lugar de tomar periodos de 20 años, tomamos un tiempo continuo, es decir $t \in \mathbf{R}$, entonces la gráfica de $f(t)$ es una línea continua, como se muestra en la gráfica 6.



Gráfica 6.

Con esta gráfica podemos calcular, aproximadamente, el material radiactivo que se tiene y el que se ha desintegrado.

Veamos otro ejemplo: ¿Qué cantidad de radioisótopo habrá después de 50 años?

Solución

Trazamos una línea perpendicular en el año 50 hasta tocar la gráfica; en este punto se traza una línea horizontal hasta tocar el eje vertical, siendo este punto del eje material que no se ha desintegrado. Para determinar éste, restamos del total la cantidad sin desintegrar .

Las gráficas ahorran tiempo en el cálculo, mas tienen el inconveniente de que el valor que se determina es aproximado, como en nuestro ejemplo donde es de aproximadamente 179 gr, resultado diferente si lo hacemos mediante cálculos.

Para 50 años $t = \frac{5}{2}$ de periodo, y sustituyendo en la regla de correspondencia obtenemos:

$$w = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2^5}} = \frac{1}{\sqrt{32}} \cong 0.177\text{kg} \ \therefore w \cong 177\text{gr.}$$

El resultado indica que al finalizar los primeros 50 años de vida media del material en estudio, se han desintegrado 823 gramos.

g) ¿Qué interpretación se puede dar a la parte de la gráfica que se localiza en el lado negativo de *t*?
h) ¿Cuántos años deben transcurrir para que nos queden 7.0gr. de sustancia radiactiva?

Esta gráfica respecto de los ejemplos anteriores es decreciente, por lo que se concluye de los problemas analizados que la función exponencial puede ser creciente o decreciente.

El modelo general de la función exponencial, es:

$$\boxed{f\text{:R}\to\text{R+ con } f(x) = a^x,\ x\in\text{R},\ a\in\text{R}^+{}_1\ a \neq 1}$$

si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
si $1 < a$, la función es creciente.

Ejemplo 6. Monto del interés compuesto

Cierto día, la señora Alejandra decidió realizar una gran fiesta a su hija cuando cumpliera 15 años, para lo cual depositó en un banco \$ 5 000 pesos, a una tasa de interés compuesto del 12% anual. Determina la función del monto (*s*) a *t* años con la siguiente simbología:

C_0 = Capital inicial de \$ 5 000

i = Tasa de interés anual = 12% = 0.12
t = Tiempo en años
S = Monto al final del tiempo de inversión

Analicemos los datos en la siguiente tabla.

Al final del año	***Incremento de capital al inicio de cada año***	***Monto final del año***
0	$S = C_0 = 5\,000 = C_0\,(1+i)^0$	S = 5000
1	$S = C_o + iC_0 = C_0\,(1+i)^1$	$S = 5'\,(1.12)^1$
2	$S = C_0\,(1+i) + C_0\,(1+i)i = [C_0\,(1+i)]\,(1+i)= C_0\,(1+i)^2$	$S = 5'\,(1.12)^2$
3	$S = C_0\,(1+i)^2 + C_0\,(1+i)^2 i = [C_0\,(1+i)^2]\,(1+i)= C_0\,(1+i)^3$	$S = 5'\,(1.12)^3$
4	$S = C_0\,(1+i)^3 + C_0\,(1+i)^3 i = [C_0\,(1+i)^3]\,(1+i)= C_0\,(1+i)^4$	$S = 5'\,(1.12)^4$
5		
6		
t		

Tabla 11.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Elabora lo siguiente:

a) Completa la tabla 11 para el 5o y 6o año y establece el monto para t años.
b) ¿Qué cantidad tendrá al final del décimo año?
c) ¿Qué cantidad retirará en el decimoquinto año?

Observa que el exponente del paréntesis aumenta en una unidad por cada año transcurrido, es decir, varía con el tiempo en la misma forma, por lo que la función para t años es:

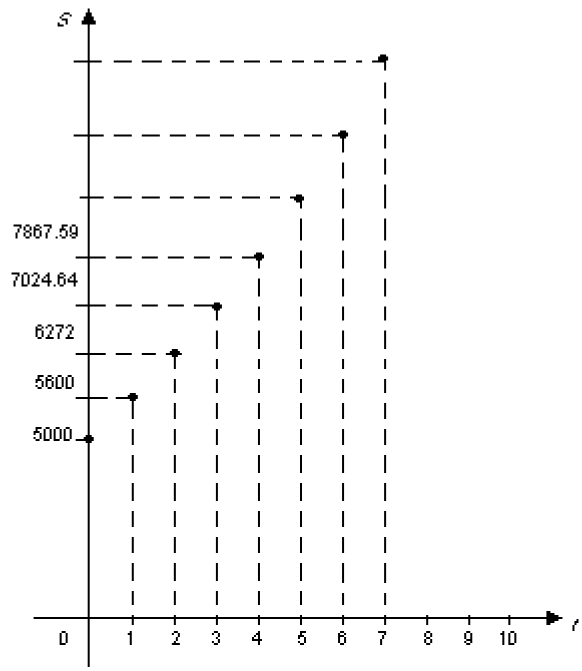
$$f: A \rightarrow B \text{ con } f(t) = C0\,(1+i)^t \quad (1)$$

La representación gráfica de esta función en el plano coordenado la determinan la imagen de cada año y formamos las parejas ordenadas como se indica en la tabla 12.

Tabla 12.

Periodos de 1 año	$f(t) = C_0\,(1+i)^t$	$[t, f(t)]$
0	$f(0) = 5000\,(1+1.12)^0$	(0, 5 000)
1	$f(1) = 5'\,(1.12)^1 = 5\,600$	(1, 5 600)
2	$f(2) = 5'\,(1.12)^2 = 6\,272$	(2, 6 272)
3	$f\,(3) = 5'\,(1.12)^3 = 7\,024.64$	(3, 7 024.64)
4	$f(4) = 5'\,(1.12)^4 = 7\,867.59$	(4, 7867.59)
5		
6		
t	$f(t) = C_0\,(1+i)^t$	

d) Completa la tabla.
e) Expresa la función como un conjunto de parejas ordenadas.
f) ¿Por qué la función es discreta o continua?



Gráfica 7.

Para trazar la gráfica en el plano coordenado, el monto lo representamos en el eje vertical multiplicado por el capital inicial C_0 = 5 000; es decir, únicamente representamos en el eje el segundo valor del paréntesis; en el eje horizontal representamos el tiempo *t*.

g) Con otra escala determina la gráfica para 15 años.
h) Obtén el dominio, condominio y regla de correspondencia.
i) ¿La función es creciente o decreciente?
j) ¿Cuál es el valor máximo del monto al final del decimoquinto año? (El interés compuesto para obtener el monto a *t* años con una tasa de interés anual, se denomina *tasa nominal*).

Algunos bancos pagan intereses en periodos menores a un año; por ejemplo, trimestralmente (cuatro periodos por año); semestralmente (dos periodos por año) etc. Para este interés, la tasa nominal se divide entre los periodos de capitalización y se le conoce como *tasa equivalente*.

Retomemos el ejemplo 6. Si el depósito es en un banco que paga *k* periodos de capitalización por año, ¿qué sucederá en un año, toda vez que para más años ocurrirá lo mismo? De igual manera que en el ejemplo anterior, el capital se va incrementando al inicio de cada periodo de capitalización, como se observa en la siguiente tabla.

Donde: $i = \frac{i_0}{k}, \frac{i_0}{k}$ = tasa equivalente

Al final del periodo	Incremento de capital al inicio de cada periodo de capitalización	Monto al final de cada periodo
0	$S = 5\,000 = \left(1+\frac{io}{k}\right)^0$	S = 5 000
1	$S = C_0 + C_0\ \frac{i_0}{k} = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^1$	$S = 5'\ (1+\frac{.12}{k})^1$
2	$S = C_0\ (1+\frac{i_0}{k}) + C_0\ (1+\frac{i_0}{k})\ (\frac{i_0}{k}) = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^2$	$S = 5'\ (1+\frac{.12}{k})^2$
3	$S = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^2 + C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^2\ (\frac{i_0}{k}) = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^3$	$S = 5'\ (1+\frac{.12}{k})^3$
4	$S = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^3 + C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^3\ (\frac{i_0}{k}) = C_0\ (1+\frac{i_0}{k})^4$	$S = 5'\ (1+\frac{.12}{k})^4$
5		
6		
k		

Tabla 13.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla para el 5o y 6o período de capitalización.
b) Determina la expresión exponencial para *k* periodos de capitalización.
c) ¿Qué cantidad retirará la señora Alejandra al final del decimoquinto año si el periodo de capitalización fue trimestral. Compara esta cantidad con la obtenida para la capitalización anual y explica lo que observes.

Si confrontas las tablas 12 y 13 verás que el crecimiento del capital ocurre de igual forma por años que por periodos; por lo tanto, la función de crecimiento del capital para *k* periodos de capitalización por año es:

$$f\colon A \to B;\ f(x) = C_0 \left(1+\frac{io}{k}\right)^{kt} \qquad (2)$$

en t años de k pedidos

Y la regla de correspondencia:

$$f\ (k) = C_0\left(1+\frac{io}{k}\right)^k$$

d) Calcula el monto para k = 4, 6, 12 periodos de capitalización y compara los resultados. Al aplicar la ecuación exponencial (2) para loe periodos indicados debista obtener:

1. para k = 4; S = 5 627.54
2. para k = 6; S = 5 630.81
3. para k = 12; S = 5 634.12

Al cotejar estos resultados observarás que <u>al aumentar el número de capitalizaciones por año, el capital también se incrementa</u>; por consiguiente, si se quiere ganar más se debe depositar con el banco que pague más periodos de capitalización por año. Una función más general para determinar el monto a t años y k periodos de capitalización se obtiene tras combinar las ecuaciones (1) y (2).

f: A $\rightarrow$ B conf (t) =C_o $(1+i)^t$

f: A $\rightarrow$ B conf f(kt) = $C_o(1+\frac{i_0}{k})^{kt}$

$$f = A \rightarrow B \text{ con } f(kt)$$

e) De acuerdo con esta función calcula los montos para k = 4, 6, 45 y t = 5, 10, 15. Analiza los resultados y explica tus observaciones.

Ejemplo 7. Periodos de capitalización continua.

En algunos bancos los periodos de capitalización son mayores a los analizados; por ejemplo, k = 30, 360, etc. De esto surge la siguiente pregunta: ¿Si los periodos de capitalización por año cada vez fuesen más grandes, el capital también sería cada vez mayor? En este caso a k se le llama *periodo de capitalización continua*. Para determinar qué ocurre con el capital, hagamos los siguientes cambios de variable en la función (3).

Primero se hace que $k = i_0 n,\ n \in \mathbf{R}$ y sustituimos este valor en (3), obteniéndose:

$$S = C_0\left(1+\frac{io}{ni_0}\right)^{iont} = C_0\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{iot} \quad \text{.......... (4)}$$

Analicemos el paréntesis interior de la función (4) mediante la tabla 4, donde n toma valores cada vez mayores.

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
2	$(1+\frac{1}{2})^2 = 2.25$
5	$(1+\frac{1}{5})^5 = 2.48832$
10	$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2.59374$
100	$(1+\frac{1}{100})^{100} = 2.70481$
1 000	$(1+\frac{1}{1000})^{1000} = 2.71692$
10 000	$(1+\frac{1}{10\,000})^{10\,000} = 2.71814$
20 000	$(1+\frac{1}{20\,000})^{20\,000} = 2.71821$
50 000	$(1+\frac{1}{50\,000})^{50\,000} = 2.71825$
500 000	
100 000	
200 000	
$n \to \infty$	

Tabla 14.

f) Completa la tabla, analiza los valores y expresa tus observaciones.
g) De acuerdo con la escala exponencial calcula el valor para *n*= 1 000 000 y compáralo con los anteriores resultados.

Al analizar los valores de la tabla 14 se observa que a partir de n=20000, el valor $(1+1/n)^n \approx 2.7182$, es decir, las cuatro primeras cifras decimales no varáin y la quinta cifra va crecieno lentamente, por lo que podemos afirmar que $(1+1/n)^n$ por más que crezca n, su valor se estabiliza en 2.718281, por lo tanto, cuando n tiende a ser muy grande, este valore se simboliza con el número y, cuyo valor aproximado es:

$$e = 2.718281 \qquad (5)$$

Este número es una constante que interviene en el cálculo de muchos problemas prácticos de Física, Economía, Ciencias sociales, etc. La función de crecimiento de estos problemas se define con base en el número *e*, cimiento de los logaritmos neperianos o naturales. En tu curso de cálculo ampliarás tus conocimientos sobre este tema.

Al sustituir el resultado de (5) en (4) obtenemos otra expresión para el monto para periodos de capitalización continua, esto es:

$$S = C_0\, e^{iot} \qquad (6)$$

De esta ecuación exponencial del monto se deduce que, por más periodos de capitalización que se tenga, el capital tiene un límite máximo, por lo que no puede seguir creciendo salvo que se cambien las condiciones del depósito.

h) Con los mismos datos del problema, calcula el monto para *t* = 20 años con periodos de capitalización continua. (Usa tu escala exponencial para *e* = 2.718281.)

i) ¿Cuánto recibiría la señora Alejandra (ejemplo 6) por su depósito con periodos de capitalización continua?. Compara este resultado y explica tus observaciones.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Veamos el siguiente problema sobre depreciación de maquinaria. Recuerda que al inicio de este fascículo se planteó el problema de la evaluación del taxi ecológico, en este momento lo retomamos para darle solución correcta.

1. El taxista se asesoró de un contador para que le solucionara sus dificultades, para lo cual dio la información necesaria; entre otras cosas, le explicó sobre sus ingresos, la cantidad que había asignado para la devaluación, la vida útil del taxi, considera de seis años, habiendo tenido problemas de funcionamiento desde el cuarto año de uso y que al final del quinto lo vendió en $4 736.73 por ser incosteable su mantenimiento. Con base en esta información el contador determinó la función de costo del taxi para cualquier t años de uso, siendo:

$$C(t) = Coe^{-0.4t} \qquad (1)$$

y la función de devaluación por año

$$D = Co - Vr \qquad (2)$$

donde:

C(*t*) = Valor del taxi en cualquier tiempo t
Co = Costo inicial del taxi
D = Depreciación en cualquier tiempo t de uso
Vr = Valor de recuperación (valor en que se vendió el taxi al final del último año de uso)
Vu = Vida útil (número de años de uso)

Valor de recuperación del taxi al final del último año de uso.

$$Vr = C(t) \; .\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

Con estos valores, calcular:

a) El costo inicial del taxi (*Co*).
b) La depreciación del taxi para $t = 0$ años.
c) El valor del taxi al final del segundo año de uso y su depreciación.
d) El valor del taxi al final del quinto año de uso.
e) La depreciación total del taxi.

Datos	Fórmulas	
$Vu = 5$ años	$C\ (t) = Coe^{-0.4t}$	(1)
$C\ (5) = \$4\ 736.73$	$D = Co - Vr$	(2)
$Co = ?$	$C\ (t) = Vr$	(3)
$C\ (2) =$		
$C\ (5) = ?$		
D=?		

a) Al sustituir (3) en (1) obtenemos para

$$t = Vu = 5 \qquad C\ (5) = Coe^{-04(5)} = 4.736.73 \qquad (4)$$

De (4) despejamos Co, obteniéndose:

$$Co = \frac{4\ 736.73}{e^{-0.4(5)}} = 4\ 736.73e^{2}$$

$$Co = \$\ 35\ 000$$

b) Para t = 0 sustituyendo en (1), obtenemos:

$$C(0) = 35e^{-0.4(0)} = 35\ 000$$

Del resultado anterior observamos C(0) = Co, por lo que concluimos que no hay depreciación para t = 0.

c) Para $t = 2$: $C(2) = 35'e^{-0.4(2)} = 35'e^{-0.8} = \$15\ 726.51$

Al finalizar el segundo año el taxi vale:

\$ 15 726.51, y su depreciación es de $D = 35\ 000 - 15\ 726.51 = 19\ 273.48$

d) El valor del taxi al final del quinto año es: $C(5) = 35'e^{-0.4(5)} = 35'e^{-2} = \$\ 4\ 736.73$.

e) El valor de recuperación: $Vr = \$\ 4\ 736.73$.

De lo anterior se concluye que la depreciación total es:

D = *Co*-*Vr* = 35 000-4 7363.73 = \$ 30 263.27.

Compara estos resultados con las cantidades que obtuvo el taxista y explica tus conclusiones.

2. Tras analizar los registros de salud pública de un municipio del estado de Puebla, se encontró que hubo un brote de epidemia, el cual según análisis de propagación determinó que ésta crecía en forma exponencial; por lo tanto, se determinó el número de personas que adquirían la enfermedad mediante la función de propagación:

$$f(t) = \frac{6}{3 + 9e^{-0.8t}} \quad \text{(en millones de personas).}$$

a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad en el momento que se descubrió la epidemia?
b) ¿Cuántas personas enfermas habrá al final de la tercera semana?
c) ¿Cuántas personas en total contraerán la enfermedad si la epidemia continúa indefinidamente?.

3. Se estima que el crecimiento de la población en la ciudad de México es de tipo exponencial y está definida mediante la función:

$$p(t) = \frac{80}{8 + 12e^{-0.06t}} \quad \text{(en millones de personas).}$$

a) ¿Cuál es la población actual?
b) ¿Qué población habrá dentro de 50 años?
c) ¿Qué ocurrirá con la población después de varios años si el crecimiento continúa indefinidamente?

4. ¿Cuánto debe invertirse a una tasa del 8% anual para que en 20 años se tenga un saldo de 100 000 dólares con periodos de capitalización continua. La función de crecimiento exponencial ya se habrá obtenido. O sea:

$$Q(t) = \mathrm{Coe}^{it}$$

En los ejemplos anteriores observaste cómo la constante *e* sirve para el cálculo de muchos problemas de diferentes áreas del conocimiento, que también define a la función exponencial natural de la siguiente forma:

$$f: \mathrm{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \text{con } f(x) = e^{x} \quad \text{.......... (7)}$$

5. Construye una tabla para calcular las siguientes imágenes de (7) y traza la gráfica en el plano cartesiano.

$$f(-3),\ f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f(2),\ f(3).$$

a) Analiza la gráfica y define sus propiedades.

Los problemas que hasta el momento se han estudiado nos permiten generalizar la función, obteniendose como regla de correspondencia una expresión exponencial del la forma

$$f(x) = a^x$$

b) De los problemas anteriores surgió la siguiente tabla, analízala, compara los valores de *a*, completa la regla de correspondencia y explica tus observaciones.

Tabla 15.

Ejemplo	Regla de correspondencia	Valor de *a*	Valor de *x*
1	$f(n) = 2^{n-1}$	a = 2	$x = n-1$
2	$f(t) = 2^t$	a = 2	$x = t$
3	$f(n) = H_0 (1+i)^n$	a = (1+*i*)	$x = n$
4	$f(n) = 3^n$	a = 3	$x = n$
5	$f(t) = (\frac{1}{2})^t$		
6	$f(t) = C_o(1+\frac{i}{k})^{kt}$		
7	$f(t) = C_0e^{it}$		

Al analizar cada una de las gráficas de las funciones anteriores, notarás que éstas están trazadas en el primer cuadrante del plano cartesiano, lo que se debe a la naturaleza del problema y a la definición de su dominio; dichas funciones se pueden generalizar como:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ con } f(x) = a^x,\ x \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}^+,\ a \neq 1$$

Recuerda que si 0 <a <1, la función es decreciente y si a >1 es creciente.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

a) Analiza las siguientes funciones e indica de acuerdo con el valor de *a* si la función es creciente o decreciente:

1. f: **R** → **R** con $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ ____________ 6. f: **R** → **R** con $f(x) = 2^x$ _____________

2. f: **R** → **R** con $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ ____________ 7. f: **R** → **R** con $f(x) = 3^x$ _____________

3. f: **R** → **R** con $f(x) = (\frac{1}{4})^x$ ____________ 8. f: **R** → **R** con $f(x) = 4^x$ _____________

4. f: **R** → **R** con $f(x) = (\frac{4}{3})^x$ ____________ 9. f: **R** → **R** con $f(x) = 2^x$ _____________

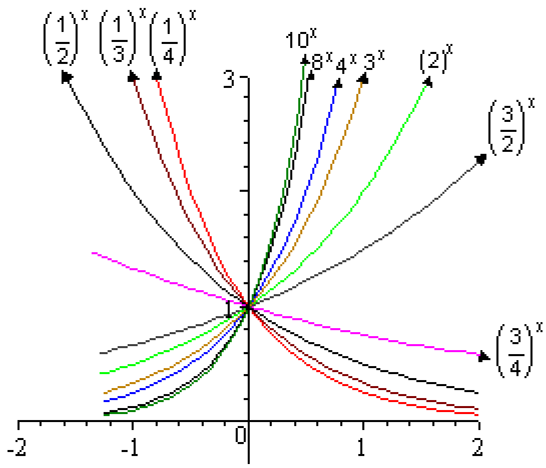
5. f: **R** → **R** con $f(x) = (\frac{3}{2})^x$ ____________ 6. f: **R** → **R** con $f(x) = 10^x$ _____________

Traza la gráfica de cada una de las funciones para comprobar tus respuestas y elabora una tabla.

x	$f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^x$	$[x, f(x)]$	$f(x) = 3^x$	$[x, t(x)]$	$f(x)=10^x$	$[x, f(x)]$
-2						
-1						
0						
1						
2						

Tabla 16.

Construye la tabla de las funciones restantes, traza las gráficas respectivas y cómparalas con la siguiente:



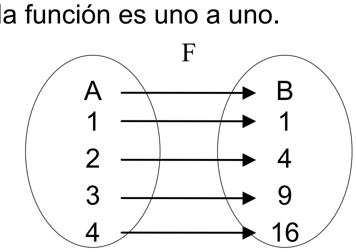
Gráfica 8.

De acuerdo con la gráfica 8 determina las propiedades comunes que observes.

Como la función exponencial no es posible expresarla mediante operaciones algebraicas, corresponde hacerlo a las *funciones trascendentes*; sin embargo, la función exponencial conserva las propiedades de la potenciación que estudiaste en el primer semestre. Te recomendamos revisarlas.

En la gráfica pudiste observar que la función exponencial f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ con $f(x) = a^x$, $a \in \mathbf{R}^+$ y $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$, tiene las siguientes características.

- Es continua en todo su dominio.
- Es creciente para $a > 1$.
- Es decreciente para $0 < a < 1$.
- La gráfica de toda función exponencial pasa por el punto de coordenadas P(0, 1).
- La correspondencia de la función es uno a uno.



La última propiedad significa que cada elemento del condominio es imagen de uno y sólo un elemento del dominio. En un diagrama de Venn se puede visualizar cuando la función es uno a uno.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí podemos establecer algunas conclusiones como son las siguientes:

- Recuerdda que la regla de correspondencia, también llamada regla para hallar imágenes, determina la imagen de cada elemento del dominio y con estos valores se forman parejas ordenadas.
- Que en toda función exponencial, la variable independiente es el exponente de la base.
- La función exponencial general es:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+} \text{ con } f(x) = a^{x},\ a \in R^{+} \text{ y } a \neq 1$$

- Recuerda que: Si $0 < a < 1$, la función es decreciente
  Si $1 < a$, la función es creciente.
- Recuerda que cada elemento del codominio es imagen de uno y sólo de un elemento del dominio.

1.2 FUNCIÓN INVERSA

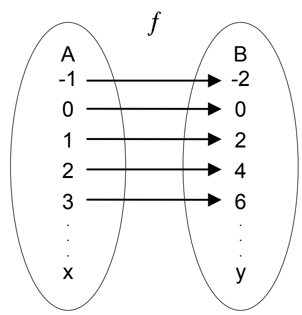
Las funciones reales uno a uno se llaman biyectivas, cuya función inversa se obtiene invirtiendo el dominio por codominio; por ejemplo:

Sea la función Lineal f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x$

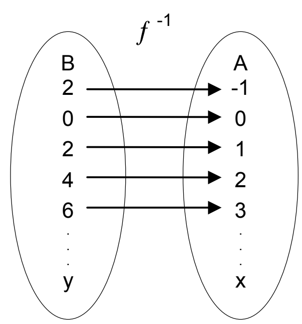
Calculamos imágenes

Diagrama de Venn $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x$
$f(-1) = 2(-1) = -2$
$f(0) = 2(0) = 0$
$f(1) = 2(1) = 2$
$f(2) = 2(2) = 4$
$f(3) = 2(3) = 6$



Para obtener su inversa, invertimos el dominio por el condominio y vemos si la relación entre los elementos sigue siendo uno a uno. (El símbolo para representar la inversa de f es f^{-1}.)



La regla de correspondencia para las funciones inversas de las funciones algebraicas como la anterior, se obtiene de la siguiente forma:

Sea $f(x) = 2x$ (1)
o $y = 2x$ (2)

De la ecuación (2) se cambia la x por la y, obteniéndose:

$x = 2y$ (3)

De la ecuación (3) se despeja y, obteniéndose:

$y = \frac{x}{2}$ o $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (4)

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Resuelve lo siguiente:

De la función f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$, calcula las imagenes $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ y represéntalas en un diagrama de Venn relacionando las parejas de los dos conjuntos mediante flechas; determina la regla de correspondencia de la función inversa y calcula las imágenes para los mismos valores anteriores, además de representar el dominio y codominio en un diagrama de Venn relacionando las parejas con flechas, y analizar la gráfica obtenida, señalando si es o no función. (De la gráfica resultante podras notar que la inversa de la función deja de ser función porque cada elemento del dominio tiene dos imágenes; por lo tanto, no se puede hablar de funcion inversa).

Para trazar una función y su inversa en el plano coordenado, calculamos algunas imágenes y en una tabla formamos las parejas ordenadas de la función; para la inversa invertimos los elementos de cada pareja. Veamos el siguiente ejemplo:

Sea f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x - 2$.

Para la función inversa

$$y = 3x - 2 \qquad (1)$$

Invertimos las variables y despejamos y:

$$x = 3y - 2 \qquad (2)$$

$$\therefore\ y = \frac{x+2}{3}.$$

La función inversa es:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Calculamos las imágenes de $f(x)$ y en una tabla formamos las parejas ordenadas de la función mientras que para la inversa invertimos las parejas.

x	$f(x) = 3x - 2$	$[x, f(x)]$	$[x, f^{-1}(x)]$
-1	$f(-1) = 3(-1) -2 = 3-2 = -5$	(-1, -5)	(-5, -1)
0	$f(0) = 3(0) -2 = 0 = 2 = -2$	(0, -2)	(-2, 0)
1	$f(1) = 3(1) -2 = 3 -2 = 1$	(1, 1)	(1, 1)
2	$f(2) = 3(2) -2 = 6 -2 = 4$	(2, 4)	(4, 2)
3	$f(3) = 3(3) -2 = 9 -2 = 7$	(3, 7)	(7, 3)

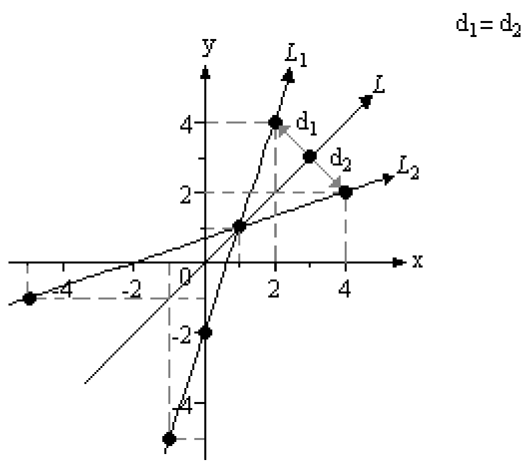
Tabla 17.

Observa que las parejas ordenadas de la función inversa se obtuvieron invirtiendo las parejas de la función; sin embargo también se pueden obtener mediante su regla de correspondencia.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Para comprobar el valor de las parejas de la tabla 17 a través de la regla de correspondencia de la función inversa, se localizan los puntos de la tabla en el plano coordenado y los unimos, obteniendose la gráfica de L_1, y su inversa L_2.

Si en la misma gráfica trazamos la función f: R →R con $f(x) = x$, L pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación de 45° como se indica en la gráfica; L es eje de simetría de L_1 y L_2, es decir, si trazamos segmentos perpendiculares a L que unan L_1 y L_2, sus longitudes siempre serán iguales, por lo que se dice que L_2 es simétrica a L_1 con respecto a L, y también que L_2 es el reflejo de L_1 a través de L.



Gráfica 9.

La función exponencial como ya se estableció, corresponde a las funciones trascendentes; es continua, creciente o decreciente en tanto su dominio es uno a uno; por lo tanto, es función biyectiva y tiene inversa, la cual se obtiene al invertir el dominio por el codominio.

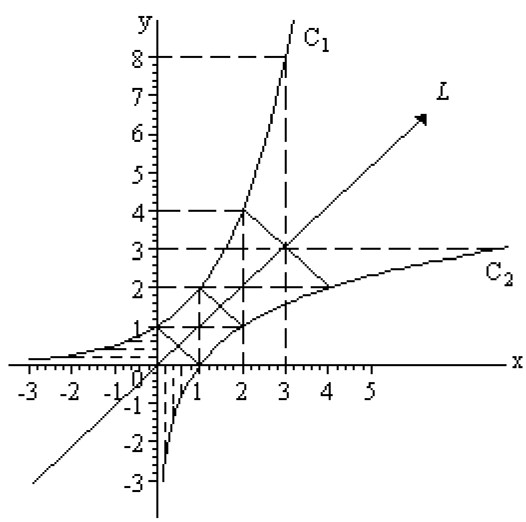
Para trazar su gráfica se calculan las parejas ordenadas de la exponencial y para su inversa se invierten las parejas.

Sea f: **R** → **R**$^+$ con $f(x)=2^x$, x∈R, traza su gráfica y la de su inversa. Primero se calculan las imágenes en una tabla.

		Función exponencial	Función inversa
x	$f(x) = 2^x$	$[x, f(x)]$	$[f(x), x]$
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$	$(-3, \frac{1}{8})$	$(\frac{1}{8}, -3)$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$	$(-2, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, -2)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, -1)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	(0, 1)	(1, 0)
1	$f(1) = 2^1 = 2$	(1, 2)	(2, 1)
2	$f(2) = 2^2 = 4$	(2, 4)	(4, 2)
3	$f(3) = 2^3 = 8$	(3, 8)	(8, 3)
		$C_1 = f(x) = 2^x$	$C2=f^{-1}(x)=\log_2 x$

Tabla 18.

C_2 es la gráfica de la función inversa de la exponencial C_1, que también son simétricas con respecto a la misma recta $f(x) = x$.



Gráfica 10.

Analiza la gráfica de C2, establece sus propiedades y comenta tus conclusiones con tu profesor o asesor.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

En la misma forma que la gráfica anterior, traza la gráfica correspondiente de cada función y su inversa.

1. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = 3^x$

2. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = 4^x$

3. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = 6^x$

4. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = 8^x$

5. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $f(x) = 10^x$

En el ejemplo de la amiba se estableció que la función que rige su reproducción es:

$$f: A \rightarrow B \text{ con } f(t) = N_0 2^t,$$

donde:

N_0 = 10 000 000 por cm^3

t = periodos de 20 min.

Con esta función se puede determinar, por una parte, el número de amibas que se han reproducido después de cierto tiempo *t* y, por otra, el lapso que debe transcurrir para tener cierto número de amibas.

Un ejemplo del primer punto es ¿cuántas amibas habrá después de 80 minutos?

Dividimos el tiempo en periodos de 20 min., es decir, $\frac{80}{20} = 4$, obteniéndose cuatro periodos de reproducción; sustituimos en la función $t = 4$ y obtenemos:

Un ejemplo del segmento punto es; ¿Qué tiempo debe trancurrir para tener una reproducción de 320 000 000 amibas? En este cuestionamiento tenemos:

$$f(t) = 320' = 10'2^t.$$

Despejemos:

$2^t = \dfrac{320'}{10'} = 32'$

$2^t = 32' = (2^5)'$

$2^t = 2^5$ (millones)

A través de la propiedad de la exponencial $2^t = 2^5 \rightarrow t = 5$ periodo de 20 min. $\therefore$ t = 5(20) = 100 min. = 1 hora 40 min., tiempo necesario para que el número de amibas sea de 320 000 000. La solución de este problema fue posible porque el número de amibas se puede expresar como una potencia de 2, lo cual no siempre ocurrirá; por ejemplo, ¿en qué tiempo habrá 200' de amibas?

Sustituimos en:

$$f(t) = 200' = 10'\ 2t.$$

Despejamos

$$2^t = \frac{200'}{10'} = 20 \text{ millones}$$

$$\therefore\ 2^t = 20$$

Para determinar el valor de *t* se puede recurrir al método de ensayo y error, que consiste en dar valores y realizar 2^t hasta obtener 20. Analicemos la siguiente tabla:

t	$2^t = 20$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$

Tras analizar estos valores vemos que el valor de t se encuentra entre 4 y 5, por lo que se deben dar valores cercanos a 4 para ir aproximándonos.

Veamos para t = 4.2

$$24.2 = 2^{\frac{42}{10}} = 2^{\frac{21}{5}} = \sqrt[5]{2^{21}} = 18.4$$

para t = 4.5

$$24.5 = 2^{\frac{45}{10}} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{2^9} = \sqrt{512} = 22.6$$

De estos resultados se concluye que se puede aproximar poco a poco; pero será muy difícil determinar el valor de *y* mediante este método. Para el cálculo de *t* el método recomendable es el uso de la función logarítmica, la cual es la inversa de la función exponencial, tema que a continuación estudiarás.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí podemos establecer algunas conclusiones como son las siguientes:

Recuerda que las funciones reales uno a uno se llaman biyectivas, cuya función inversa se obtiene invirtiendo el dominio por el codominio.

La función exponencial como ya se estableció, corresponde a las funciones trascendentes; es decir, a operaciones que tienen que elevar cierta cantidad a un número correspondiente (nx), esta será creciente o decreciente continua en tanto su dominio sea uno a uno.

1.3 FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Observa que la función

$$y = a^x \qquad (1)$$

es la función exponencial que ya conocemos, y despejando el exponente, se obitiene la expresión logarítmica.

$$log_a\ y = x. \qquad (2)$$

El logaritmo de un número "y" en una base dada "a" es igual al exponente "x" al que hay que elevar la base para obtener el número.

Aplicando las expresiones (1) y (2) podemos pasar de una función a la otra para calcular el valor del exponente, la base o hacer cambios de base. Veamos los siguientes ejemplos:

1. $\log_2 16 = x \Rightarrow 2^x = 16$	Por definición de logaritmo.
$2^x = 2^4$	Por descomposición en factores primos.
$\therefore\ x = 4$	Porque la función exponencial es una función uno a uno.
2. $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8$	Por defineción de logaritmo.
$(2^2)^x = 2^3$	Por descomposición en factores.
$2^{2x} = 2^3$	Por la ley de los exponentes.
$\therefore\ 2x = 3$	Porque la función exponencial es una función uno a uno.
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$	Multiplicando por el inverso multiplicativo de 2.
3. $\log_{16} \frac{1}{8} = x \Rightarrow 16^x = \frac{1}{8}$	Por defineción de logaritmo.
$(2^4)^x = \frac{1}{2^3}$	Por descomposición en factores primos.
$2^{4x} = 2^{-3}$	Por la ley de los exponentes.
$4x = -3$	Porque la función exponencial es una función uno a uno.
$\therefore x = -\frac{3}{4}$	Multiplicando por el inverso multiplicativo de 4.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Convierte a su forma exponencial y halla el valor del exponente o de la base de los siguientes logaritomos.

a) $\log_3 9 = x$

b) $\log_5 (x^2 + 5) = 2$

c) $\log_2 64 = x$

d) $\log_a 81 = 4$

e) $\log_5 125x$

f) $\log_a 32 = 5$

g) $\log_a 4 = \frac{2}{3}$

h) $\log_a 125 = 3$

i) $\log_a 8 = \frac{3}{2}$

2. Transforma a su forma logarítmica las siguientes exponenciales

a) $5^y = 3x$

b) $7^x = 2401$

c) $4^x = 256$

d) $16^x = \frac{1}{8}$

e) $(7^{-x})^2 = 343$

f) $81^{\frac{x}{4}} = \frac{1}{127}$

g) $(9^{3x}) = 243$

h) $b^{\frac{7}{4}} = 128$

i) $b^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{128}$

j) $y = 10^x$

En los ejemplos realizados observa que la base de la expresión exponencial es la base del logaritmo.

Analicemos la exponencial y = 10x, donde la base es 10 y el exponente es x. Para obtener la inversa de la exponencial se cambia la posición de la variable independiente y a continuación se aplica la definición de logaritmo.

$y = 10^x \therefore x = 10^y \Rightarrow \log_{10} x = y$

ó

$y = \log_{10} x$,

donde:

Base del logaritmo = 10

Logaritmo de x = y

El logaritmo de base 10 también se llama logaritmo *vulga*r o de *Brigs*.

En los casos donde se use no es necesario mencionarlo y = $\log_{10}$ x = log x, mas si se usa otra base, entonces se debe señalar como subíndice; por ejemplo:

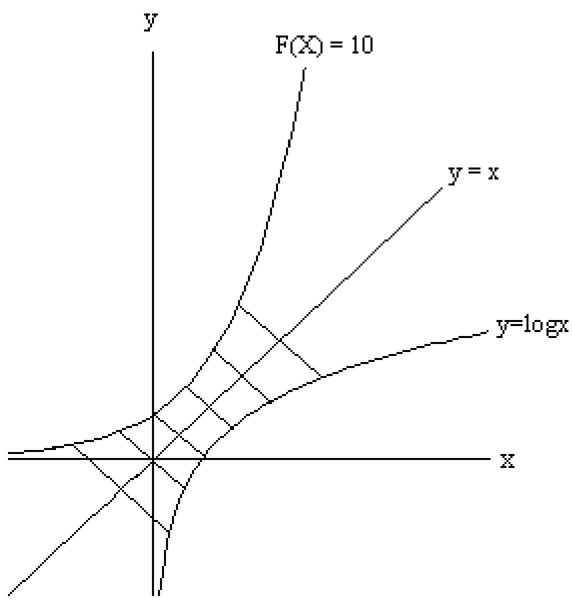
y = $\log_a x$	a = base
y = $\log_2 16$	y = log de *x* en base *a*
	2 = base
	y = log de 16 en base 2

De lo anterior se deduce que la base de un logaritmo es un número real positivo.

Para trazar las gráficas de las funciones f(x) = (10^y) y f(x) = logx, calculamos las imágenes de la función exponencial y formamos las parejas ordenadas. Dado que la función logarítmica es inversa de la exponencial, será suficiente invertir los elementos de cada pareja ordenada como se indica en la siguiente tabla.

		Exponencial	log $f^{-1}(x)$ = log x
x	$f(x) = 10^x$	[x, f(x)]	[x, f(x)]
-3	$f(-3) = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$	[-3, 10^{-3}]	(10^{-3}, -3)
-2	$f(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$	[-2, 10^{-2}]	(10^{-2}, -2)
-1	$f(-1) = 10^{-1} = \frac{1}{10}$	[-1, 10^{-1}]	(10^{-1}, -1)
0	$f(0) = 100 = 1$	[0, 1]	(1, 0)
1	$f(1) = 1^1 = 10$	[1, 10]	(10, 1)
2	$f(2) = 10^2 = 100$	[2, 100]	(100, 2)
3	$f(3) = 10^3 = 1000$	[3, 1000]	(1000, 3)
4	$f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$	$f(y)=a^y$, y E$\mathbb{R}$	xE$\mathbb{R}^+$
5			
6			

Tabla 19.



Gráfica 11.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza lo siguiente:

a) Completa la tabla 19.

b) De acuerdo con la gráfica, se puede afirmar que la función exponencial y su inversa, la función logarítmica, son simétricas con respecto a una línea recta L, que es la gráfica de la función identidad:

$$y = x \quad ó \quad f(x) = x.$$

La definición de la función logarítmica es:

$$\boxed{f: R^{+} \rightarrow R \text{ con } f(x) = \log x}$$

1.3.1 PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Para poder operar con la función logarítmica es necesario conocer sus propiedades. Para ello, debes estudiar las leyes de la potenciación vistas en el curso anterior. Con el fin de inducir cada propiedad de los logaritmos analicemos algunos ejemplos.

a) $\log [(100)(1000)]$ $= \log[10^2(10^3)]$
$= \log[10^{2+3}]$
$= \log 10^5$ Por la ley de la potenciación
$= \log 10^5$
$= 5$ Por definición de logaritmo
$\therefore \log (100)(100) = 5$ (1)

Por otra parte:

$\log 100 = \log 10^2 = 2$ Por definición de logaritmo
$\log 1\,000 = \log 10^3 = 3$ Por definición de logaritmo
y $\log 100 + \log 1\,000 = 2 + 3$
$\therefore \log 100 + \log 1\,000 = 5$ (2)

De las igualdades (1) y (2) se concluye, por transitividad, la expresión 3:

b) $\therefore \log (100)(1\,000) = \log 100 + \log 1\,000$ (3)
$\log_2 [(16)(32)] = \log_2 [2^4(2^5)] = \log_2 2^9$ Por la ley de la potenciación
$\log 2^9 = 9$ Por definición de logaritmo
$\therefore \log_2 [(16)(32)] = 9$ (1)

Por otra parte:

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ (2) Por definición de logaritmo

$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$ (3) Por definición de logaritmo

Sumando miembro a miembro de (2) y (3) obtenemos:

$\log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5$
$\log_2 16 + \log_2 32 = 9$ (4)

De la igualdad (1) y (4) se concluye por transitividad, la expresión 5.

$\text{Log}_2 (16)(32) = \log_2 16 + \log_2 32$ (5)

La generalización de los ejemplos (a) y (b) es:

$$\boxed{\log_a mn = \log_a m + \log_a n} \qquad \text{(A)}$$

Con tus propias palabras enuncia esta propiedad.

c) $\log \frac{100000}{100} = \log \frac{10^5}{10^2} = \log 10^{5-2}$ Por la ley de la potenciación

$= \log 10^3 = 3$ Por definición de logaritmo

$\therefore \log \frac{100000}{100} = 3$ (1)

Por otra parte:

$\log 100\,000 = \log 10^5 = 5$ (2) Por definición de logaritmo
$\log 100^2 = 2$ (3) Por definición de logaritmo

Restando (3) de (2) obtenemos:

$\log 100\,000 - \log 100 = 5 - 2 = 3$
$\log 100\,000 - \log 100 = 3$ (4)

De las igualdades (1) y (4) se concluye por transitividad la expresión 5.

$\log \frac{100000}{100} = \log 100\,000 - \log 100$ (5)

d) $\log_2 \frac{512}{16} = \log_2 \frac{2^9}{2^4} = \log_2 2^{9-4} = \log_2 2^5 = 5$

$\therefore \log_2 \frac{512}{16} = 5$ (1) Por definición de logaritmo.

Por otra parte:

$\log_2 512 = \log_2 2^9 = 9$ (2) Por definición de logaritmo
$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ (3) Por definición de logaritmo

Restando miembro a miembro (3) de (2) obtenemos:

$\log 512 - \log 16 = 9 - 4 = 5$
$\log 512 - \log 16 = 5$ (4)

De las igualdades (1) y (4) se concluye por transitividad la expresión 5.

$\text{Log}_2 \frac{512}{16} = \log_2 512 - \log_2 16$ (5)

La generalización de los ejemplos (c) y (d), define la segunda propiedad de los logaritmos, esto es:

$$\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n;\ n \neq 0} \qquad \text{(B)}$$

¿Cómo establecerías la propiedad anterior con tus propias palabras? Para calcular el logaritmo de una potencia se puede proceder como sigue:

e) $\log_3(27)^2 = \log_3(3^3)^2 = \log_3 3^6$ Por la ley de la potenciación
$= \log_3 3^6 = 6$ Por definición de logaritmo
$\therefore \log_3 (27)^2 = 6$ (1)

$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ Por definición de logaritmo
$\log_3 27 = 3$ (2)

Multiplicamos por (2) cada miembro de la expresión (2) y obtenemos:

$2\log_3 27 = 3(2) \therefore 2\log_3 27 = 6$ (3)

De las igualdades (1) y (3) se concluye por transitividad la expresión 4.

$\text{Log}_3(27)^2 = 2 \log_3 27$ (4)

La generalización de (4) define la tercera propiedad de los logaritmos, esto es:

$$\boxed{\log_a m^n = n \log_a m} \qquad \text{(C)}$$

Desarrolla esta propiedad con tus propias palabras. Al tomar el logaritmo de la base sucede lo siguiente:

f) $\log_3 {}^3 = x$ (1) Por definición de inversa de la función logarítmica
$\therefore 3^x = 3$ (2) Por la ley de la potenciación
$3^x = 3^1$ (3) Porque la función exponencial es una función uno a uno
$\therefore x = 1$ (4)

Sustituyendo (4) en (1) obtenemos:

$\log_3 3 = 1$ (5)

La generalización de (5) define la cuarta propiedad de los logaritmo, esto es:

$$\boxed{\log_a a = 1} \qquad a^o = 1 \qquad \text{(D)}$$

Escribe esta propiedad con tus propias palabras. El logaritmo de la unidad en cualquier base es igual a cero, puesto que:

g) $\log_4 1 = x$ (1)
$\therefore 4^x = 1$ (2) Por definición de logaritmo
$4^x = 1 \Rightarrow x = 0$ (3) Por la ley del exponente cero

Sustituyendo (3) en (1) obtenemos: $\log_4 1 = 0$ (4)

La generalización de (4) define la quinta propiedad de los logaritmos, esto es:

$$\boxed{\log_a 1 = 0} \qquad \text{(E)}$$

Enuncia esta propiedad con tus propias palabras.

En las cinco propiedades que hemos generalizado podemos operar cualquier expresión exponencial para determinar:

a) El logaritmo de un número.
b) Hallar la base de un logaritmo.
c) Hallar la solución de ecuaciones logarítmicas.
d) Extraer raíces de un número.

Para extraer una raíz mediante logaritmos es recomendable trasformar antes a potencia fraccionaria de acuerdo con la ley de potenciación, y la base de la potencia se descompone en sus factores primos o en factores más simples que faciliten la operación, para que a continuación se determine el logaritmo. En la solución de los problemas generalmente es necesario combinar dos o más propiedades para llegar al resultado; por ejemplo:

Mediante el uso de las propiedades de los logaritmos calcular el valor de $\sqrt[8]{19683}$.

$\sqrt[8]{19683} = (19\,683)^{\frac{1}{8}}$ Por la ley de la potenciación

$= [81(243)]^{\frac{1}{8}}$ Por factorización de la base

$= (81)^{\frac{1}{8}}(243)^{\frac{1}{8}}$ Por una ley de potenciación

$\log \sqrt[8]{19683} = \log_a [(81)^{\frac{1}{8}}(243)^{\frac{1}{8}}] = \log_a (81)^{\frac{1}{8}} + \log_a (243)^{\frac{1}{8}}$ Por la primera propiedad de los logaritmos.

$= \log_a(3^4)^{\frac{1}{8}} + \log_a (3^5)^{\frac{1}{8}}$ Por factorización de la base

$= \log_a (3^{\frac{4}{8}}) + \log_a (3)^{\frac{5}{8}}$ Por la ley de la potenciación

$= \frac{4}{8}\log_a 3 + \frac{5}{8}\log_a 3$ Por la tercera propiedad de los logaritmos

$= (\frac{4}{8} + \frac{5}{8}) \log_a 3$ Por factorización

$= \frac{9}{8}\log_a 3$ Por la propiedad asociativa

$= \frac{9}{8}\log_a 3$; si a = 3, obtenemos:

$= \frac{9}{8}\log_3 3 = \frac{9}{8}(1) = \frac{9}{8}$ Por la propiedad 4 del logaritmo

$\therefore \sqrt[8]{19683} = \frac{9}{8}$

Si a = 10, entonces tenemos:

$$\log 3\ \sqrt[8]{19683} = \frac{9}{8}(\log 3) = \frac{9}{8}\ (0.4771212) = 0.5367614$$

$$\log 3\ \sqrt[8]{19683} = 0.5367614$$

Recuerda que la inversa del logaritmo es la exponencial, esto es:

$$\log\ \sqrt[8]{19683} = 0.5367614 \Rightarrow 10^{\ 0.5367614} \approx 3.44 \approx \sqrt[8]{19683}$$

De lo anterior concluimos que el resultado de la raíz se obtiene tras determinar la inversa del logaritmo en base diez de 0.536761. Otra forma de expresar el resultado es mediante el antilogaritmo:

$$\text{antilog } 0.5367614 \approx 3.44, \text{ es decir } {}^{8}\sqrt[8]{19683} \approx 3.44$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Realiza estos ejercicios de acuerdo a lo que se te pide y considerando lo que ya estudiste:

a) Aplica las propiedades de los logaritmos y calcula el valor de x.

1. $\lg_3 81 = x$
2. $\log_4 256 = x$
3. $\log_9 \frac{1}{27} = x$
4. $\log_4 \frac{1}{128} = x$
5. $\log_{\frac{4}{3}} 1 = x$
6. $\log_5 125 = x$
7. $\log_7 2401 = x$
8. $\log_6 \frac{8\left(9^4\right)}{77} = x$

Manejo de la tabla de logaritmos ó de una calculadora

b) Determina el logaritmo de x y el antilogaritmo de 10^y.

Tabla 20.

x	$y = \log x$	10^y
0.0005	-3.30103	0.0005
0.05		
0.5		
5		
500		
5000		

Los valores calculados presentan las siguientes características.

- El logaritmo de un número tiene dos partes, que son:

Una parte entera (característica).
Una parte decimal (mantisa).

- El logaritmo de un número menor que uno tiene característica negativa; pero la mantisa (parte decimal) siempre es positiva.

Observa que los valores que obtuviste para las cantidades decimales, después de llenar la tabla 20, son negativos; pero la mantisa debe ser positiva, por lo que el valor negativo se resta de 4, que es una unidad mayor, esto es:

$$4-3.30103 = 0.69897 \text{ y } \log 0.0005 = \overline{3}.69897.$$

El signo menos sobre el tres indica que solamente la parte entera es negativa.

c) Con la misma tabla de valores que realizaste para el trazo de $f(x)= e^x$, invierte las parejas ordenadas, localizalas en el plano coordenado y traza la gráfica de las dos funciones. Posteriormente analiza y establece sus propiedades.

La función logarítmica natural tiene las mismas propiedades que la función logarítmica de base 10, o sea:

Notación ℓn

1. $\ell n\,(mn) = \ell n\, m + \ell n\, n$
2. $\ell n \dfrac{m}{n} = \ell n\, m - \ell\text{-}n\, n$
3. $\ell n\, m^r = r\, \ell n\, m$
4. $\ell n\, \ell = 0$
5. $\ell n\, e = \ell$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Aplica las propiedades para calcular el valor de *x*.

1. $\ell n\ (x+3)=2$
2. $\ell n\ c^{4x} = 5$
3. $7.3891 = c\dfrac{(3x+2)\sqrt{3}}{3x}$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta aquí podemos establecer algunas conclusiones como son las siguientes:

- El logaritmo de un número “y” en una base dada “a”, es igual al exponente “x” al que hay que elevar la base para obtener el número.

- Recuerda que el logaritmo de base 10 también se llama logaritmo vulgar o de Brigs.

- La definición de la función logaritmica es:

$$\boxed{F:\ R^{+} \rightarrow R \text{ con } f(x) = \log x,}$$

- El logarítmo de un número tiene dos partes, que son;

  Una parte entera (característica)
  Una parte decimal (mantisa)

- El logaritmo de un número menor que uno tiene característica negativa; pero la mantisa (parte decimal) siempre es positiva.

RECAPITULACIÓN

Con la finalidad de que verifiques tu comprensión de los temas que se encuentran en este capítulo. A continuación te presentamos el siguiente mapa conceptual, el cual incluye los conceptos que se analizan en él.

Problema

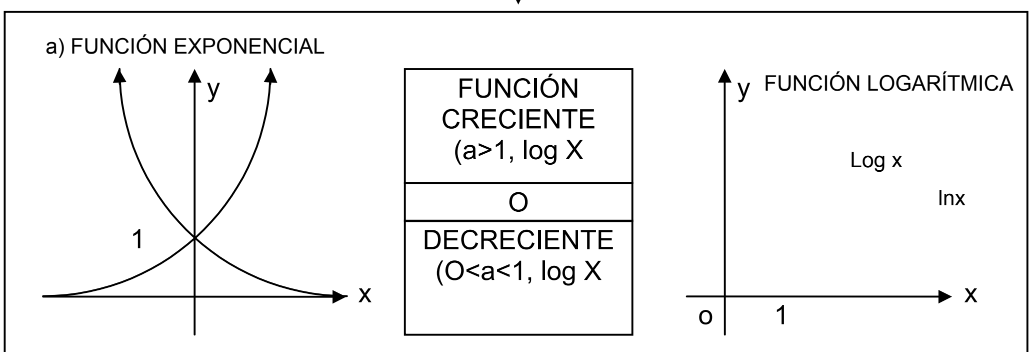
puede ser de:

Investigación
Análisis
Síntesis

FORMAS DE SOLUCIÓN

FUNCIÓN INVERSA	FUNCIÓN INVERSA	FUNCIÓN INVERSA
$f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$ Regla de Correspondencia	$f(x) = y$ $f^{-1}(x) = y$ Regla de Correspondencia	$f(x) = \log x$ $f(x) = \ln x$ Regla de Correspondencia

LA FUNCIÓN PUEDE SER GRÁFICAMENTE :



Propiedades de Logaritmos

Lo anterior nos ayudará a solucionar interpretar y/o conocer las:

Aplicación en la Solución de problemas

ACTIVIDADES INTEGRALES

Realizar los siguientes ejercicios: Para reafirmar los coceptos aprendidos, te recomendamos que resuelvas éstos ejercicios de manera personal.

Te recordaremos que trates de resolverlos sólo y consideres que pueden ser semejantes a los del examén. Posteriormente que los hayas resuelto, verifica tus resultados; en la pag. (62), donde podrás revisar los errores y fallas que tuviste, si tienes alguna duda acude a tu asesor de Matemáticas para que puede ayudarte y/u orientarte sobre dichas dificultades.

1).- La gráfica de cierta función exponencial contiene el punto $P\left(\frac{5}{2},\ 32\right)$. Por lo tanto, la base de la función es:

2).- Una función f cuyo dominio es el conjunto $\{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ está definida por $f(x) = 4^{-x}$

a) Escribir f como un conjunto de pares ordenados.

b) Escribir los elementos que pertenecen a la imagen de la función.

3).- Determina el valor de "x" en las siguientes expresiones.

a) $\log_9 x = -\frac{1}{2}$

b) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right) = x$

c) $x^{\log x^2} = x$

4).- Construye las gráficas de las funciones $y = 10^x$; $y = \log^x$ sobre el mismo sistema cordenado.

AUTOEVALUACIÓN

Compara las respuestas que obtuviste a las Actividades de Consolidación. Si tienes alguna duda acude a tu asesor:

1).- Datos P(x, y) $\Rightarrow$ P $\left(\frac{5}{2}, 32\right)$

Función $y = f(x) = a^x$

$32 = a^{5/2}$

$(4)^{5/2} = a^{5/2}$ $\therefore$ base de la función $\boxed{a = 4}$

2).- a)

x	f(x) = 4^{-x}	y
- 1	$y = 4^{-(-1)}$	4
- 1/2	$y = 4^{-(-1/2)}$	2
0	$y = 4^{-(0)}$	1
1/2	$y = 4^{-(1/2)}$	1/2
1	$y = 4^{-1}$	1/4

Pares ordenados { (-1,4); (-1/2,2); (0,1); (1/2, 1/2); (1,1/4) }

b) Imagen { 1/4, 1/2, 1, 2, 4 }

3).- a) $\log_9{}^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 9^{-1/2} = x$

$$\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = x \therefore \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

b) $\log_2\left(\frac{1}{32}\right) = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{32}$

$$2^x = \frac{1}{2^5}$$

$$2^x = 2^{-5} \quad \therefore \boxed{x = -5}$$

c) $x^{\left(\log x^2\right)} = x \Rightarrow \log_{x^2}$

$\boxed{x = 2}$

4).-

x	$y = 10^x$
- 2	1 / 100
- 1	1 / 10
0	1
1	10
2	100
3	1000

x	$y = \log^x$
1 / 100	- 2
1 / 10	- 1
1	0
10	1
100	2
1000	3