4. FUNCIONES COMO MODELO MATEMÁTICO

El aplicar las matemáticas a los problemas de la vida real comprende tres etapas. Primero se traduce el problema a términos matemáticos, entonces decimos que tenemos un modelo matemático. Después se obtiene la solución del problema matemático. Por último, se interpreta esta respuesta matemática en términos del problema original.

En esta sección trataremos solo el primer paso. De hecho, nuestra atención se enfocará a la determinación de la función o las funciones que involucran los problemas verbales.

La facultad para describir las relaciones funcionales que aparecen en un problema es una habilidad matemática que importa desarrollar. Por esta razón mostraremos algunos ejemplos tomados en diferentes campos.

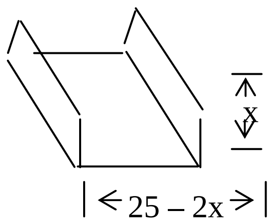
Ejemplo 4.1

Un estacionamiento en la ciudad cobra $20.00 por la primera hora y $10.00 por cada hora adicional. Expresar la cuota de estacionamiento como una función del número de horas estacionadas.

Solución:

Si x representa el número de horas estacionadas, entonces la cuota de estacionamiento F estará dada por la fórmula $E = 50 - 25(x-1)$, donde x es un entero positivo.

Ejemplo 4.2.



De una larga pieza de hoja de lata de 25 cm. de ancho se va a hacer un canalón para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar el área de la sección transversal del canalón para lluvia como una función de su altura.

Solución:

Si representamos por x la altura en cm. del canalón para lluvia, podemos expresar el área de la sección transversal A en cm^2 por medio de la fórmula $A = x(25 - 2x)$

Ejemplo 4.3

Se sabe que 100 gramos de granos secos de soya contienen 35 gr. de proteínas y 100 gr. de lentejas secas contienen 26 gr. de proteínas. Los hombres de talla media que viven en un clima moderado necesitan 70 gr. de proteínas en su alimentación diaria. Supongamos que un hombre quiere conseguir esos 70 gr. de proteínas comiendo soya y/o lentejas. Sea x la cantidad de soya e y la cantidad de lentejas diarias (x e y medidas en gr.) ¿Cuál es la relación entre x e y?

Solución:

La proteína ingerida por medio de la soya es 35x y por las lentejas 26 y por día (ambas medidas en gr.). La cantidad diaria total de proteínas es 70 gr. Por tanto obtenemos la ecuación

$$35x + 26y = 70 \qquad (1)$$

Reordenando los términos podemos expresar y como función de x:

$$y = -\frac{35}{26}x + \frac{70}{26} \qquad (2)$$

Es claro que el dominio y el rango son $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Una ecuación como la (1) se llama función implícita y una ecuación como la (2) función explícita.

Ejemplo 4.4.

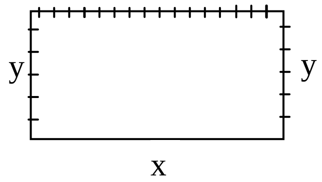
Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados. Si el área del lote es de 30 metros cuadrados, exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

Solución:

Es natural empezar por introducir dos variables, digamos x, y, y, para denotar las longitudes de los lados del lote. (Figura). Entonces.

Longitud de la cerca = x + 2y

Como queremos la longitud de la cerca expresada como una función de x solamente, debemos encontrar una forma de expresar y en términos de x; es decir, debemos encontrar una ecuación que relacione a x, y, y. El hecho de que el área sea de 30 metros cuadrados nos proporciona la ecuación. Específicamente,



$$xy = 30$$

Resolviendo esto para y obtenemos

$$y = 30/x$$

que reemplazamos entonces en la fórmula de la longitud de la cerca. Esto da

$$f(x) = x + 60/x$$

en donde f denota la longitud de la cerca.

La función f(x) está definida para todos los valores de x excepto x = 0 y representa la longitud de la cerca si x es positiva.

Ejemplo 4.5.

Una huerta de manzanos tiene 40 hectáreas por hectárea y el promedio de producción es de 300 manzanas por árbol y por año. Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, exprésese la producción.

Solución: La producción actual de la huerta puede obtenerse de la siguiente forma: (300)(40) = 12000 manzanas por hectárea y por año, y en general, la producción = (número de árboles por hectárea) (producción promedio anual de un árbol).

Representemos por x el número de árboles plantados, además de los 40. Puesto que la producción promedio por árbol disminuye en 5 manzanas por cada árbol plantado, entonces:

Producción: promedio anual de un árbol = 300 – 5x; y la producción total será:

$$P = (40 + x)(300\text{-}5x)$$

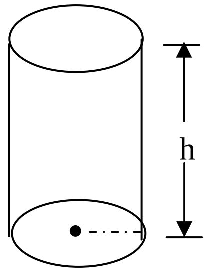
Obsérvese que $0 \leq x \leq 60$

Ejemplo 4.6.

Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 24 π centímetros cúbicos. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para la parte curva. Exprese el costo del recipiente en función del radio de la base del cilindro.

Solución:

Comenzamos por hacer un dibujo como el mostrado en la figura. Denotamos por r el radio de la base del recipiente y por h la altura (en centímetros). Como el volumen de un cilindro circular es V = py^2h y el volumen del recipiente pedido es de 24π cm. cúbicos, entonces tenemos.



$$\pi\gamma^2 = 24\pi$$

Esto nos da la relación

$$h = \frac{24}{\gamma^2}$$

El costo total del recipiente es igual al costo de la parte curva más el costo de la base del cilindro.

Si P denota el precio por cm. cuadrado del material que se usa para la parte curva, entonces el precio por cm. cuadrado del material que se usa para el fondo será 3p.

El costo de la parte curva del cilindro es igual al costo del área del rectángulo de base $2\pi\gamma$ y altura h, es decir $C_c = P(2\pi\gamma)$ pero $h = 24/\gamma^2$. Así

$$C_c = P(2\pi\gamma)(24/\gamma^2) = 48p\pi/\gamma$$

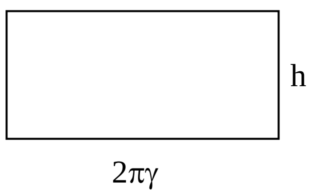
El costo de la base del cilindro es

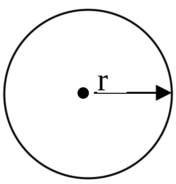
$$C_b = 3p\ (\pi\gamma^2)$$

El costo total es

$$C = C_c + C_b = 48p\pi\ /\gamma^2 \quad + \quad 3p\pi\gamma^2$$

$$C = p\pi(3\gamma^2 + 48\ /\gamma)\ \gamma > 0$$





Ejemplo 4.7

Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses. A los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de $2,400.00 (40 veces $60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará $60.00 menos 50 centavos por cada persona que pase de las 40. La tarifa más baja de la compañía de $40.00 por persona se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

Solución:

Usamos x para denotar el número de personas del grupo y f(x) el ingreso correspondiente. Si $0 \le x \le 40$, el ingreso es simplemente f(x) = 2,400. Si $x \ge 80$, cada persona paga $40.00 y por lo tanto el ingreso correspondiente es f(x) = 40x. La expresión para f(x) cuando $40 < x < 80$ es algo más complicada. Comencemos nuestro análisis de esta situación con la relación básica.

Ingresos = (número de personas) (tarifa por persona)

Como x denota el número total de personas del grupo, x – 40 es el número de personas que pasan de 40. La tarifa por persona es la original de $60.00 reducida en ½ peso por cada una de las x – 40 personas extras. Así. Tarifa por persona = 60 – 1/2 (x – 40) = 80 - $\frac{1}{2}$x.

Para obtener el ingreso, simplemente multiplicamos esta expresión por x, el número de personas del grupo. Así para 40 < x 80, f(x) = 80x – 1/2x^2.

Podemos resumir todos los tres casos en forma compacta como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2,400 & si \quad 0 \le x \le 40 \\ 80x - \frac{1}{2}x^2 & si \quad 40 < \mathrm{x} < 80 \\ 40\mathrm{x} & si \quad x \ge 80 \end{cases}$$

Aunque esta función f(x) está definida para todos los valores no negativos de x, representa el ingreso de la compañía de autobuses solamente cuando x es un entero no negativo.

4.1 Resumen:

La mejor manera de desarrollar una habilidad para tratar con problemas verbales es practicar intensamente. Como los tipos de aplicaciones son muchos y muy variados, es difícil dar reglas específicas para hallar las soluciones. Los siguientes consejos son útiles en muchos casos.

1. Lea el problema cuidadosamente varias veces y fíjese en los datos y en las incógnitas que deben encontrarse.
2. Si es posible, haga un dibujo o un diagrama que incluya los datos pertinentes. Introduzca variables para denotar las incógnitas. Palabras como “que”, “encuentre”, “cuanto”, “donde” y “cuando” deben guiarle para reconocer las incógnitas.
3. Tratar de descomponer el problema en otros más pequeños.
4. Escriba una lista de hechos conocidos y relaciones entre las variables. Una relación entre variables generalmente se escribe como una ecuación.
5. Puede ser útil encontrar el valor de la función para uno o más valores en la variable de manera que pueda generalizarse el procedimiento.

6. Si la elección de variables desemboca en una función indebidamente complicada, considérese otra alternativa.