3. INECUACIONES CON UNA VARIABLE

3.1. Inecuación lineal

Llamaremos desigualdad lineal de una variable a cualquier expresión de la forma:

$ax + b > 0$ o bien

$ax + b < 0$ o bien

$ax + b \geq 0$ o bien

$ax + b \leq 0$

$(a \neq 0)$ donde a, y b son constantes reales.

La solución de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Para resolver una desigualdad de este tipo, se procede en forma similar que para resolver una ecuación pero teniendo en cuenta las propiedades del orden en los reales vistas en la sección I.

Ejemplo

Si $x < 3$

entonces $x - 3 < 3 - 3$ (Sumando –3 a ambos lados)

o sea $x - 3 < 0$

En general decimos: *cualquier término puede pasarse de un lado a otro de una desigualdad cambiando previamente su signo, sin alterar el sentido de la desigualdad.*

En símbolos : si $a > b + c$ entonces $a - b > c$ y $a - c > b$.

Ejemplo

De $3x - \frac{1}{2} > 5x + 4$ se sigue que $3x - 5x > 4 + \frac{1}{2}$, tanto $-\frac{1}{2}$ como 5x se pasaron de un lado al otro.

Si a ambos lados de una desigualdad multiplicamos (o dividimos) por el mismo número real positivo y distinto de cero, la desigualdad no se altera

En símbolos: Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a.c < b.c$

Ejemplo

Es claro que $-5 < -1$

entonces $-5 \cdot 6 < -1 \cdot 6$ (Multiplicando ambos lados de la desigualdad por 6)

se obtiene $-30 < -6$ que es también una desigualdad verdadera.

Ejemplo

Resolver la siguiente desigualdad: $3x > 9$

$$\frac{1}{3} \cdot 3x > \frac{1}{3} \cdot 9$$ (Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{3}$)

Simplificando la expresión obtenida se obtiene: $x > 3$, que es el conjunto solución para la desigualdad dada.

Si a ambos lados de una desigualdad multiplicamos por un mismo número real Negativo y distinto de cero, se invierte el sentido de la desigualdad

Muy importante : *no olvidar que ...*

Si $a < b$ y $\underline{c < 0}$, entonces $a.c > b.c$

Ejemplo

Es claro que $-5 < -1$

$-5 \cdot (-6) < -1 \cdot (-6)$ (Multiplicamos a ambos lados por -6)

se obtiene $30 > 6$ Para que la igualdad resulte verdadera es imprescindible invertir el sentido de la desigualdad.

Ejemplo

Encontrar todos los números reales que satisfacen la desigualdad:

$5x - 3 \geq 7x + 2$

Solución

Pasamos todos los términos en x a un lado de la desigualdad y los términos constantes al otro. Para lograr esto restamos 7x en ambos lados y luego sumamos 3 a ambos miembros de la desigualdad y obtenemos:

$5x - 3 - 7x \geq 7x + 2 - 7x$ (restamos 7x en ambos lados) y simplificando se obtiene

$5x - 7x - 3 \geq 2$

$-2x - 3 + 3 \geq 2 + 3$ (agrupamos los términos en x ,y sumamos 3 a ambos lados)

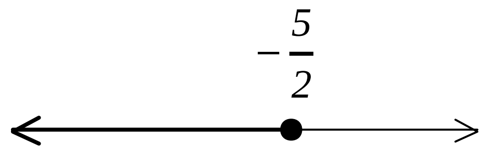
$-2x \geq 5$

$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{5}{-2}$

(dividimos ambos lados de la desigualdad entre –2, teniendo en cuenta que al dividir por un número negativo se invierte el sentido de la desigualdad)

finalmente $x \leq -\frac{5}{2}$

El conjunto solución para esta desigualdad es el intervalo $(-\infty, -\frac{5}{2}]$, o usando la notación conjuntista $\{x : x \leq -\frac{5}{2}\}$, gráficamente tenemos:



<u>Ejemplo</u>

Hallar el conjunto solución de la siguiente desigualdad doble, y represéntelo en la recta real:

Solución

$$y - \frac{3}{4} \leq \frac{5y+1}{3} \leq 1 + 2y$$

$$12 \cdot \left(y - \frac{3}{4}\right) \leq 12 \cdot \left(\frac{5y+1}{3}\right) \leq 12 \cdot (1 + 2y)$$

$$12y - 9 \leq 20y + 4 \leq 12 + 24y$$

Con el fin de eliminar denominadores, multiplicamos toda la desigualdad por 12, el denominador común de todos los denominadores que aparecen en la desigualdad (en este caso 4 y 3) , luego simplificamos.

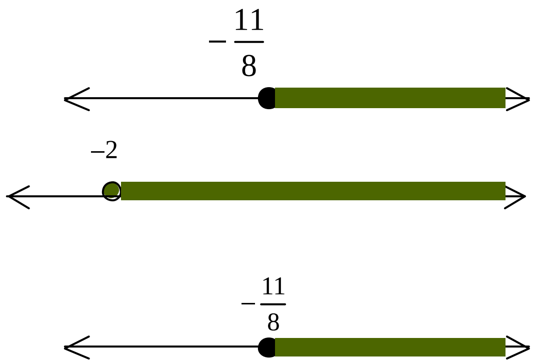
La doble desigualdad considerada es equivalente a las dos desigualdades siguientes:

$12y - 9 \leq 20y + 4$	y	$20y + 4 \leq 12 + 24y$
$12y - 20y \leq 4 + 9$		$20y - 24y \leq 12 - 4$

$-8y \leq 11$ $-4y \leq 8$

$y \geq -\frac{11}{8}$ $y \geq -2$

Ambas desigualdades deben satisfacerse para y, es decir debemos hallar la intersección entre los dos conjuntos soluciones,



Por lo tanto el conjunto solución es : $[-\frac{11}{8}, \ \infty) = \{x : \ x \geq -\frac{11}{8}\}$

3.2. Inecuación cuadrática

Llamaremos inecuación o desigualdad cuadrática de una variable a cualquier expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ o bien}$$
$$ax^2 + bx + c < 0 \text{ o bien}$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ o bien}$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$(a \neq 0)$ donde a, y b son constantes reales.

La solución de una desigualdad en una variable es el conjunto de todos los valores de la variable para los cuales la desigualdad es una proposición verdadera.

Una de las formas de resolver una desigualdad de este tipo consiste en expresar la ecuación cuadrática en su forma factorizada y luego utilizar la regla de los signos para determinar el conjunto solución.

En los siguientes ejemplos se estudiará este método.

<u>Ejemplo</u>

Hallar los valores de x que verifican : $x^2 - x - 6 \geq 0$

Solución

Primero expresamos la ecuación en la forma factorizada : $(x-3).(x+2) \geq 0$, luego por la regla de los signos sabemos que para que el producto de dos factores sea > 0 ("positivo"), ambos factores deben ser positivos o ambos negativos, es decir:

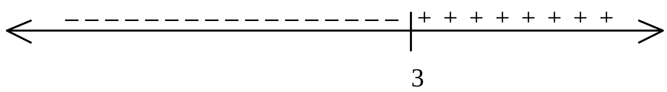
$(x-3) > 0 \wedge (x+2) > 0$ o bien $(x-3) < 0 \wedge (x+2) < 0$

El análisis de estas desigualdades se comprende fácilmente si lo representamos en la recta numérica de la siguiente manera:

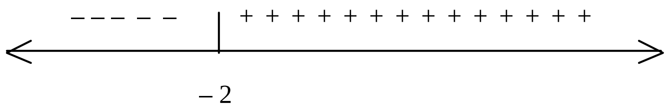
El factor $(x-3)$ cambia de signo a la izquierda y a la derecha de 3, para valores mayores que 3, el signo de ese factor es positivo, y para valores de x menores que 3, el signo del factor es negativo.

De forma análoga el factor $(x+2)$ cambia de signo a la izquierda y a la derecha de -2 , para valores mayores que -2, el signo de ese factor es positivo, y para valores de x menores que -2, el signo del factor es negativo. Esto se puede visualizar en la recta numérica de la siguiente forma:

(x – 3)

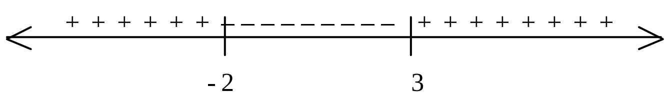


(x + 2)



Luego el signo del producto de estos cambiará a la izquierda y a la derecha de – 2 y de 3 es decir:

(x–3).(x+2)



La desigualdad $(x-3).(x+2) \geq 0$ se satisface cuando el producto de estos dos factores resulte mayor o igual a cero, es decir para aquellos valores de x que pertenecen al intervalo $(-\infty, -2]$ o bien al intervalo $[3, +\infty)$

Por lo tanto el conjunto solución es : $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$.

<u>Ejemplo</u>

Hallar los valores de x que verifican $3(x^2 + 1) < 5.(1 - x)$

Solución

Eliminando paréntesis, encontramos que:

$$3 x^2 + 3 < 5 - 5x$$

pasando todos los términos del lado derecho al izquierdo obtenemos:

$$3 x^2 + 3 - 5 + 5x < 0$$

o bien

$$3 x^2 + 5x - 2 < 0$$

factorizamos la expresión de la izquierda. En este Ejemplo, tenemos:

$$(3x - 1) (x + 2) < 0$$

o bien:

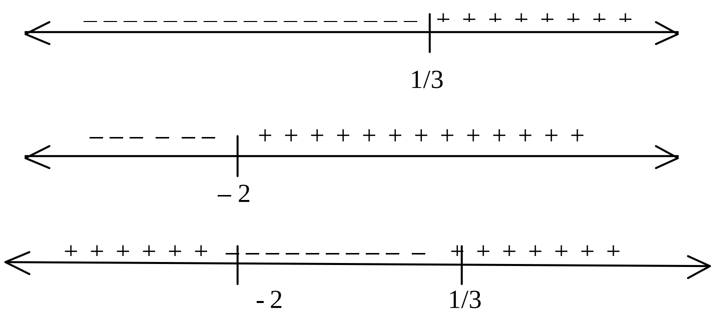
$$3.(x - \frac{1}{3}) (x + 2) < 0$$

analizamos el signo de cada factor y el del producto en la recta numérica:

$3.(x - \frac{1}{3})$

$(x + 2)$

$(x- \frac{1}{3}).(x+2)$



Los valores de x que hacen que la ecuación sea menor que cero (negativa) son los comprendidos entre –2 y $\frac{1}{3}$. Es decir el conjunto solución para la desigualdad dada es el intervalo : $(- 2 , \frac{1}{3})$.

3.3. Inecuación racional

Otro tipo de inecuaciones o desigualdades muy usadas son las denominadas racionales.

Llamaremos inecuación o desigualdad racional de una variable a cualquier expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \text{ o bien}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \text{ o bien}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \text{ o bien}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$$

$(Q(x) \neq 0)$ donde $P(x)$, y $Q(x)$ son polinomios.

Para resolver una desigualdad de este tipo, se expresan los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en su forma factorizada y luego utilizamos el método de la regla de los signos que hemos explicado anteriormente.

Éste se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo

Hallar los valores de x que verifican $\frac{1-x}{x^2-4} \geq 0$

Solución

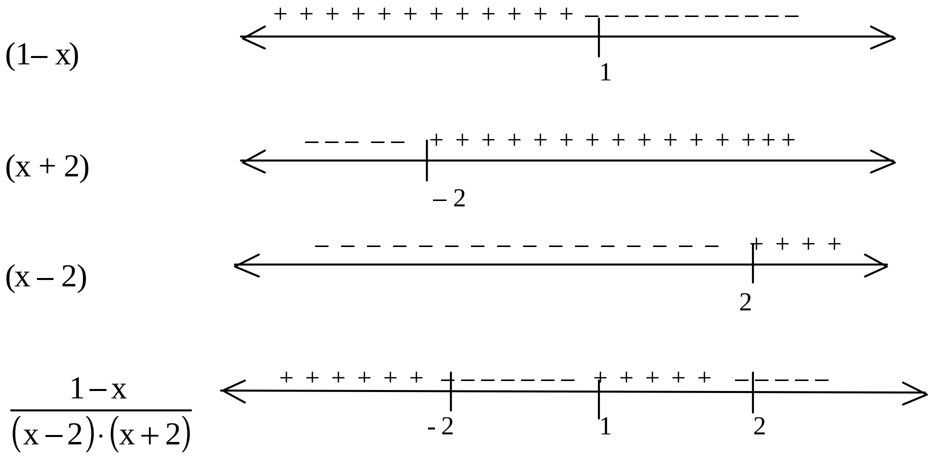
En primer lugar factoreamos los polinomios del numerador y denominador y escribimos:

$$\frac{1-x}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0$$

Utilizando la regla de los signos sabemos que el cociente resultará positivo cuando numerador y denominador tengan igual signo, es decir cuando:

$(1 - x) > 0$ y $(x-2).(x+2) > 0$ o bien cuando $(1 - x) < 0$ y $(x - 2).(x + 2) < 0$.

El signo de cada factor se analiza por separado y luego se obtiene el signo del producto o cociente de los factores:



Los valores de x que satisfacen la desigualdad propuesta $\frac{1-x}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0$, son aquellos para los cuales el cociente resulte mayor o igual que cero, esto es, para nuestro Ejemplo donde el signo de la expresión analizada es positivo (+) o en las raíces del polinomio del numerador descartando aquellas que anulen el denominador.

Por lo tanto el conjunto solución de la desigualdad dada es:

$\{ x : x \in (-\infty,-2) \cup [1,2] \}$

<u>Ejemplo</u>

Hallar los valores de x que verifican $\frac{-x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} \geq 2$

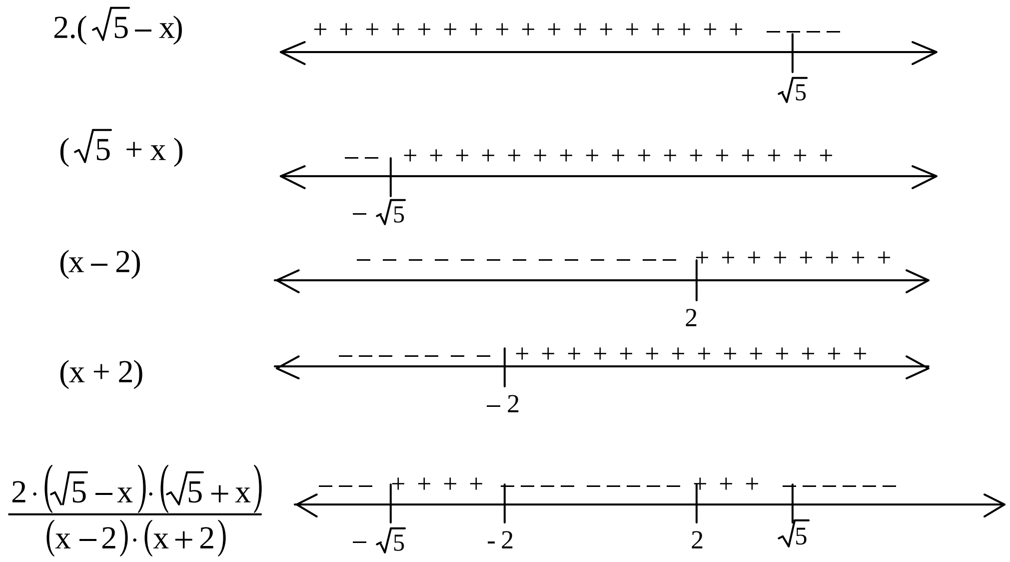
Solución

Como se puede ver la desigualdad no es de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, por consiguiente lo primero que hacemos es realizar algunos pasos algebraicos para expresarla de esa forma. Para ello restamos 2 en ambos miembros y luego realizamos las operaciones indicadas:

$$\frac{-x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{-x+x+2-2x^2+8}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0 \rightarrow \frac{10-2x^2}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0 \rightarrow$$

$$\frac{2\cdot(5-x^2)}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0 \rightarrow \frac{2\cdot(\sqrt{5}-x)\cdot(\sqrt{5}+x)}{(x-2)\cdot(x+2)} \geq 0$$

Analizamos los signos de cada factor y obtenemos:



Los intervalos para los cuales la desigualdad es mayor que cero son: $(-\sqrt{5}, -2)$ y $(2, \sqrt{5})$. Debemos analizar también para qué valores de x la expresión $\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{5}-x\right)\cdot\left(\sqrt{5}+x\right)}{\left(x-2\right)\cdot\left(x+2\right)}$ es igual a cero, ya que éstos también son soluciones de la inecuación dada; esto ocurre cuando x = $\sqrt{5}$ o bien cuando x = $-\sqrt{5}$. Por lo tanto el conjunto solución es : $\{ x : x \in [-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}]\}$.

3.4. Inecuación con valor absoluto

Además de las ecuaciones e inecuaciones estudiadas anteriormente existen las que incluyen valor absoluto. Las inecuaciones se resuelven utilizando la definición de valor absoluto de un número real y las propiedades del orden en los reales vistas en la sección I.

A continuación analizaremos algunos ejemplos:

Ejemplo

Hallar los valores de x que verifican: $|2x + 3| \leq \dfrac{1}{2}$.

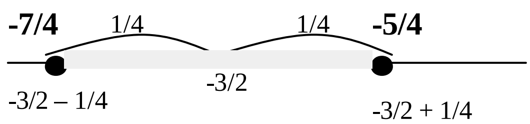
Solución

Para utilizar el concepto de distancia, primero debemos eliminar el factor 2 que multiplica a la variable x, para ello extraemos 2 como factor común y obtenemos:

$|2.(x+\frac{3}{2})| \leq \frac{1}{2}$, aplicando la propiedad 2) del valor absoluto tenemos:

$|2|.|x+\frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}$, dividiendo por 2 a ambos lados tenemos:

$|x+\frac{3}{2}| \leq \frac{1}{4}$ esta última desigualdad puede leerse como : “los números cuya distancia a $-\frac{3}{2}$ es menor o igual que 4” estos son los que pertenecen al intervalo: $\left[-\frac{7}{4},-\frac{5}{4}\right]$ según se ilustra en el siguiente gráfico



Otra forma de resolver la desigualdad dada es aplicando la definición de valor absoluto, esto es: $|2x+3| \leq \frac{1}{2}$

Se deben contemplar dos posibilidades : 1) si $2x + 3 \geq 0$ y 2) si $2x + 3 < 0$

<u>Caso 1</u>

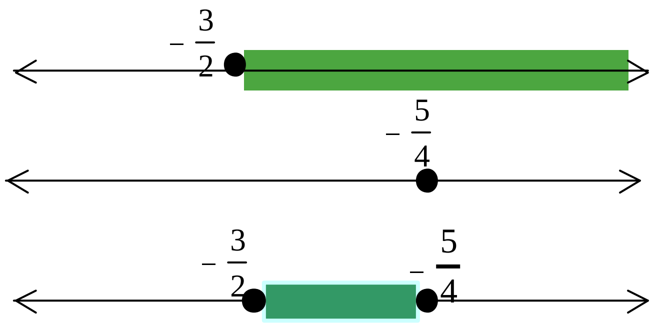
$$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

Si $x \geq -\frac{3}{2}$ entonces $|2x + 3| = 2x + 3$ por consiguiente la desigualdad dada puede escribirse como: $2x + 3 \leq \frac{1}{2}$ la cual se resuelve como hemos visto anteriormente, el conjunto solución es $x \leq -\frac{5}{4}$ pero recordemos que este conjunto es válido solamente cuando $x \geq -\frac{3}{2}$ por lo tanto debemos buscar la intersección de estas dos condiciones, es decir

$x \geq -\frac{3}{2}$

$x \leq -\frac{5}{4}$

$x \geq -\frac{3}{2} \wedge x \leq -\frac{5}{4}$



Solución 1

la intersección de las dos regiones es el intervalo $\left[-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right]$

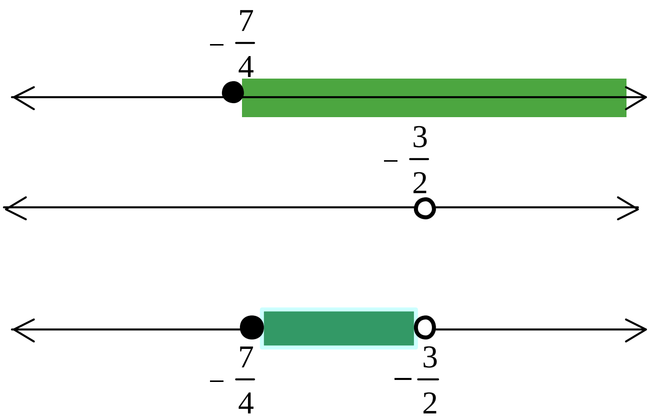
Caso 2

$$2x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$$

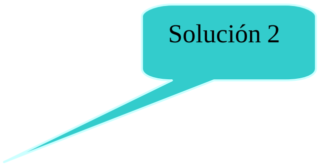
Si $x < -\frac{3}{2}$ entonces $|2x + 3| = -(2x + 3)$ por consiguiente la desigualdad dada puede escribirse como: $-2x - 3 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{4}$, el conjunto solución es $x \ge -\frac{7}{4}$ pero recordemos que este conjunto es válido solamente cuando $x < -\frac{3}{2}$ por lo tanto debemos buscar la intersección de estas dos condiciones, es decir

$x \ge -\frac{7}{4}$

$x < -\frac{3}{2}$



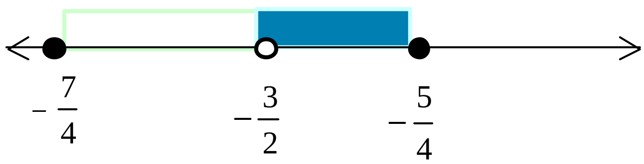
$x < -\frac{3}{2} \wedge x \ge -\frac{7}{4}$



la intersección de las dos regiones es el intervalo $\left[-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

Finalmente la solución buscada es la unión de las dos soluciones obtenidas en cada caso, es decir la unión de los intervalos:

$\left[-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right]$



Solución 1 $\cup$ Solución 2 $\left[-\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right]$

<u>Ejemplo</u>

Hallar los valores de x que verifican: $|3x + 1| \leq 2.\ |x - 6|$

Solución

Esta desigualdad es difícil de resolver utilizando la definición de valor absoluto (en este caso se deberían distinguir cuatro casos), aquí resulta conveniente utilizar las propiedades 6) y 7) y de este modo:

$$|3x + 1| \leq 2.\ |x - 6| \quad \Leftrightarrow |3x + 1|^2 \leq (2.\ |x - 6|)^2$$
$$\Leftrightarrow (3x + 1)^2 \leq 4.\ (x - 6)^2$$
$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 \leq 4x^2 - 48x + 144$$
$$\Leftrightarrow 5x^2 + 54x - 143 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (5x - 11).(x + 13) \leq 0$$

esta última es una desigualdad cuadrática la cual se resuelve analizando el signo de cada factor, tal como se estudió anteriormente. La solución es el intervalo: $\left[-13, \frac{11}{5}\right]$

<u>Ejemplo</u>

Hallar los valores de x que verifican: $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

Solución

La desigualdad puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2x+5}{x}\right| > 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{|2x+5|}{|x|} > 1$$
$$\Leftrightarrow \quad |2x+5| > |x| \quad \text{Si } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad |2x+5|^2 > |x|^2 \quad \text{Si } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (2x+5)^2 > (x)^2 \quad \text{Si } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 20x + 25 > x^2 \quad \text{Si } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 20x + 25 > 0 \quad \text{Si } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x+5)\cdot\left(x+\frac{5}{3}\right) > 0 \quad \text{Si } x \neq 0$$

esta última es una desigualdad cuadrática la cual se resuelve analizando el signo de cada factor, tal como se estudió anteriormente. La solución es el intervalo:

$$(-\infty,-5)\cup\left(-\frac{5}{3},0\right)\cup(0,\infty)$$