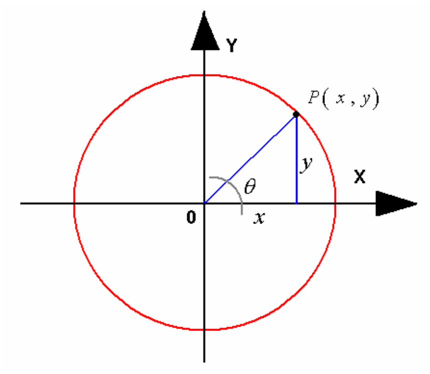
1.3. BREVE REPASO DE TRIGONOMETRÍA.

Las funciones trigonométricas nos permiten el estudio de muchos fenómenos de la naturaleza que son periódicos.



Cuando un ángulo φ se sitúa en posición normal en el centro de un círculo de radio ***r***, las funciones Trigonométricas del ángulo φ están definidas como sigue:

$$sen(\varphi)=\frac{y}{r} \qquad Cos(\varphi)=\frac{x}{r} \qquad Tan(\varphi)=\frac{y}{x}$$

$$Csc(\varphi)=\frac{r}{y} \qquad Sec(\varphi)=\frac{r}{x} \qquad Cot(\varphi)=\frac{x}{y}$$

Como complemento puede decirse que para las funciones trigonométricas se tienen las siguientes relaciones:

$$Tan(\varphi)=\frac{Sen(\varphi)}{Cos(\varphi)} \qquad Csc(\varphi)=\frac{1}{Sen(\varphi)} \qquad Sec(\varphi)=\frac{1}{Cos(\varphi)} \qquad Cot(\varphi)=\frac{1}{Tan(\varphi)}$$

A partir de las definiciones anteriores y teniendo en cuenta el círculo unitario centrado en el origen se pueden establecer los siguientes valores de referencia:

Función	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$Cos(\theta)$	$\sqrt{4}/2=1$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2=1/2$	$\sqrt{0}/2=0$
$Sen(\theta)$	$\sqrt{0}/2=0$	$\sqrt{1}/2=1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2=1$
$Tan(\theta)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indeterminado

Aplicando el teorema de Pitágoras al círculo unitario definido en la figura anterior:

$x^2+y^2=1$ que es lo mismo que escribir su equivalente

$$Sen^2(\varphi)+Cos^2(\varphi)=1$$

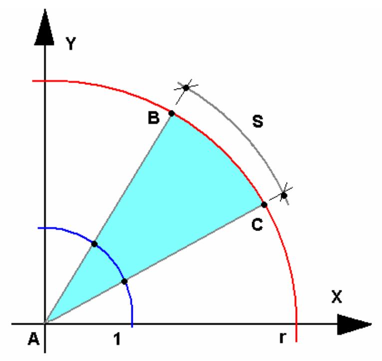
También es posible expresar las coordenadas del punto $p(x, y)$ en términos del radio del círculo y del ángulo al centro, así:

$$x = r\,Cos(\varphi) \qquad y = r\,Sen(\varphi)$$

Cuando se trata de una ecuación de radio unitario, la ecuación anterior se transforma en:

$$x = Cos(\varphi) \qquad y = Sen(\varphi)$$

MEDIDAS EN RADIANES



La medida en radianes de cualquier ángulo $\widehat{BAC}$ al centro del circulo está determinado por la longitud del arco que subtiende.

Tratándose de dos círculos concéntricos, uno de radio unitario y el otro de cualquier valor, los arcos que subtiende un ángulo al centro serán semejantes.

$$\frac{\text{Longitud del arco exterior}}{\text{Radio del Círculo exterior}} = \frac{\text{Longitud del arco interior}}{1}$$

Que es lo mismo que escribir: $\frac{s}{r} = \frac{\varphi}{1} = \varphi$

Para cualquier círculo con centro en $B(x, y)$, la razón s/r de la longitud del arco interceptado al radio del círculo da siempre la medida del ángulo en radianes.

$$s = \varphi\, r$$

Lo que significa que para un círculo de radio unitario, la longitud del arco interceptado será igual al ángulo al centro del círculo.

PERIODICIDAD

Debido que las coordenadas del punto $P(x, y)$, están definidas en función del ángulo φ, se puede afirmar que el punto $s + 2\pi$ corresponde al punto **s**, lo que permite definir las siguientes identidades:

$$Cos\left(\phi+2\pi\right)=Cos\phi \;\rightarrow\; Cos\left(\frac{\pi}{4}+2\quad\pi\right)=Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sen\left(\phi+2\,\pi\right)=Sen\phi \;\rightarrow\; Sen\left(\frac{\pi}{4}+2\,\pi\right)=Sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De donde es se asegurar que el número $2\,\pi$ puede ser adicionado o restado a cualquier ángulo que sea parte del dominio de las funciones ***Seno*** y ***Coseno***; lo anterior puede aplicarse ***n*** veces sobre el ángulo.

$$Cos\left(\phi+2\,n\,\pi\right)=Cos\left(\phi\right) \;\rightarrow\; Cos\left(\frac{\pi}{4}+5\left(2\,\pi\right)\right)=Cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Sen\left(\phi+2\,n\,\pi\right)=Sen\left(\phi\right) \;\rightarrow\; Sen\left(\frac{\pi}{4}+7\left(2\,\pi\right)\right)=Sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

FORMULAS DE SUMAS Y DIFERENCIAS

Dos ángulos de igual magnitud pero de signo opuesto únicamente difieren en el sentido de su proyección vertical, por lo que se puede decir:

$$Sen\left(-\,\phi\right)=-\frac{y}{r}=-\,Sen\left(\phi\right)$$

$$Cos\left(-\,\phi\right)=\frac{x}{r}=Cos\left(\phi\right)$$

A manera de repaso es bueno recordar las siguientes identidades:

(1) $\quad Sen\left(A+B\right)=Sen\left(A\right)Cos\left(B\right)+Cos\left(A\right)Sen\left(B\right)$

(2) $\quad Cos\left(A+B\right)=Cos\left(A\right)Cos\left(B\right)-Sen\left(A\right)Sen\left(B\right)$

Si en estas ecuaciones se reemplaza ***B*** por ***–B*** y teniendo en cuenta que:

$$Sen\left(-B\right)=-Sen\left(B\right) \qquad Cos\left(-B\right)=Cos\left(B\right)$$

$$Sen\left(A-B\right)=Sen\left(A\right)Cos\left(B\right)-Cos\left(A\right)Sen\left(B\right)$$

$$Cos\left(A-B\right)=Cos\left(A\right)Cos\left(B\right)+Sen\left(A\right)Sen\left(B\right)$$

La formula correspondiente a la Tangente de la diferencia se puede definir como una consecuencia de las dos ecuaciones anteriores:

$$Tan(A-B)=\frac{Sen(A-B)}{Cos(A-B)}=\frac{Sen(A)\,Cos(B)-Cos(A)\,Sen(B)}{Cos(A)\,Cos(B)+Sen(A)\,Sen(B)}$$

Dividiendo numerador y denominador por $Cos(A)\,Cos(B)$

$$Tan(A-B)=\frac{Tan(A)-Tan(B)}{1+Tan(A)\,Tan(B)}$$

Análogamente para la tangente de la suma de dos ángulos se tiene:

$$Tan(A+B)=\frac{Sen(A+B)}{Cos(A+B)}=\frac{Sen(A)\,Cos(B)+Cos(A)\,Sen(B)}{Cos(A)\,Cos(B)-Sen(A)\,Sen(B)}$$

O lo que es lo mismo que:

$$Tan(A+B)=\frac{Tan(A)+Tan(B)}{1-Tan(A)\,Tan(B)}$$

FORMULAS DEL DOBLE DEL ANGULO

Si $A=B=\phi$ tomando como punto de partida las ecuaciones $(\ 1\ )$ y $(\ 2\ )$, se tiene:

$$Sen(2\,\phi)=2\,Sen(\phi)\,Cos(\phi)$$
$$Cos(2\,\phi)=Cos^2(\phi)-Sen^2(\phi)$$

FORMULAS DE LA MITAD DEL ANGULO. (Un limite útil)

Haciendo $A=B=\phi$ en la ecuación $(\ 2\ )$, se tiene:

$$Cos(2\phi)=Cos^2(\phi)-Sen^2(\phi)=Cos^2\phi-\left(\ 1-Cos^2(\phi)\ \right)=2\,Cos^2(\phi)-1$$

Despejando $Cos^2(\phi)$ se tiene:

$$(3)\qquad Cos^2(\phi)=\frac{1+Cos(2\,\phi)}{2}$$

De igual manera, trabajando para $Sen^2(\phi)$ se puede obtener la siguiente ecuación:

$$Cos(2\phi) = Cos^2(\phi) - Sen^2(\phi) = \left(1 - Sen^2(\phi)\right) - Sen^2(\phi) = 1 - 2\,Sen^2(\phi)$$

Despejando $Sen^2(\phi)$ se tiene:

$$(4) \qquad Sen^2(\phi) = \frac{1 - Cos(2\,\phi)}{2}$$

Analizando las condiciones del signo para la ecuación (3), se tiene:

$$Cos(\phi) = \sqrt{\frac{1 + Cos(2\,\phi)}{2}} \quad \text{cuando } Cos(\phi) \rangle\ 0$$

Para cuando el ángulo se encuentra en primer y cuarto cuadrante, y será negativo cuando:

$$Cos(\phi) = -\sqrt{\frac{1 + Cos(2\,\phi)}{2}} \quad \text{cuando} \quad Cos(\phi) \langle\ 0$$

Lo que quiere decir que el ángulo se encuentra en el segundo o tercer cuadrante.

Lo mismo sucede para la ecuación (4), la cual quedaría como:

$$Sen(\phi) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos(2\,\phi)}{2}}$$

Donde el signo dependerá de la posición del ángulo, será positivo para cuando el ángulo se encuentra en primer y segundo cuadrante, de lo contrario será negativo.

Ahora bien, reemplazando el ángulo ϕ por $\phi/2$ en la ecuación anterior se obtienen las siguientes expresiones:

$$Cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos(\phi)}{2}}$$
$$Sen\left(\frac{\phi}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos(\phi)}{2}}$$

Donde nuevamente el signo de la ecuación depende de la posición del ángulo $\phi/2$.

Dividiendo la ecuación (4) por el ángulo ϕ, e invirtiendo la ecuación resultante se obtiene:

$$\frac{1-Cos(2\phi)}{2\phi}=\frac{Sen^2(\phi)}{\phi}$$

De manera que al aplicar el límite cuando el ángulo tienda a cero de tiene:

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{1-Cos(2\phi)}{2\phi}=\lim_{\phi\to 0}\frac{Sen^2(\phi)}{\phi}$$

$$\lim_{\phi\to 0}\frac{1-Cos(2\phi)}{2\phi}=\lim_{\phi\to 0}\left(\frac{Sen(\phi)}{\phi}Sen(\phi)\right)=\lim_{\phi\to 0}\left(\frac{Sen(\phi)}{\phi}\right)\times\lim_{\phi\to 0}\left(Sen(\phi)\right)=1\times 0=0$$

Si se reemplaza $h=2\phi$ en la ecuación anterior, se tiene el siguiente resultado:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-Cos(h)}{h}=0$$

Que es el resultado del limite propuesto, el cual será utilizado para obtener la formula de la derivada de $y=Sen(x)$.