1.6. BREVE REPASO DE LOGARITMOS.

Sistemas de Logaritmos.

Si cualquier número positivo puede tomarse como Base, existe infinito número de sistemas de logaritmos, pero tradicionalmente, solo se utilizan dos sistemas:

- Logaritmos ***Vulgares***, aquellos cuya base es ***10***, y se expresan como Log_{10}., o como Log
- Logaritmos ***Naturales*** o ***Neperianos***, cuya base es el número ***e***, y se expresan como Log_e, o lo que es lo mismo como Ln.

Propiedades Generales de los Logaritmos.

1. La Base de un sistema de logaritmos no puede ser negativa.

   Al ser negativa, se tendría potencias pares que son positivas y potencias impares que son negativas, lo que genera número sin logaritmo.

2. Los números negativos no tiene logaritmo.
3. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1.
4. En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 es cero.
5. Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo.
6. Los número menores que 1 tienen logaritmo negativo.

Reglas de los Logaritmos:

Para las siguientes reglas debe cumplirse que $A \geq 0\,;\, B \geq 0$ y $c \neq 1$

Regla No.1

Logaritmo de un Producto

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$Log_c(A \times B) = Log_c(A) + Log_c(B)$$

Regla No.2

Logaritmo de un Cociente

El logaritmo de un producto es igual al logaritmo dividendo menos el logaritmo del divisor.

$$Log_c(A/B) = Log_c(A) - Log_c(B)$$

Regla No.3

Logaritmo de una Potencia

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base.

$$Log_c(A^n) = n\ (Log_c(A))$$

Regla No.4

Logaritmo de una Raíz

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo de la cantidad subradical dividido entre el índice de la raíz.

$$Log_c \sqrt[n]{A} = {(Log_c(A))}/{n} \text{ , donde } A \geq 0 ; n \neq 0$$

Regla No 5.

Definiciones de Logaritmos

$$c^{Log_c(M)} = M \text{ ,}$$

y

$$Log_c C^n = n$$

Ejemplo

Escriba $Log_a \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$ como una diferencia de logaritmos.

$$Log_a \frac{x^2}{(x-1)^3} = Log_a x^2 - Log_a (x-1)^{-3} = \quad \text{Expresando las potencias como factores}$$

$$Log_a x^2 = 2\ Log_a x \quad \text{Por tratarse del logaritmo de una potencia}$$

$$Log_a (x-1)^{-3} = -3\ Log_a (x-1) \quad \text{Por tratarse del logaritmo de una potencia}$$

$$Log_a \frac{x^2}{(x-1)^3} = 2\ Log_a x + 3\ Log_a (x-1) = \quad \text{Reemplazando en la expresión original}$$

Propiedades de los logaritmos Vulgares (Base 10)

a. En este sistema los únicos números cuyos logaritmos son números enteros son las potencias de 10.

b. El logaritmo de todo número que no sea una potencia de 10 será una fracción propia o un número entero más una fracción propia, entendiéndose como ***Característica*** el número entero y la ***Mantiza*** la fracción.

Como $Log(\ 1\ ) = 0$ y $Log(\ 10\ ) = 1$, los números comprendidos entre 1 y 10 tendrán un logaritmo entre 0 y 1.

Como $Log(\ 10\ ) = 1$ y $Log(\ 100\ ) = 2$, los número comprendidos entre 1 y 2 tendrán como número entero del logaritmo el número 1, más una fracción propia de cada número.

c. Valor de la ***Característica***.

Para un número comprendido entre 1 y 10, la característica es 0.

Para un número mayor que 10, la característica será un número menor que el número de cifras enteras del número.

d. Valor de la ***Mantiza***

En los números menores que 1, la característica es negativa, pero la mantisa es positiva.

Cambio de Base

En ocasiones se hace necesario calcular logaritmos que tiene Base diferente a las dos expuestas anteriormente, Base ***10*** o Base ***e.*** Cuando esta situación se presenta se hace necesario realizar un cambio de Base para pasar la expresión de una Base desconocida a una Base conocida.

Supóngase que se desea calcular $y = \log_a(x)$, el procedimiento para cambiar la Base será el siguiente:

$$a^y = x \quad \text{Por definición de Logaritmo}$$
$$Log_b(a^y) = Log_b(x) \quad \text{Regla de igualdad para Logaritmos}$$
$$yLog_b(a) = Log_b(x) \quad \text{Regla de la potencia para logaritmos}$$
$$y = \frac{Log_b(x)}{Log_b(a)} \quad \text{Donde la Base } \boldsymbol{b} \text{ es conocida}$$

Ejemplo : Resolver la ecuación $6^{(3x+2)} = 200$:

$$6^{(3x+2)} = 200 \quad \text{Expresión original}$$
$$3x + 2 = \log_6(200) \quad \text{Tomando Logaritmos en Base 6 a ambos lados de la igualdad}$$
$$3x = \log_6(200) - 2 \quad \text{Despejando } \boldsymbol{x}$$
$$x = \frac{Log_6(200) - 2}{3} \quad \text{Donde}$$
$$Log_6(200) = \frac{Ln(200)}{Ln(6)} \quad \text{por cambio de Base.}$$
$$x \approx 0,3190157417$$

Calcular el valor de expresiones por medio de Logaritmos.

Utilizando las propiedades de los logaritmos es posible calcular algunas expresiones más complicadas.

Hallar el valor de $1.215 \times 0,84$ por medio de logaritmos.

Como el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$Log(1.215\times 0,84) = Log(1.215) + Log(\ 0,84\ )$$ Propiedad No. 1de Logaritmos

$$Log(1215\times 0,84) = 3,0844576 + (-\ 0,0757507)$$ Obteniendo valores

$$Log(\ 1215\times 0,84\ ) = 3,008855$$ Realizando la diferencia

Entonces buscando el antilogaritmo de 3.008855 se obtiene el resultado del producto que es 1020,59

Ejemplos :

1.- Hallar $\left(\ 3,284\times 0,09132\ \right) / 715,84$

2.- Hallar $\left(\left(32,7\times 0,006\right) / \left(0,14\times 89,17\right) \right)^{\left(1/3\right)}$

3.- Dados los logaritmos de dos números dados, calcular el logaritmo del producto:

$Log\ (\ 2\ ) = 0,301030$

$Log\ (\ 3\ ) = 0,477121$

Hallar $Log\ (\ 108\ ) = 2^2\times 3^3$

Ejercicios Propuestos

1. Exprese la ecuación dada en forma exponencial:

a. $Log_2 32 = 5$ **b.** $Log_4 64 = 3$

c. $Log_{10}\ (\ 0,1\ ) = -1$ **d.** $Log_4 2 = \frac{1}{2}$

e. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right) = -4$ **f.** $Log_2\left(M\right) = 1.3$

g. $Ln\left(x+1\right) = 2$ **h.** $Ln\left(x\right) = 4$

2. Exprese la ecuación dada en forma de logaritmo

a. $2^3 = 8$ **b.** $10^4 = 10.000$

c. $4^{-3/2} = 0{,}125$ **d.** $8^{-1} = \dfrac{1}{8}$

e. $e^{x} = 2$ **f.** $e^{0.5x} = t$

3. Evalúe la expresión dada:

a. $Log_5 5^4$ **b.** $\log_{10} \sqrt{10}$

c. $\log_8 64$ **d.** $2^{\log_2 37}$

e. $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)$ **f.** $e^{Ln(\pi)}$

4. Utilice las leyes de los logaritmos para rescribir las siguientes expresiones:

a. $Log_2(6x)$ **b.** $Log\sqrt{5}$

c. $Log_5\left(x^3y^6\right)$ **d.** $Ln\left(\dfrac{a\,b}{\sqrt[3]{c}}\right)$

e. $Log_2\left(x(x-1)\right)$ **f.** $Log_6\sqrt[4]{17}$

g. $Log_2\left(\dfrac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ **h.** $Ln\left(\dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}\right)$

i. $Log\sqrt{\dfrac{x^2+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^3-7\right)^2}}$ **j.** $Log\left(\dfrac{10^x}{x\left(x^2+1\right)\left(x^4+2\right)}\right)$

5. Escribir cada una de las siguientes expresiones como un único logaritmo :

a. $3\,Log_5(\,u\,)+4\,Log_5(\,v\,)$ **b.** $Log_{1/2}\sqrt{x} - Log_{1/2}\left(x^3\right)$

c. $2\left(Log_5(\,x\,)+2\,Log_5(\,y\,)-3\,Log_3(\,z\,)\right)$ **d.** $Ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)+Ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-Ln\left(x^2-1\right)$

e. $8\,Log_2\left(\sqrt{3\,x-2}\right)-Log_2\left(\dfrac{4}{x}\right)+Log_2(\,4\,)$ **f.** $Log\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}\right)-Log\left(\dfrac{x^2+7x+6}{x+2}\right)$

g. $21\,Log_3\left(\sqrt[3]{x}\right)+Log_3\left(9\,x^2\right)-Log_5(25)$

6. Utilice la formula de cambio de base para evaluar los siguientes logaritmos:

a. $Log_2 7$ **b.** $Log_5 2$

c. $Log_3 11$ **d.** $Log_5 (89)$

e. $Log_{\sqrt{2}} (\sqrt{5})$

7. Determinar la solución de las ecuaciones exponenciales dadas:

a. $3^{x+2} = 7$ **b.** $8e^{2x} = 20$

c. $e^{3-2x} = 4$ **d.** $e^{2x} - e^{x} - 6 = 0$

e. $3x^2 e^x + x^3 e^x = 0$

8. Determinar la solución de las ecuaciones Logarítmicas dadas:

a. $Log_2 (x+2) = 5$ **b.** $Ln(x) = 8$

c. $Log_2 (25 - x) = 3$ **d.** $4 + 3Log(2x) = 16$

e. $Log(x+2) + Log(x-1) = 1$ **f.** $Log_2 (x^2 - x - 2) = 2$

g. $2Log(x) = Log(2) + Log(3x-4)$