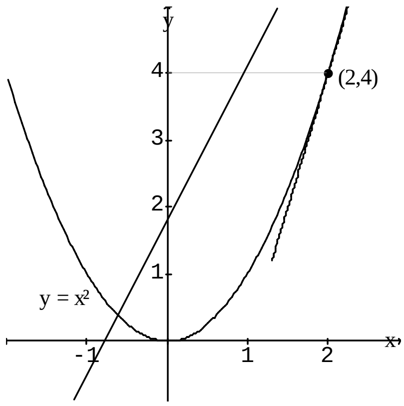
Problemas de derivadas y Máximos y Mínimos.

Ejemplo 1. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) = x^2 en el punto (2, 4)

Solución. La recta cuya pendiente buscamos se muestra en la figura. Es claro que tiene una pendiente positiva grande.

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h}$$
$$= 4$$

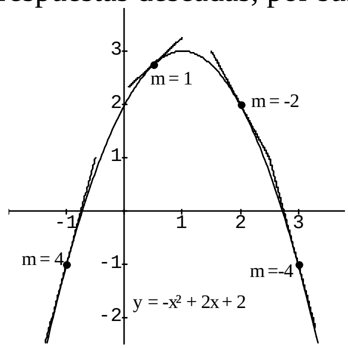


1. Problemas de Derivadas.

Ejemplo 2. Encuentre la pendiente de la tangente a la curva y = f(x) = $-x^2+2x+2$ en los puntos con coordenada x de –1, $\frac{1}{2}$, 2 y 3

Solución. En vez de hacer cuatro cálculos separados, parece acertado calcular la pendiente de abscisa c y obtener después las cuatro respuestas deseadas, por sustitución.

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2 - 2(c+h) + 2 - \left(-c^2 + 2c + 2\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2c - h + 2)}{h}$$
$$= -2c + 2$$



Las cuatro pendientes deseadas (obtenidas al hacer x = –1, $\frac{1}{2}$, 2 y 3) son 4, 1, -2 y –4. Estas respuestas parecen concordar con la gráfica de la figura.

Ejemplo 3. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva y = 1/x en (2, ½). Véase figura.

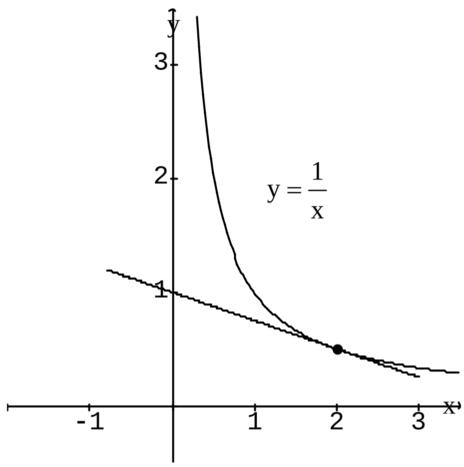
Solución. Sea f(x) = 1/x..

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{2(2+h)} - \frac{2+h}{2(2+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2-(2+h)}{2(2+h)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{2(2+h)h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$



Conociendo la pendiente de la recta (m=$-\frac{1}{4}$) y el punto (2, $-\frac{1}{2}$) de la misma, podemos escribir con facilidad su ecuación utilizando la forma punto pendiente $y - y_0 = m(x-x_0)$. El resultado es $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$.

Ejemplo 4. Encuentre la velocidad instantánea de un cuerpo que cae, partiendo del reposo, en los instantes $t = 3.8$ y $t = 5.4$ segundos.
Solución. Calculemos la velocidad instantánea para $t = c$ segundos. Dado que $f(t)=16t^2$,

$$\nu = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (32c + 16h) = 32c)$$

Así, la velocidad instantánea a los 3.8 segundos es 32(3.8) = 121.6 pies por segundo; a los 5.4 segundos es 32(5.4) = 172.8 pies por segundo.

Ejemplo 5. ¿Cuánto tardará el cuerpo que cae en el ejemplo 4 en alcanzar una velocidad instantánea de 112 pies por segundo.
Solución. Aprendimos en el ejemplo 4 que la velocidad instantánea después de c segundos es 32c. Entonces, podemos resolver la ecuación 32c = 112. La solución es $c = \frac{112}{32} = 3.5$ segundos.

Ejemplo 6. Una partícula se mueve a lo largo del eje coordenado y s, su distancia en centímetros desde el origen al concluir t seg, está dada por $s = f(t) = \sqrt{5t+1}$. Encuentre la velocidad instantánea de la partícula al final de 3 segundos.
Solución.

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h}
\end{aligned}
$$

Para evaluar este límite, racionalicemos el numerador (multiplicando numerador y denominador por $\frac{\sqrt{16+5h}+4}{h}$). Obtenemos

$$
v = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{16+5h}-4}{h} - \frac{\sqrt{16+5h}+4}{\sqrt{16+5h}+4} \right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{16+5h-16}{\sqrt{16+5h}+4} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{16+5h}+4} = \frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

Concluimos que la velocidad instantánea a los tres segundos es $\frac{5}{8}$ de centímetro por segundo.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = 13x - 6$. Encuentre $f'(4)$.
Solución.

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[13(4+h)] - [13(4) - 6]}{} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h\to 0} 13 = 13
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2. Si $f(x) = x^3 + 7x$, encuentre $f'(c)$.
Solución.

$$
\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(c+h)^3 + 7(c+h)\right] - \left[c^3 + 7c\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3c^2h + 3ch^2 + h^3 7h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3c^2 + 3ch + h^2 + 7 \\
&= 3c^2 + 7
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3. Si *f(x) = 1/x*, encuentre *f'(x)*

Solución. Observe un ligero cambio en la forma en que está planteado este ejemplo. Hasta aquí hemos usado la letra *c* para designar un número fijo en el cual se va a evaluar la derivada. De acuerdo con ello, hemos calculado *f(c)* Para calcular *f'(x)* basta con pensar en *x* como un número fijo, pero arbitrario, y proceder como en lo anterior.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x-(x+h)-f(x)}{(x+h)x}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{-h}{(x+h)x}\cdot\frac{1}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-1}{(x+h)x}\right] = \frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto, *f'* es la función dada por $f'(x) = -1/x^2$. Su dominio es todos los números reales con la excepción de *x* = 0.

Ejemplo 4. Encuentre la derivada de *F* si $F(x) = \sqrt{x}$, x > 0.

Solución.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Seguramente ya habrá notado que encontrar una derivada implica una derivada implica siempre tomar el límite de un cociente en el que tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Nuestro trabajo consiste en simplificar ese cociente, de modo que podamos cancelar un factor *h* en el numerador y el denominador, permitiendo con ello evaluar el límite. En el ejemplo actual, esto se puede realizar racionalizando el numerador.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{h}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{x+h-x}{h\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{h\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

Por lo tanto, *F’* (la derivada de *F*) está dada por $F'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Ejemplo 5. Use el resultado del recuadro anterior para encontrar *g’(c) si g(x) = 2(x+3).*

Solución.

$$g'(c)=\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{\frac{2}{x+3}-\frac{2}{c+3}}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\left[\frac{2(c+3)-2(x+3)}{(x+3)(c+3)}-\frac{1}{x-c}\right]$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{-2}{(x+3)(c+3)}=\frac{-2}{(c+3)^2}$$

Hemos manipulado el cociente hasta que pudimos cancelar el factor *x – c* del numerador y del denominador. Entonces pudimos evaluar el límite.

Ejemplo 6. Cada una de las siguientes expresiones es una derivada, pero ¿de qué función y en qué punto?

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(4+h)^2 - f(x)}{h}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x-3}$

Solución.
a) Ésta es la derivada de $f(x) = x^2$ para x = 4.
b) Ésta es la derivada de $f(x) = 2/x$ para x = 3.

Ejemplo 1. Encuentre las derivadas de $5x^2 + 7x – 6$ y $4x^6 – 3x^5 – 10x^2 + 5x + 16$.
Solución.

$$D_x = \frac{d}{dx}(5x^2 + 7x - 6) = D_x = \frac{d}{dx}(5x^2 + 7x) - D_x = \frac{d}{dx}(6) \qquad \text{(Teorema F)}$$
$$= D_x = \frac{d}{dx}(5x^2) + D_x = \frac{d}{dx}(7x)\, D_x = \frac{d}{dx}(6) \qquad \text{(Teorema E)}$$
$$= 5\, D_x = \frac{d}{dx}(x^2) + 7\, D_x = \frac{d}{dx}(x) - D_x = \frac{d}{dx}(6) \qquad \text{(Teorema D)}$$
$$= 5\cdot 2x + 7\cdot 1 + 0 \qquad \text{(Teorema C, B, A)}$$
$$= 10x + 7$$

Para encontrar la siguiente derivada, observe que los teoremas sobre sumas y diferencias se extienden a cualquier número finito de términos. Entonces,

$$D_x = \frac{d}{dx}(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16)$$
$$= D_x = \frac{d}{dx}(4x^6) - D_x = \frac{d}{dx}(3x^5) - D_x = \frac{d}{dx}(10x^2) + D_x = \frac{d}{dx}(5x) + D_x = \frac{d}{dx}(16)$$
$$=4\, D_x = \frac{d}{dx}(x^6) - 3\, D_x = \frac{d}{dx}(x^5) - 10\, D_x = \frac{d}{dx}(x^2) + 5\, D_x = \frac{d}{dx}(x) + D_x = \frac{d}{dx}(16)$$
$$= 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0$$
$$= 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5.$$

Ejemplo 2. Use la regla del producto para encontrar la derivada de $(3x^2-5)(2x^4-x)$.
Solución.

$$D_x = \frac{d}{dx}[(3x^2 - 5)] = (3x^2 - 5)\, D_x = \frac{d}{dx}(2x^4 - x) + (2x^4 - x)\, D_x = \frac{d}{dx}(3x^2 - 5)$$
$$= (3x^2 - 5)(8x^3 - 1) + 2x^4 - x)(6x)$$
$$= 24x^5 - 3x^2 - 40x^3 + 5 + 12x^5 - 6x^2$$
$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5.$$

Para comprobar, multiplicamos primero y derivamos después.
$(3x^2 – 5)(2x^4 – x) = 6x^6 – 10x^4 – 3x^3 + 5x$.

Entonces,

$$D_x = \frac{d}{dx}[(3x^2 - 5)(2x^4 - x)] = D_x = \frac{d}{dx}(6x^6) - D_x = \frac{d}{dx}(3x^3) + D_x = \frac{d}{dx}(5x)$$

$$= 36x^5 - 40x^3 - 9x^2 + 5$$

Ejemplo 3. Encuentre la derivada de $\frac{(3x-5)}{(x^2+7)}$.

Solución.

$$D_x = \frac{d}{dx}\left[\frac{3x-5}{x^2+7}\right] = \frac{\left(x^2+7\right)D_x = \frac{d}{dx}(3x-5) - (3x-5)D_x = \frac{d}{dx}\left(x^2+7\right)}{\left(x^2+7\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+7\right)(3) - (3x-5)(2x)}{\left(x^2+7\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{\left(x^2+7\right)^2}$$

Ejemplo 4. Encuentre $D_x = \frac{d}{dx}y$ si $y = \frac{2}{x^4+1} + \frac{3}{x}$.

Solución.

$$D_x = \frac{d}{dx}y = D_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^4+1}\right) + D_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \frac{\left(x^4+1\right)D_x = \frac{d}{dx}(2) - 2D_x = \frac{d}{dx}\left(x^4+1\right)}{\left(x^4+1\right)^2} + \frac{xD_x = \frac{d}{dx}(3) - 3D_x = \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{-8x^3}{\left(x^4+1\right)^2} - \frac{3}{x^2}$$

Ejemplo 5.- Demuestre que la regla de potencias se cumple para exponentes enteros negativos; es decir,

$$\boxed{D_x = \frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}}$$

Solución.

$$D_x = \frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right) = D_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Ejemplo 1.- Si $y = 1/(2x^2 - 4x+1)^{60}$, encuentre $D_x = \frac{d}{dx}$ y

Solución. Consideremos esto como:

$$y = u^{60} \qquad \text{y} \qquad u = 2x^2 - 4x + 1$$

Emtonces,

$$D_x = \frac{d}{dx}\text{ y} = D_u = \frac{d}{du}\text{ y} \cdot D_x = \frac{d}{dx}\text{ u}$$

$$= (60u^{59})(4x - 4)$$

$$= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

Ejemplo 2.- Si $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, encuentre $D_x = \frac{d}{dx}$ y

Solución. Considérelo en esta forma:

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \qquad y \qquad u = 2x^5 - 7$$

Entonces,

$$D_x = \frac{d}{dx}\text{ y} = D_u = \frac{d}{du}\text{ y} \cdot D_x = \frac{d}{dx}\text{ u}$$

$$= (-3u^{-4})(10x^4)$$

$$= \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4$$

$$= \frac{-30x^4}{\left(2x^5 - 7\right)^4}$$

Ejemplo 4.- Encuentre $D_t = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)$

Solución. Considérelo como encontrar $D_t = \frac{d}{dt}$ y, donde

$$y = u^{13} \qquad \text{y} \qquad u = \frac{t^3 - 2x + 1}{t^4 + 3}$$

Entonces, la regla de la cadena seguida por la regla del cociente nos da:

$$D_t = \frac{d}{dt}\, y D_u = \frac{d}{du}\, y\, D_t = \frac{d}{dt} u$$

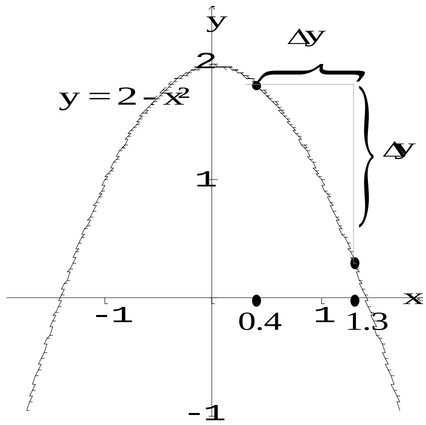
$$= 13u^{12}\, \frac{\left(t^4 + 3\right)\left(3t^2 - 2\right) - \left(t^3 - 2t + 1\right)\left(4t^3\right)}{\left(t^4 + 3\right)^2}$$

$$= 13\left(\frac{t^3 - 2x + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \cdot \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{\left(t^4 + 3\right)^2}$$

Ejemplo 1. Sea $y = f(x) = 2 - x^2$. Encuentre Dy cuando x cambia de 0.4 a 1.3 (Ver figura).

Solución.

$\Delta y = f(1.3) – f(0.4) = [2-(1.3)^2] – [2–(0.4)^2] = -1.53$



Ejemplo 2.- Encuentre dy/dx si $y = x^3 – 3x^2 + 7x$.

Solución

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 3x^2 + 7x\right)$$

$$= \frac{d\left(x^3\right)}{dx} - 3\frac{d\left(x^2\right)}{dx} + 7\frac{d\left(x\right)}{dx}$$

$$= 3x^2 - 3(2x) + 7(1)$$

$$= 3x^2 - 6x + 7$$

Ejemplo 4.- Encuentre *dy/dx si* $y = (x^3 - 23x)^{12}$.
Solución.- Considere a $x^3 - 2x$ como u. Entonces, $y = u^{12}$y

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$= (12x^{11})(3x^2 - 2)$$

$$= 12(x^3 - 2x)^{11}(3x^2 - 2)$$

Si $y = f(u)$, $u = g(\nu)$ y $\nu = h(x)$, entonces

$$\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dx}$$

Ejemplo 4.- Suponga que se arroja una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima?
c) ¿Cuándo llega al piso?
d) ¿Con qué velocidad llega al piso?
e) ¿Cuál es su aceleración al momento t = 2?

Solución.- Sea t = 0 que corresponde al instante cuando la pelota es arrojada. Entonces

$s_0 = 160$ y $\nu_0 = 64$, por lo que

$s = 16t^2 + 64t + 160$

$$s = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -32$$

a) La bola alcanza su altura máxima en el momento en que su velocidad es 0; esto es, cuando $-32t + 64 = 0$, o sea t = 2 segundos.
b) Cuando t = 2, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ pies.
c) La pelota golpea el piso cuando s = 0; es decir cuando
$-16t^2 + 64t + 160 = 0$
Si dividimos entre –16 y usamos la fórmula cuadrática, obtenemos
$t^2 - 4t - 10 = 0$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16+40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Solo la respuesta positiva tiene sentido. Por lo tanto, la pelota llega al suelo a los $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5.74$ segundos

d) Cuando $t = 2 + \sqrt{14}, \nu = -32\left(2 + \sqrt{14}\right) + 64 = -119.73$. Entonces, la pelota llega al suelo con una velocidad de 119.73 pies por segundo.
e) La aceleración es siempre de –32 pies por segundo. Ésta es la aceleración de la gravedad cerca del nivel del mar.

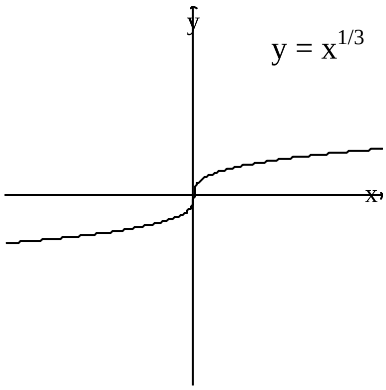
Zill 1

Ejemplo 4.- Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en (1, 1).

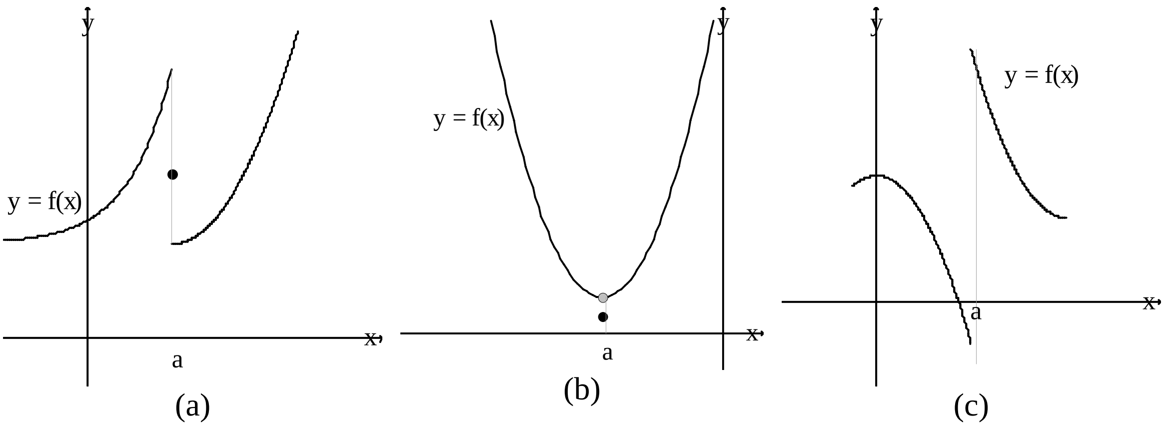
Solución. Por el ejemplo 2, la pendiente de la tangente en (1, 1) es $m_{tan} = 2$. La forma punto-pendiente de una recta da

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{o bien} \quad y = 2x - 1.$$

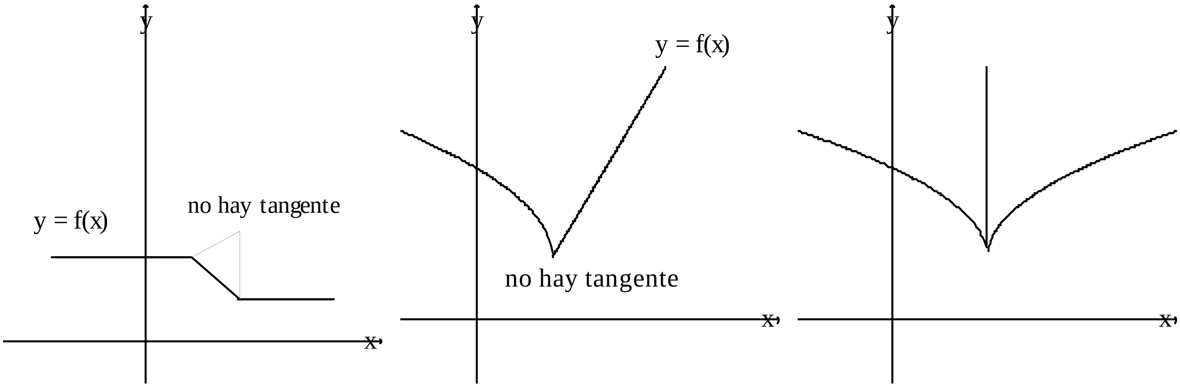
Ejemplo 6.- Puede demostrarse que la gráfica de $y = x^{1/3}$ posee una recta tangente vertical en el origen, aunque no se proseguirá por el momento con los detalles. En la figura se observa que el eje y es tangente a la gráfica en (0, 0)



Ejemplo 7.- (a) y (b) muestran las gráficas de dos funciones que son discontinuas, aunque definidas, en $x = a$. Ninguna de las dos gráficas tiene tangente en $(a, f(a))$. En la Figura (c) se esperaría poder tener una tangente a la gráfica de f en todos los puntos, excepto en $x = a$.



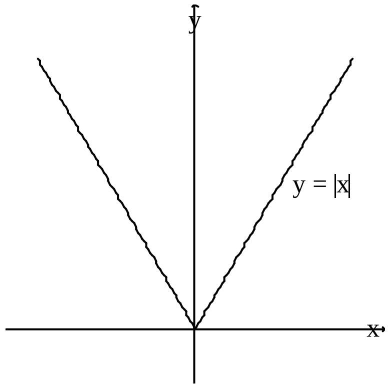
Ejemplo 8.- La figura (a) muestra la gráfica de una función en la que la recta tangente no existe en dos puntos en los que se tienen esquinas. En la figura (b) no existe recta tangente en la punta formada. Sin embargo, en la figura (c) la gráfica tiene una punta en la que existe una tangente vertical.



(a) (b) (c)

Ejemplo 9.- Demostrar que la gráfica de $f(x)= |x|$ no tiene tangente en (0, 0).

Solución.- El examen de la gráfica de f en la Figura revela una esquina o punta en el origen. Para demostrar que la tangente no existe, hay que examinar



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}. \qquad (3,\ 2)$$

Ahora bien, para $\Delta x > 0$,

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

mientras que para $\Delta x < 0$,

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1\,.$$

Como $\lim_{\Delta x\to 0^+}|\Delta x| / \Delta x = 1$ y $\lim_{\Delta x\to 0^-} |\Delta x| / \Delta x = -1$, concluimos que el límite (3, 2) no existe. Así es que la gráfica no posee tangente en (0, 0).

Ejemplo 1.- Encontrar la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución.- Como anteriormente, el procedimiento consta de cuatro pasos:

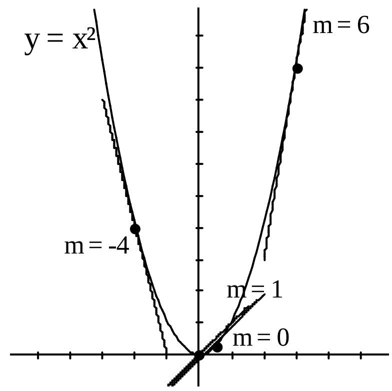
(i) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$

(ii) $\Delta y = f(x + \Delta x) – f(x) = [x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2] – x^2 = \Delta x[2x + \Delta x]$

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x\left[2x+\Delta x\right]}{\Delta x}=2x+\Delta x$

(iv) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[2x+\Delta x\right]=2x\,.$

Ejemplo 2.- Para $f(x) = x^2$, encontrar $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(!)$ y $f'(3)$. Interpretar.



Solución.- Del ejemplo 1, se sabe que $f'(x) = 2x$. Por tanto, $f'(-2) = -4$, $f'(0) = 1$ y $f'(3) = 6$. Como puede observase en la figura, estos valores representan las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^2$ en (-2, 4), (0, 0), (!, #) y (3, 9), respectivamente.

Ejemplo 3.- Encontrar la derivada de $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

Solución.- En este caso el lector debe poder demostrar que:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x[-2x - \Delta x + 4].$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left[-2x - \Delta x + 4\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[-2x - \Delta x + 4\right] = -2x + 4.$$

Ejemplo 4.- Encontrar la derivada de $f(x) = -x^3$.

Solución.- Para determinar $f(x + \Delta x)$, se usa el teorema del binomio.

(i) $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\ \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

(ii) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x^3 + 3x^2\ \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] - x^3$

$= \Delta x[3x^2 + 3x\ \Delta x + (4x)^2]$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left[3x^2 + 3x\,\Delta x + \left(\Delta x\right)^2\right]}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + \left(\Delta x\right)^2$$

(iv) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[3x^2\ \Delta x + \left(\Delta x\right)^2\right] = 3x^2.$$

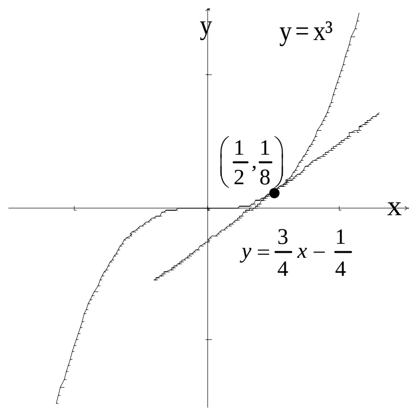
Ejemplo 5.- Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x =$!.

Solución.- Puesto que hemos visto que $f(x) = 3x^2$, se deduce que la pendiente de la tangente en $x =$! es

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

La ordenada del punto de tangencia es $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. Así que la recta tangente en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$ está dada por

$$y-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right) o\, bien\;\; y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}.$$



La gráfica de la función y la recta tangente se presenta en la figura.

Ejemplo 7

(a) La función $f(x) = 1/(2x\text{-}1)$ es discontinua en 1/2. Por lo tanto, f no es diferenciable en este valor.
(b) La gráfica de $f(x) = |x|$ posee una punta o esquina en el origen. Se vio que $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y / \Delta x$ no existe en 0, así que f no es diferenciable ahí.
(c) Ya se vio que la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$ posee una tangente vertical en el origen. Por lo cual, la función f no es diferenciable en 0.

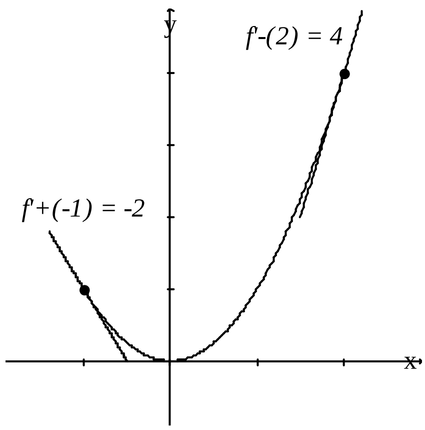
Ejemplo 8.- La función

$$f(x) = x^2, \quad -1 \le x \le 2$$

es diferenciable en [-1, 2] puesto que $f(x) = 2x$ para todo número x en (-1, 2) y

$$f'_-(2) = 4 \quad \text{y} \quad f'_+(-1) = -2.$$

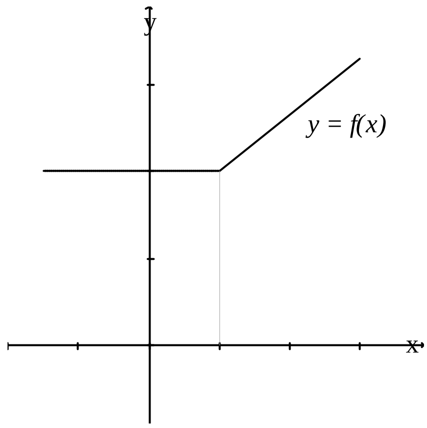
Véase la figura.



Ejemplo 11.- Demostrar que

$$f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ x+1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

no es diferenciable en x = 1.



Solución.- La figura muestra que la gráfica de *f* tiene una esquina en (1, 2). Ahora bien,

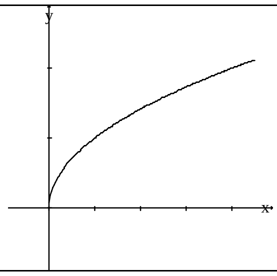
$$f'_{+}(1)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{[(1+\Delta x)+1]-2}{\Delta x}=1,$$

mientras que

$$f'_{-}(1)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2-2}{\Delta x}=0.$$

Como $f'_{+}(1) \neq f'_{-}(1)$, *f* no es diferenciable en 1. Consecuentemente, *f* no es diferenciable en los intervalos que contengan a 1.

Ejemplo 12.- Demostrar que *f(x)* = $\sqrt{x}$ es diferenciable en (0, ∞). La gráfica de *f* en la figura, ¿proporciona alguna idea de por qué $f'_{+}(0)$ no existe?



Ejemplo 1.- Diferenciar y = $x^{6.}$

Solución.- Por la regla de la potencia (3.11) que

$$\frac{dy}{dx}=6x^{6-1}=6x^5$$

Ejemplo 2.- Diferenciar *y* = *x*

Solución.- Identificando *n* = 1, se tiene por (3.11) que

$$\frac{dy}{dx}=x^{1-1}=1x^0=1.$$

Ejemplo 3.- Se tiene por (3.12)

a) $\frac{d}{dx}5=0,$ y b) $\frac{d}{dx}\pi^3=0.$

Ejemplo 4.- Diferenciar *y* = $5x^{3.}$

Solución.- Por (3.11) y (3.13),

$$\frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{d}{dx} x^3 = 5\left(3x^2\right) = 15x^2.$$

Ejemplo 5.- Diferenciar $y = x^5 + x^2$.

Solución.- Por (3.11) y (3.14) se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^5 + \frac{d}{dx} x^2 = 5x^4 + 2x$$

Ejemplo 6.- Diferenciar y = $9x^7 - 3x^4$.
Solución.- En vista de (3.11), (3.13) y (3.14), puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = 9\frac{d}{dx} x^7 = -3\frac{d}{dx} x^4 = 63x^6 - 12x^3.$$

Ejemplo 7.- Diferenciar $y = 4x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 13x + 6.$

Solución.-

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{d}{dx} x^5 - \frac{1}{2}\frac{d}{dx} x^4 + 9\frac{d}{dx} x^3 + 10\frac{d}{dx} x^2 - 13\frac{d}{dx} x + \frac{d}{dx} 6.$$

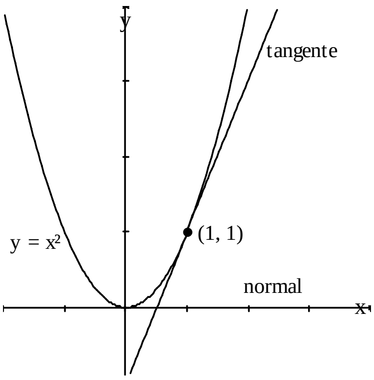
Ejemplo 8.- Encontrar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 7x$ en $x = -1$.

Solución.- La ordenada del punto que corresponde a $x = -1$ es $f(-1) = 8$. Ahora bien,

$$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7$$

así que $f'(-1) = -13$.
La forma punto-pendiente proporciona una ecuación de la recta tangente en (-1, 8):

$$y - 8 = -13(x + 1) \text{ o bien } y = -13x - 5.$$



Ejemplo 9.- Encontrar una ecuación de la recta normal a la gráfica de $x = x^2$ en $x = 1$.

Solución.- Como $dy/dx = 2x$, se sabe que $m_{tan} = 2$ en (1, 1). Así que la pendiente de la recta normal mostrada en la figura es m = -! . Su ecuación es

$$y - 1 = \frac{1}{2}\left(x - 1\right)$$

o bien

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Observación
En los diferentes contextos de la ciencia, la ingeniería y la administración, las funciones se expresan a menudo en términos de variables distintas de x y de *y*. Correspondientemente, debe adaptarse la notación de la derivada a nuevos símbolos; por ejemplo,

$$v(t)=32t, \qquad v'(t)=\frac{dv}{dt}=32$$

Zill 2.

Ejemplo 1

Diferenciar (o derivar) $y = (x^3 - 2x^2 + 4)(8x^2 + 5x)$.
SOLUCIÓN Por la regla del producto (3.15),

primera | derivada de la segunda | segunda | derivada de la primera

$$\frac{dy}{dx}=\left(x^3-2x^2+4\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(8x^2+5x\right)+\left(8x^2+5x\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^3-2x^2+4\right)$$
$$=\left(x^3-2x^2+4\right)\left(16x+5\right)+\left(8x^2+5x\right)\left(3x^2-4x\right).$$

Ejemplo 2

Diferenciar $y = (4x + 1)(2x^2 - x)(x^3 + 8x)$.
SOLUCIÓN Se identifican los dos primeros factores como "la primera función"

$$\frac{dy}{dx}=(4x+1)\left(2x^2-x\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-8x\right)+\left(x^3-8x\right)\frac{d}{dx}(4x+1)\left(2x^2-x\right)$$

Para encontrar la derivada de la primera función, debe aplicarse la regla del producto por segunda ocasión. Así que,

$$\frac{dy}{dx}=(4x+1)\left(2x^2-x\right)\cdot\left(3x^2-8\right)+\left(x^3-8x\right).$$
$$\left[(4x+1)(4x-1)+\left(2x^2+x\right)\cdot 4\right]$$
$$=(4x+1)\left(2x^2-x\right)\left(3x^2-8\right)+\left(16x^2-1\right)\left(x^3-8x\right)+4\left(2x^2+x\right)\left(x^3-8x\right)$$

Ejemplo 3

Diferenciar o derivar $y=\dfrac{3x^2-1}{2x^3+5x^2+7}$

SOLUCIÓN Por la regla del cociente (3.17)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(2x^3+5x^2+7\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2-1\right)-\left(3x^2-1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(2x^3+5x^2+7\right)}{\left(2x^3+5x^2+7\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2x^3+5x^2+7\right)\cdot 6x-\left(3x^2-1\right)\cdot\left(6x^2+10x\right)}{\left(2x^3+5x^2+7\right)^2}$$

$$=\frac{-6x^4+6x^2+52x}{\left(2x^3+5x^2+7\right)^2}$$

Ejemplo 4

Obtener una ecuación de la recta tangente a la gráfica de

$$f(x)=\frac{6x^3}{x^3+1} \quad \text{en } x=1$$

SOLUCIÓN Se utiliza la regla del cociente para encontrar la derivada,

$$f'(x)=\frac{\left(x^3+1\right)\cdot\frac{d}{dx}6x^3-6x\ \cdot\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^3+1\right)\cdot 18x^2-6x\ \cdot\left(3x^2\right)}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{18x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$$

Cuando x = 1, la pendiente de la recta tangente es

$$f'(1)=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}.$$

El punto de tangencia es (1, f(1)) o bien (1, 3). Por lo tanto, una ecuación de la recta tangente es

$$y-3=\frac{9}{2}(x-1) \quad \text{o bien} \quad y=\frac{9}{2}x-\frac{3}{2}.$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = \frac{\left(x^2+1\right)\left(2x^2+1\right)}{\left(3x^2+1\right)}$

SOLUCIÓN Se comienza con la regla del cociente y luego utilizamos la regla del producto al diferencial el numerador:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(3x^2+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)\left(2x^2+1\right)\right] - \left(x^2+1\right)\left(2x^2+1\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2+1\right)}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(3x^2+1\right)\left[\left(x^2+1\right)4x + \left(2x^2+1\right)2x\right] - \left(x^2+1\right)\left(2x^2+1\right)6x}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{12x^5+8x^3}{\left(3x^2+1\right)^2}$$

Ejemplo 6

Diferenciar $y = x^{-2}$.

SOLUCION Como se muestra en (3.18), el procedimiento para diferenciar o derivar una potencia con exponente entero negativo es el mismo de antes: se coloca el exponente como factor y se reduce en 1 el valor del exponente. Se tiene pues, que

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}\,.$$

Ejemplo 7

Diferenciar $y = 5x^3 - 1/x^4$.

SOLUCIÓN Primero se escribe la función dada como

$$y = 5x^3 - x^{-4}.$$

De este modo

$$\frac{dy}{dx} = 5\cdot 3x^2 - (-4)\,x^{-5} = 15x^2 + \frac{4}{x^5}\,.$$

Ejemplo 1

Diferenciar $y = (4x)^{100}$..

SOLUCIÓN. Primero se ilustra un *error común*:

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{99}$$

El resultado es incorrecto porque no se multiplicó la expresión por la derivada de la función que está entre paréntesis. El procedimiento correcto es:

$$\frac{dy}{dx} = 100(4x)^{99} \cdot \frac{d}{dx}4x = 100(4x)^{99} \cdot 4 = 400(4x)^{99}.$$

Ejemplo 2

Diferenciar $y = (2x^3 + 4x + 1)^4$..

SOLUCIÓN. Se identifica $g(x) = 2x^3 + 4x + 1$ y $n = 4$. De (3.41) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4\left(2x^3 + 4x + 1\right)^3 \frac{d}{dx}\left(2x^3 + 4x + 1\right) \\ &= 4\left(2x^3 + 4x + 1\right)^3 \left(6x^2 + 4\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Diferenciar $y = \dfrac{\left(x^2-1\right)^3}{\left(5x+1\right)^8}$.

SOLUCIÓN. Primero se aplica la regla del cociente.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(5x+1\right)^8 \frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)^3 - \left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}\left(5x+1\right)^8}{\left(5x+1\right)^{16}}$$

y luego la regla de la potencia para funciones,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\left(5x+1\right)^8 \cdot 3\left(x^2-1\right)^2 \cdot 2x - \left(x^2-1\right)^3 \cdot 8\left(5x+1\right)^7 \cdot 5}{\left(5x+1\right)^{16}} \\ &= \frac{6x\left(5x+1\right)^8\left(x^2-1\right)^2 - 40\left(5x+1\right)^7\left(x^2-1\right)^3}{\left(5x+1\right)^{16}} \\ &= \frac{\left(x^2-1\right)^2\left(-10x^2+6x+40\right)}{\left(5x+1\right)^{16}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = \dfrac{1}{\left(7x^5-x^4+2\right)^{10}}$

SOLUCIÓN. Se escribe la función dada como

$$y = (7x^5 - x^4 + 2)^{-10}.$$

Se identifica n = -10 y se usa la regla de la potencia (3.41):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -10\left(7x^5-x^4+2\right)^{-11}\frac{d}{dx}\left(7x^5-x^4+2\right). \\ &= -\frac{-10\left(35x^4-4x^3\right)}{\left(7x^5-x^4+2\right)^{11}}.\end{aligned}$$

Zill 3

Ejemplo 3

Obtener la segunda derivada de $y = (x^3 + 1)^4$.

SOLUCIÓN. Se encuentra la primera derivada mediante la regla de la potencia para funciones:

$$\frac{dy}{dx}=4\left(x^3+1\right)^3\frac{d}{dx}x^3=12x^2\left(x^3+1\right)^3.$$

Para encontrar la segunda derivada, se usará las reglas del producto y de la potencia:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=12x^2\frac{d}{dx}\left(x^3+1\right)^3+\left(x^3+1\right)^3\frac{d}{dx}12x^2\\&=108x^4\left(x^3+1\right)^2+24x\left(x^3+1\right)^3\\&=\left(x^3+1\right)^2\left(132x^4+24x\right).\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Obtener las primeras cinco derivadas de

$$f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 5x - 10.$$

SOLUCIÓN. Se tiene que

$$\begin{aligned}f'(x) &= 8x^3 - 18x^2 + 14x + 5\\ f''(x) &= 24x^2 - 36x^2 + 14x\\ f'''(x) &= 4\ 8x^3 - 36\\ f^{(4)}(x) &= 4\ 8\\ f^{(5)}(x) &= 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Obtener la tercera derivada de $y=\dfrac{1}{x^3}$

SOLUCIÓN. Escribiendo $y = x^{-3}$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx}=-3x^{-4}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-3)(-4)x^{-5}=12x^{-5},$$

y

$$\frac{d^3y}{dx^3}=(12)(-5)x^{-6}=-\frac{60}{x^6}$$

Ejemplo 1

Encuentre dy/dx si $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación y utilizar luego (3.45), se tiene:

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}4$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0\,.$$

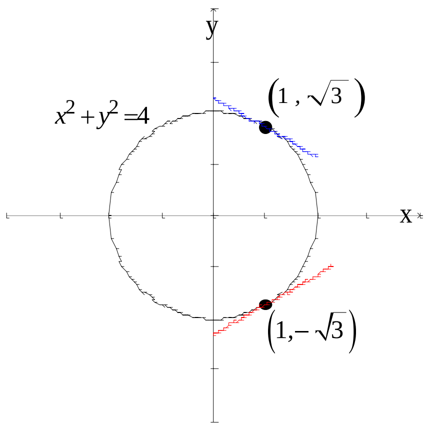
Despejando la derivada, resulta que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad (3.46)$$

Ejemplo 2

Hallar la pendiente de la tangente a la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$ en $x = 1$.

SOLUCIÓN. Puesto que $x = 1$ implica que $y^2 = 3$ o bien $y=\pm\sqrt{3}$, se observa en la figura que hay rectas tangentes en $\left(1,\sqrt{3}\right)$ y $\left(1,-\sqrt{3}\right)$. Usando (3.46) del ejemplo 1, las pendientes de estas rectas tangentes están dadas por



$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(1,-\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 3

Obtener dy/dx si $x^4 + x^2 + y^2 = 2x + 1$

SOLUCIÓN. En este caso se usa (3.45) y la regla del producto

$$\frac{d}{dx}x^4+\frac{d}{dx}x^2y^3-\frac{d}{dx}y^5=\frac{d}{dx}2x+\frac{d}{dx}1$$

$$4x^3+x^2\cdot 3y^2\,\frac{dy}{dx}+2xy^3-5y^4\,\frac{dy}{dx}=2$$

$$\left(3x^2y^2-5y^4\right)\frac{dy}{dx}=2-4x^3-2xy^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2-4x^3-2xy^3}{3x^2y^2-5y^4}$$

Ejemplo 4

Obtener d^2 y/dx^2 si $x^2 + x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN. Por el ejemplo 1, se sabe que la primera derivada es

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

De aquí que, por la regla del cociente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{y\cdot 1-x\cdot\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$=-\frac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}$$

En vista de que $x^2 + y^2 = 4$, puede escribirse la segunda derivada como

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{y^3}.$$

Ejemplo 1

Diferenciar $y = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN. Primero se escribe la función dada como $y = x^{1/2}$ y luego se utiliza (3.51):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo 3

Diferenciar o derivar $y = 1\sqrt{x}$

SOLUCIÓN. Puesto que $y = x^{-1/2}$, de (3.51) resulta que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-3/2} \quad .$$

Ejemplo 4

Diferenciar $y = 9\sqrt[3]{x} + 4\sqrt{x^3}$

SOLUCIÓN. Empleando exponentes racionales, la función dada puede expresarse como $y = 9\text{k}x^{1/3} + 4x^{3/2}$. Así que,

$$\frac{dy}{dx} = 9(1/3)x^{(1/3)-1} + 4(3/2)x^{(3/2)-1}.$$
$$= 3x^{-2/3} + 6x^{1/2}.$$

Ejemplo 5

Diferenciar $y = (4x+1)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Por3.52,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(4x+1)^{(1/3)-1}\frac{d}{dx}(4x+1)\frac{4}{3}(4x+1)^{-2/3}.$$

Ejemplo 6

Diferenciar $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

SOLUCIÓN. Se utiliza (3.52) y en seguida la regla del cociente,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}\frac{1+x}{1-x}.\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}\cdot\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\\&=\frac{1}{(1-x)^2}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-1/2}\end{aligned}$$

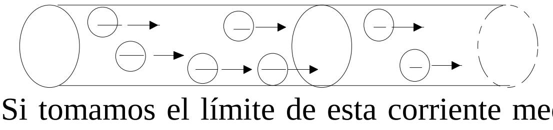
Ejemplo 7

Diferenciar $y=\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}\right)^5$.

SOLUCIÓN La regla de la potencia para funciones (3.52) da lugar a

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=5\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}\right)^4\cdot\frac{d}{dx}\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}\right)\\&=5\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}\right)^4\cdot\left[6x+\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1/2}\cdot 2x\right]\\&=5\left(3x^2+\sqrt{x^2+1}\right)^4\left[6x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]\end{aligned}$$

Ejemplo 3 Siempre que se mueven cargas eléctricas se origina una corriente eléctrica. La Figura muestra una porción de conductor y algunos electrones que se mueven a través de una superficie plana sombreada. Si ΔQ es la carga eléctrica neta que pasa a través de esta superficie durante un período de tiempo Δt, entonces la corriente media durante dicho intervalo de tiempo se define como



$$\text{corriente media} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q_2-Q_1}{t_2-t_1}$$

Si tomamos el límite de esta corriente media sobre intervalos de tiempo cada vez más pequeños, obtenemos lo que se define como la **Corriente *I*** en un instante dado t_1:

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}$$

De esta manera, la corriente es la intensidad a la cual fluye la carga a través de una superficie.

Ejemplo 4 Una reacción química da por resultado la formación de una o más sustancias (llamadas productos) a partir de uno o más materiales iniciales (llamado reactivos). Por ejemplo, la “ecuación”

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una molécula de oxígeno forman dos moléculas de agua. Consideremos la ecuación

$$A + B \rightarrow C$$

en donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles (6.022 x 10^{23} moléculas) por litro y se denota por $[A]$. La concentración varía durante una reacción, de modo que $[A]$, $[B]$ y $[C]$ son funciones del tiempo (t). La velocidad media de reacción del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \le t \le t_2$ es

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero a los químicos les interesa más la **velocidad** (o **rapidez**) **instantánea de reacción**, que se obtiene tomando el límite de la velocidad media de reacción cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero:

$$\text{velocidad de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{d[C]}{dt}$$

Puesto que la concentración del producto aumenta cuando la reacción avanza, la derivada $d[C]/dt$ será positiva. (Intuitivamente podemos ver que la pendiente de la tangente a la gráfica de una función creciente es positiva). Así que, la velocidad de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por consiguiente, para hacer que las velocidades de reacción de A y B sean números positivos se agrega el signo menos a las derivadas $d[A]/dt$ y $d[B]/dt$. Puesto que $[A]$ y $[B]$ disminuyen a la misma velocidad que $[C]$ aumenta, tenemos

$$\text{velocidad de reacción} = \frac{d[C]}{dt} = \frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt}$$

De manera más general, resulta que para una reacción de la forma

$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

tenemos

$$-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} - \frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[C]}{dt} + \frac{1}{d}\frac{d[D]}{dt}$$

La velocidad de reacción se puede determinar por métodos gráficos (Ejercicio 20). En algunos casos se puede utilizar la velocidad de reacción para encontrar fórmulas explícitas de las concentraciones en función del tiempo (Ejercicio 7 de la Sección 6.7 y el Ejercicio 27 de la Sección 8.1).

Ejemplo 5 Una de las características cuantificables que son de interés en la termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a temperatura constante, entonces su volumen ***V*** depende de su presión *P*. Se puede considerar la razón de cambio del volumen con respecto a la presión es decir, la derivada *dV/dP*. cuando *P* aumenta, *V* disminuye, así que *dV/dP* < 0. La compresibilidad se define introduciendo un signo menos y dividiendo esta derivada entre el volumen *V*:

$$\text{Compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

De esta manera, β mide con qué rapidez, por unidad de volumen, disminuye el volumen de una sustancia cuando la presión sobre ella aumenta a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que el volumen *V* (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25° C estaba relacionado con la presión *P* (en kilopascals) por la ecuación

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio *V* con respecto a *P* cuando *P* = 50 kPa es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{p=50} = -\left.\frac{5.3}{p^2}\right|_{p=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212\, m^3 / kPa$$

La compresibilidad a esta temperatura es

$$\beta = -\left.\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}\right|_{p=50} = \left.\frac{\frac{0.00212}{5.3}}{50}\right| = 0.02\left(m^3 / kPa\right) / m^3$$

Ejemplo 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población animal o vegetal en el tiempo t El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, entonces la tasa media de crecimiento durante el período de tiempo $t_1 \le t \le t_2$ es

$$\text{tasa media de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **tasa de crecimiento instantánea** se obtiene de esta tasa media de crecimiento haciendo que el período de tiempo Δt tienda a cero:

$$\text{Tasa de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

Si queremos ser estrictos, diremos que esto no es muy preciso ya que la gráfica real de una función población $n = f(t)$ sería una función escalonada que es discontinua siempre que ocurra un nacimiento una defunción, y por lo tanto no sería diferenciable. Sin embargo, para una población animal o vegetal grande, se puede reemplazar la gráfica con una curva de aproximación suave, como en la Figura

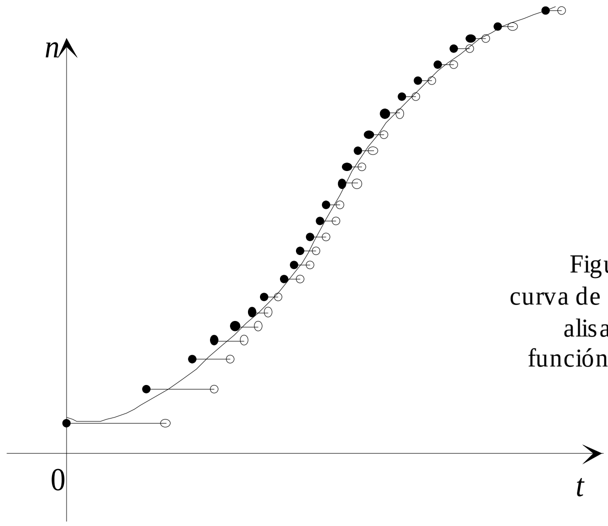


Figura 2.11
curva de aproximación
alisada a una
función crecimiento

Para ser más específicos, consideremos una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Supóngase que mediante la realización de muestreos de la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, entonces

$$f(1) = 2n_0$$
$$f(2) = 2f(1) = 2^2 n_0$$
$$f(3) = 2f(2) = 2^3 n_0$$

y, en general,

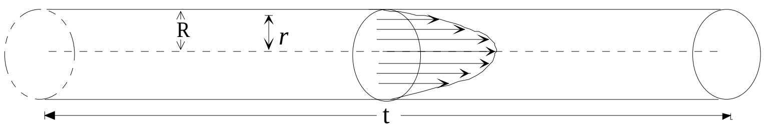
$$f(t) = 2^t n_0$$

La función población es $n = n_0 2^t$

Este es un ejemplo de función exponencial. En el Capítulo 6 estudiaremos las funciones exponenciales en general y calcularemos sus derivadas, con lo cual determinamos la tasa de crecimiento de la población de bacterias.

Ejemplo 7 Cuando se considera el flujo de la sangre a través de un vaso sanguíneo, tal como una vena o arteria, se puede suponer que la forma del vaso sanguíneo es la de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l, como se ilustra en la Figura

Flujo de sangre en
una arteria



Debido a la fricción presente en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es mayor a lo largo del eje central del tubo y disminuye cuando la distancia r con respecto al eje aumenta hasta que v se vuelve cero en la pared. La relación entre v y r está dada por la **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Poiseuille en 1840. Esta ley establece que

$$\nu = \frac{p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$

en donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia de presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, entonces v es una función de r *con dominio*

[O,R]. [Para una información más detallada véase D.A. McDonald, Blood Flow in Arteries (London: Arnold, 1960)].

La razón de cambio media de la velocidad de $r = r_1$ a $r = r_2$ es

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta r}=\frac{\nu(r_2)-\nu(r_1)}{r_2-r_1}$$

y si hacemos $\Delta r\to 0$, se obtiene la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta\nu}{\Delta r}=\frac{d\nu}{dr}$$

Utilizando la Ecuación 2.18, se obtiene

$$\frac{d\nu}{dr}=\frac{P}{4\eta l}(0-2r)=-\frac{Pr}{2\eta l}$$

En una arteria humana normal podemos considerar η = 0.027, R = 0.008 cm , l = 2 cm y P = 4000 din/cm^2 , lo que da lugar a

$$\nu=\frac{4000}{4(0.027)2)}\left(0.000064-r^2\right)$$

$$\approx 1.85x10^4\left(6.4x10^{-5}-r^2\right)$$

En r = 0.002 cm la sangre fluye a la velocidad de

$$\nu(0.002)\approx 1.85\,x10^4\left(64\,x10^{-6}-4\,x10^{-6}\right)$$

$$= 1.11 \text{ cm/s}$$

y el gradiente de velocidad en dicho punto es

$$\left.\frac{d\nu}{dr}\right|_{r=0.002}=-\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2}\approx -74(cm/s)/cm$$

2. Máximos y Mínimos

Ejemplo 1

Encontrar los números críticos de la función f definida por $f(x)$ $x^{4/3}$ + $4x^{1/3}$.

SOLUCION

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{1/3}+\frac{4}{3}x^{-2/3}$$

$$=\frac{4}{3}x^{-2/3}(x+1)$$

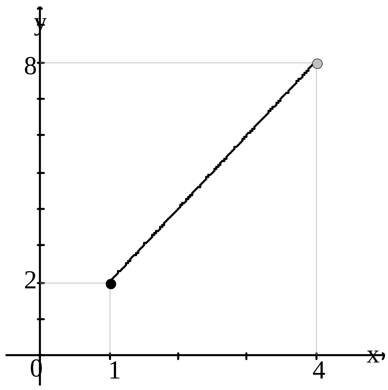
$$=\frac{4(x+1)}{3x^{2/3}}$$

$f'(x)$ = 0 cuando x = -1, y f'(x) no existe cuando x = 0. Tanto –1 como 0 están en el dominio de f; por lo tanto, los números críticos de f son –1 y 0.

Ejemplo 4

Supongamos que f es la función definida por $f(x) = 2x$

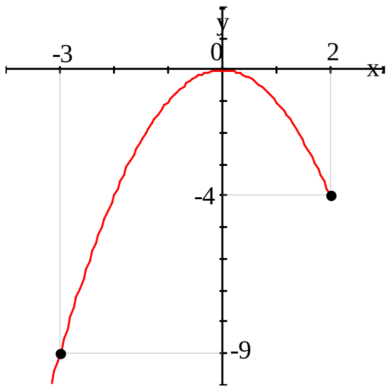
La gráfica de f en [1, 4) se muestra en la Figura. La función f tiene un valor mínimo absoluto de 2 en [1, 4). No existe un valor máximo absoluto de f en [1, 4) ya que $\lim_{x \to 4} f(x) = 8$, pero $f(x)$ es siempre menor que 8 en el intervalo dado.



Ejemplo 5

Consideremos la función f definida por $f(x) = -x^2$

La gráfica de f en (-3, 2] se muestra en la Figura, donde la función f tiene un valor máximo absoluto de 0 en (-3, 2]. No existe valor mínimo absoluto de f en (-3, 2] ya que $\lim_{x \to -3} f(x) = -9$, pero $f(x)$ es siempre menor que -9 en el intervalo dado.

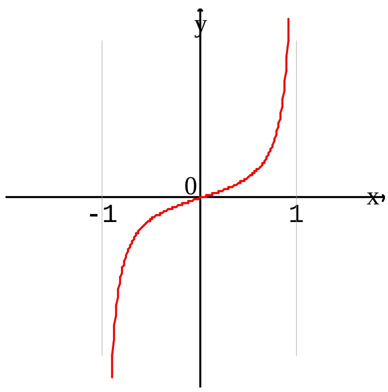


Ejemplo 6

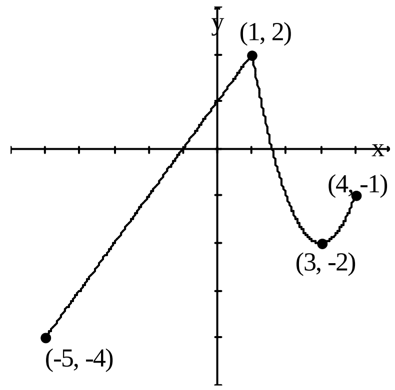
La función f definida por $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto en (-1, 1). En la Figura se muestra la gráfica de f en (-1, 1). Observemos que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$



Ejemplo 7

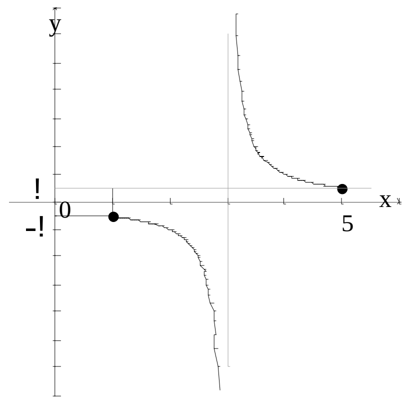


Sea *f* la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x<1 \\ x^2-6x+7 & si\ 1\le x \end{cases}$$

La gráfica de *f* en [-5, 4] se tiene en la Figura. El valor máximo absoluto de *f* en [-5, 4] se encuentra en 1, y *f*(1) = 2; el valor mínimo absoluto de *f* en [-5, 4] se encuentra en –5 y *f*(-5) = -4. Notemos que *f* tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. Notemos también que 1 es un número crítico de *f*, ya que *f'* no existe en 1 y que 3 es un número crítico de *f*, ya que *f'*(3) = 0.

Ejemplo 8



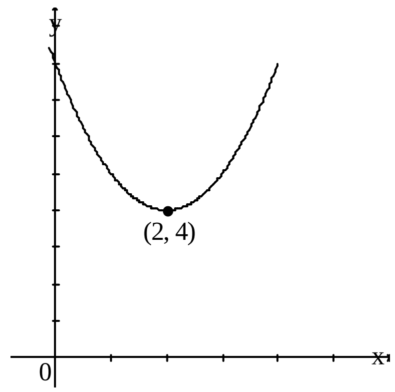
La función *f* definida por

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto en [1, 5]. Véase en la Figura la gráfica de *f*; $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, así *f*(*x*) puede hacerse menor que cualquier número negativo al tomar 3 – x > 0 y menor que una δ positiva adecuada.

También $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$; así, *f*(*x*) puede hacerse mayor que cualquier número positivo al tomar *x* – 3 > 0 y menor que una δ positiva adecuada

Ejemplo 9

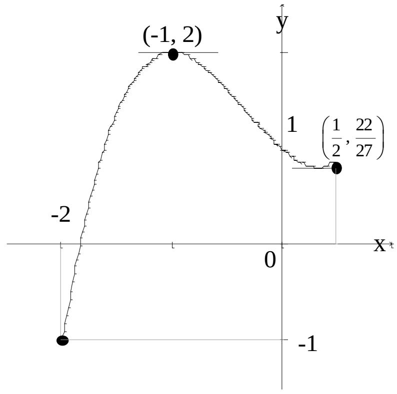


La gráfica de la función *f* definida por
f(*x*) = x^2 – 4*x* + 8.

Es una parábola y ésta se encuentra en la Figura. El vértice de la parábola se halla en el punto (2, 4) y la parábola se abre hacia arriba. La función tiene un valor mínimo absoluto de 4 en 2. No existe valor máximo absoluto de *f*.

Ejemplo 3

Dada $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, encontrar los extremos absolutos de f en [-2, ½].



x	-2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$f(x)$	-1	2	$\frac{22}{27}$	$\frac{7}{8}$

SOLUCION Como f es continua en [-2, ½], el teorema del valor extremo se puede aplicar. Para encontrar los números críticos de f, primero determinamos f':

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f'(x)$ existe para todos los números reales, y así los únicos números críticos de f serán los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$. Haciendo $f'(x) = 0$, tenemos

$(3x - 1)(x + 1) = 0$

Entonces

$x = ½$ y $x = -1$

Los números críticos de f son –1 y $^1/_3$, y cada uno de estos números se encuentra en el intervalo cerrado [-2, ½]. En la tabla 1 tenemos los valores de la función en los números críticos y en los extremos del intervalo.

El valor máximo absoluto de f en [-2, ½] es, por lo tanto 2, el cual ocurre en –1, y el valor mínimo absoluto de f en[-2, ½] es –1, el cual ocurre en el extremo izquierdo –2. El dibujo de la gráfica de esta función en [-2, ½] se muestra en la Figura.

Ejemplo 4

Dada $f(x) = (x - 2)^{2/3}$, hallar los extremos absolutos de f en [1, 5].

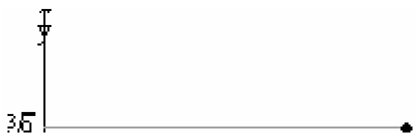
SOLUCION Ya que f es continua en [1, 5], se puede aplicar el teorema del valor extremo.

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

No existe valor alguno de x para el cual $f'(x) = 0$. Sin embargo, como $f'(x)$ no existe en 2, concluimos que 2 es un número crítico de f; así los extremos absolutos ocurren ya sean en 2 o en uno de los extremos del intervalo. En la Tabla 2 se dan los valores de la función en estos números.

De la tabla concluimos que el valor mínimo absoluto de f en [1, 5] es 0 y ocurre en 2; el valor máximo absoluto de f en [1, 5] es $\sqrt{9}$, y ocurre en 5. La gráfica de esta función en [1, 5] se muestra en la Figura.

x	1	2	5
$f(x)$’	1	0	$\sqrt[3]{9}$

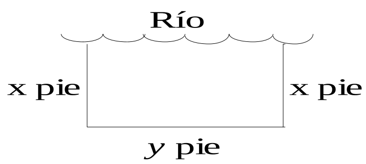


M y M leithold

Ejemplo 2

Un campo rectangular va a ser cercado a lo largo de la orilla de un río; no se requiere cerca alguna del lado de la corriente. Si el material de la cerca cuesta \$8 por pie lineal para los dos extremos y \$12 por pie lineal para el lado paralelo al río, determinar las dimensiones del campo de mayor área posible que puede ser cercado con un costo de \$3 600 para la cerca.

SOLUCION Sea *x* la longitud de pies de un extremo del campo; y la longitud en pies del lado paralelo al río y *A*, el área en pies cuadrados del campo. Véase la Figura.



En consecuencia,
$A = xy$ (2)
Puesto que el costo del material para cada extremo es de $8 por pie lineal y la longitud de un extremo es de 8x dólares. Análogamente, el costo total de la cerca para el tercer lado es de 12*y* dólares. Entonces,
$8x + 8x + 12y = 3\,600$ (3)

Para expresar *A* en términos de una sola variable, resolvemos la ecuación (3) para *y* en términos de *x* y sustituimos este valor en (2), quedando *A* como una función de *x*, y

$$A(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right) \qquad (4)$$

A partir de (3), si $y = 0$, $x = 225$; y si $x = 0$, $y = 300$. Como ambas *x* y *y* deben ser no negativas, el valor de *x* que hará de *A* un máximo absoluto está en el intervalo cerrado [0, 225]. Ya que *A* es continua en el intervalo cerrado [0, 225], concluimos del teorema del valor extremo que *A* tiene un valor máximo absoluto en este intervalo. De la ecuación (4), tenemos

$$A(x) = 300x - \frac{4}{3}x^2$$

Por tanto,

$$A'(x) = 300x - \frac{8}{3}x$$

Como $A'(x)$ existe para toda *x*, los números críticos de *A* se encontrarán haciendo $A'(x)=0$, lo cual da
$x = 112½$.

El único número crítico de *A* es 112½, el cual se halla en el intervalo cerrado [0, 225]. Por lo tanto, el valor máximo absoluto de *A* debe ocurrir en 0, 112½, o 225. Como $A(0) = 0$ y $A(225)=0$, mientras que $A(112½)=16875$, concluimos que el valor máximo absoluto de *A* en
[0,225] es 16875 y ocurre cuando $x = 112½$ y $y = 150$ (obtenido de la ecuación (3) al sustituir *x* por 112½).

Por lo tanto, la mayor área posible que puede ser cercada por $3 600 es de 16 875 pies ^{2} y esto se obtiene cuando el lado paralelo al río sea de 150 pies de largo y los extremos cada uno de 112½ pies de largo.

Ejemplo 4

Encontrar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que pueda ser inscrito en un cono circular recto con un radio de 5 cm y una altura de 12 cm.

SOLUCION Sea *r* el radio del cilindro en centímetros; ***h*** la altura del cilindro en centímetros; *V* el volumen del cilindro en centímetros cúbicos.

La Figura 5 ilustra el cilindro inscrito en el cono y la Figura 6 ilustra una sección plana que pasa por el eje del cono.

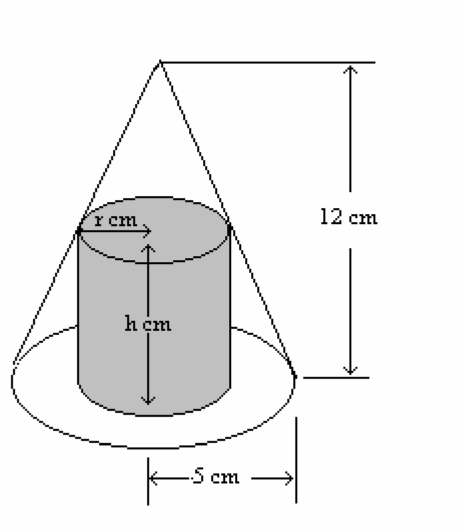


Figura 5

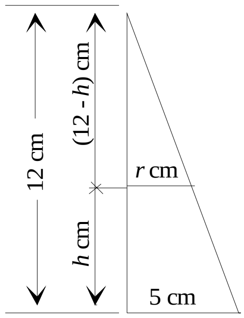


Figura 6

Si r = 0 y h = 12, tenemos un cilindro degenerado, el cual es el eje del cono. Si r =5 y h = 0, también tenemos un cilindro degenerado, el cual es un diámetro de la base del cono. Concluimos que r está en el intervalo cerrado [0, 5] y h está en el intervalo cerrado [0, 12].

La siguiente fórmula expresa V en términos de r y h:

$$V = \pi r^2 h \tag{5}$$

Para expresar V en términos de una sola variable necesitamos otra ecuación que incluya a r y h. De la Figura 6, usando triángulos semejantes tenemos

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60-12r}{5}$$

Sustituyendo de (6) en la fórmula (5), obtenemos *V* como una función de *r* y escribimos
$V(r)=\frac{12}{5}\pi\left(5r^2-r^3\right)$ con *r* en [0, 5]

Como V es continua en el intervalo cerrado [0, 5], del teorema del valor extremo resulta que *V* tiene un valor máximo absoluto en este intervalo. Los valores de *r* y *h* que dan este valor máximo absoluto para *V* son los números que deseamos encontrar
$V'(r)=\frac{12}{5}\pi\left(10r^2-3r^3\right)$
Para encontrar los números críticos de *V*, hacemos *V'*(r) = 0 y despejamos *r*;
$r(10-3r)=0$
de donde obtenemos
$r=0 \quad r=\frac{10}{3}$

Como *V'*(*r*) existe para todos los valores de *r*, los únicos números críticos de *V* son 0 y $\frac{10}{3}$, ambos están en el intervalo cerrado [0, 5]. El valor máximo absoluto de *V* en [0, 5] debe ocurrir en 0, $\frac{10}{3}$, o 5. De la ecuación (7) obtenemos

$$V(0)=0 \qquad V\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{400}{9}\pi \qquad V(5)=0$$

Por lo tanto concluimos que el valor máximo absoluto de *V* es $\frac{400}{9}\pi$, y esto ocurre cuando $r=\frac{10}{3}$. Cuando $r=\frac{10}{3}$, encontramos con la ecuación (6) que *h* = 4.

Así, el volumen máximo de un cilindro inscrito en el cono dado es $\frac{400}{9}\pi\ \text{cm}^3$, lo cual ocurre cuando el radio es $\frac{10}{3}$ cm y la altura es 4 cm.

Ejemplo 1

Dada $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, encontrar los extremos relativos de f aplicando el criterio de la primera derivada. Determinar los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos, así como los intervalos en los cuales f es creciente y los intervalos en los cuales f es decreciente. Trazar la gráfica

SOLUCION $f'x = 3x^2 - 12x + 9$.

$f'(x)$ existe para todos los valores de x. Haciendo $f'(x) = 0$, tenemos

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

lo cual nos da

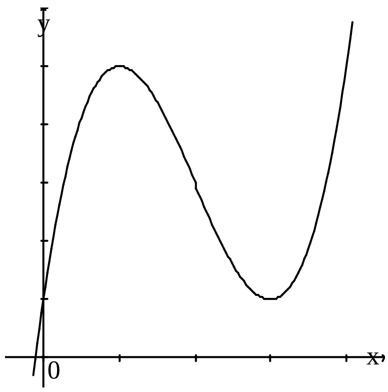
$x = 3$ y $x = 1$

Por tanto, los números críticos de f son 1 y 3. Para determinar si f tiene un extremo relativo en alguno de esos números, aplicamos el criterio de la primera derivada. Los resultados se resumen en la Tabla 1.

TABLA 1

	$f(x)$	$f'(x)$	**Conclusión**
$x < 1$		+	f crece
$x = 1$	5	0	f tiene un máximo relativo
$1 < x < 3$		-	f decrece
$x = 3$	1	0	f tiene un mínimo relativo
$3 < x$		+	f crece

De acuerdo con esta tabla, 5 es un valor máximo relativo de f que se presenta en x=1, y 1 es un valor mínimo relativo de f situado en x = 3. En la Figura se muestra un trazo de la gráfica.



Ejemplo 2

Dada

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x<3 \\ 8\ -\ x & si\ 3\leq x \end{cases}$$

hallar los extremos relativos de *f* aplicando la prueba de la primera derivada. Determinar los valores de *x* en los cuales ocurren los extremos relativos, así como los intervalos en los cuales *f* es creciente y aquéllos en los cuales es decreciente. Trazar la gráfica.

SOLUCION Si $x < 3$, $f'(x) = 2x$. Si $x >$ 3, $f'(x) = -1$. Como $f'_{-}(3) = 6$ y $f'_{+}(3) = -1$, $f'(3)$ no existe. Por lo tanto, 3 es un número crítico de *f*.

Como $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$, tenemos que 0 es un número crítico de *f*. Aplicando el criterio de la primera derivada, resumimos los resultados en la Tabla 2 y la gráfica se muestra en la figura.

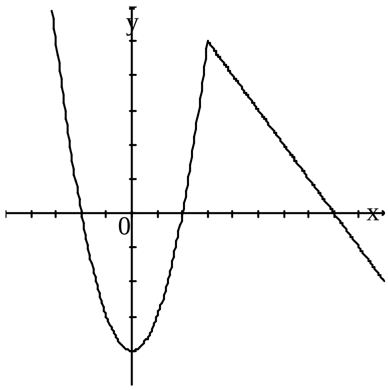


Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	**Conclusión**
$x < 0$		-	*f* decrece
$x = 0$	-4	0	*f* tiene un mínimo relativo
$0 < x < 3$		+	*f* crece
$x = 3$	5	no existe	*f* tiene un máximo relativo
$3 < x$		-	*f* decrece

Ejemplo 3

Dada $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$, obtener los extremos relativos de f, determinar los valores de x en los cuales ocurren los extremos relativos y asimismo determinar los intervalos en los cuales f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.
Trazar la gráfica.

SOLUCION $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ y $f'(x) = x^{1/3} + x^{-2/3} = x^{-2/3}(x + 1)$. Como $f'(x)$ no existe cuando **x** = 0, $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$, los números críticos de f son –1 y 0. aplicamos la prueba de la primera derivada y resumimos los resultados de la Tabla 3. La gráfica se muestra en la Figura

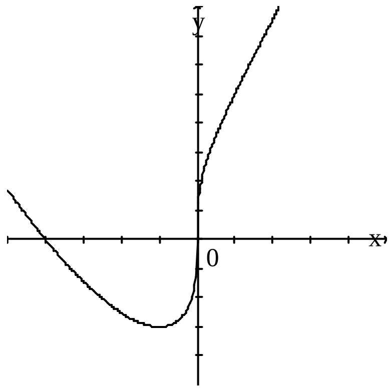


Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	**Conclusión**
$x < -1$		-	f decrece
$x = -1$	-3	0	f tiene un mínimo relativo
$-1 < x < 0$		+	f crece
$x = 0$	0	no existe	f no tiene un extremo en $x = 0$
$0 < x$		+	f crece

Ejemplo 4

Supongamos que se calcula que t horas después de comenzar a trabajar a las 7 A.M. un obrero que labora en el departamento de ensamble ha realizado una tarea determinada de $f(t)$ unidades y
$f(t) = 21t + 9t^2 – t^3 \quad 0t \leq 5$.

En la tabla 1 aparecen algunos valores de la función para valores enteros de t de 1 a 5, y en la Figura 12 se muestra la gráfica f en el intervalo [0, 5]
$f'(t) = 21 + 18t – 3t^2 \quad f''(t) = 18 – 6t$
$= 6(3 – t)$

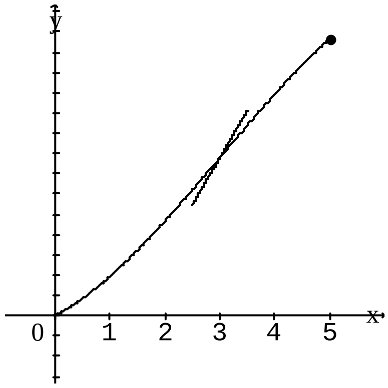


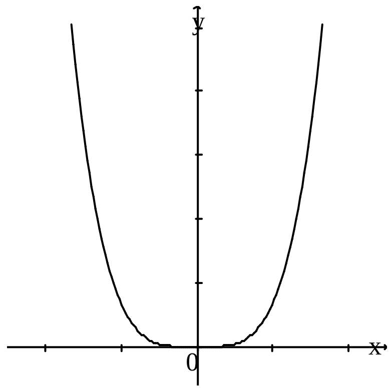
Tabla 1

t	1	2	3	4	5
$f(t)$	29	70	117	164	205

Observemos que $f''(t) > 0$ si $0 < t < 3$ y $f''(t) < 0$ si $3 < t < 5$. De la Definición 4.5.4 (ii) sabemos que la gráfica de f tiene un punto de inflexión en $t = 3$. Del Teorema 4.4.3, como $f''(t) > 0$ cuando $0 < t < 3$, $f'(t)$ es creciente en [0, 3], y como $f''(t) < 0$ cuando $3 < t < 5$, $f'(t)$ es decreciente en [3, 5]. Por lo tanto, como $f'(t)$ es la tasa de variación de $f(t)$ respecto a t, concluimos que en las tres primeras horas (de 7 A.M. a 10 A.M.) el obrero realiza su labor a una razón creciente y en las dos horas restantes (de 10 A.M. a 12 A.M.) la realiza a una tasa decreciente. En $t = 3$(10 A.M.) la producción del obrero es más eficiente y cuando $3< t < 5$ (después de las 10 A.M.) hay una reducción en el nivel de producción del obrero. El punto en el cual su producción es más eficiente recibe el nombre de *punto de rendimiento decreciente;* se trata de un punto de inflexión de la gráfica de f.

Ejemplo 5

Consideramos la función f definida por $f(x) = x^4$. $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2$. La gráfica de f se muestra en la Figura 7. Además, $f''(0)=0$; pero como $f''(x) > 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x < 0$, la gráfica es cóncava hacia arriba en los puntos de la gráfica situados inmediatamente a la izquierda de (0, 0) y en los puntos inmediatamente a la derecha de (0 ,0). Por consiguiente (0, 0) no es un punto de inflexión.



Ejemplo 1

La función del Ejemplo 1 de la Sección 4.4 se define como
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
Determinar el punto de inflexión de la gráfica de f y dónde la gráfica es cóncava hacia arriba, y dónde lo es hacia abajo. Trazar la gráfica correspondiente y mostrar un segmento de la tangente de inflexión.

SOLUCION
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad f''(x) = 6x - 12$

$f''(x)$ existe para todos los valores de x; así el único punto posible de inflexión es aquél donde $f''(x) = 0$, lo cual sucede cuando $x = 2$. Para determinar si existe un punto de inflexión en $x = 2$, debemos verificar si $f''(x)$ cambia de signo; al mismo tiempo determinamos la concavidad de la gráfica para los intervalos correspondientes. los resultados se resumen tn la Tabla 2

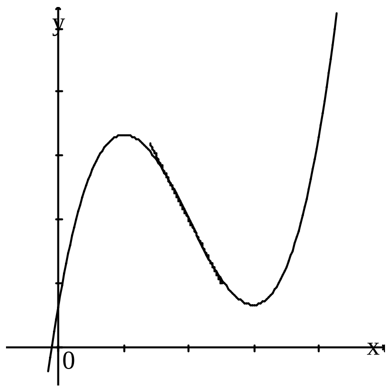


Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$			-	La gráfica es cóncava hacia abajo
$x = 2$	3	-3	0	La gráfica tiene un punto de inflexión
$2 < x$			+	La gráfica es cóncava hacia arriba

En el Ejemplo 1 de la Sección 4.4 mostramos que f tiene un valor máximo relativo en 1 y un valor mínimo relativo en 3. La gráfica que muestra un segmento de la tangente de inflexión se encuentra en la Figura.

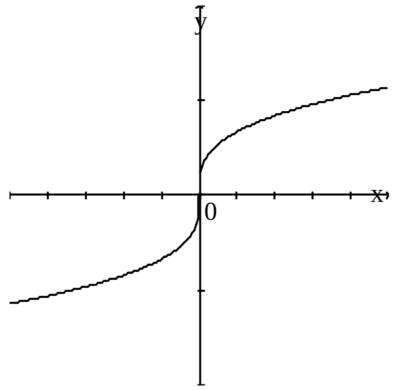
Ejemplo 2

Dada $f(x) = x^{1/3}$, hallar los puntos de inflexión de la gráfica de f y determinar dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Traza la gráfica de f.

SOLUCION

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Ni $f'(0)$ ni $f''(0)$ existen. En el Ejemplo ilustrativo 3 de la Sección 3.2 se mostró que el eje *y* es la recta tangente a la gráfica de esta ecuación en (0, 0). Además,
$f''(x) > 0$ si $x < 0$ y $f''(x) < 0$ si $x > 0$



Por lo tanto, de la Definición 4.5(ii), *f* tiene un punto de inflexión en (0, 0). La concavidad de la gráfica se determina a partir del signo de $f''(x)$. Los resultados se resumen en la Tabla 3.

La gráfica de *f* se presentan en la Figura.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$		+	-	*f* crece; la gráfica es cóncava hacia arriba
$x = 2$	0	no existe	no existe	La gráfica tiene un punto de inflexión
$0 < x$		+	-	*f* crece; la gráfica es cóncava hacia abajo

Ejemplo 3

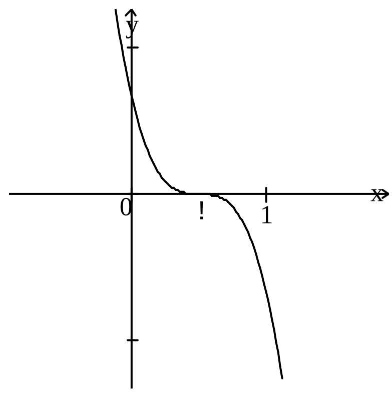
Si $f(x) = (1 - 2x)^3$, obtener los puntos de inflexión de la gráfica de *f* y determinar dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Trazar la gráfica de *f*.

SOLUCION

$f'(x) = -6(1 - 2x)^2$ $\qquad f''(x) = 24(1-2x)$

Tabla 4

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < ½$			+	La gráfica es cóncava hacia arriba
$x = ½$	0	0	0	La gráfica tiene un punto de inflexión
$½ < x$			-	La gráfica es cóncava hacia abajo



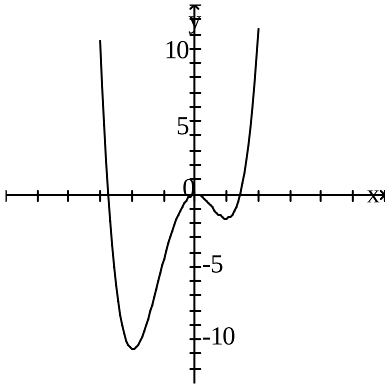
Ya que f'' existe para todos los valores de *x*, el único punto posible de inflexión es aquél donde $f''(x) = 0$, es decir, en $x = ½$. A partir de los resultados resumidos en la Tabla 4, vemos que $f''(x)$ cambia signo de + a – en $x = ½$; así pues, la gráfica tiene un punto de inflexión ahí. Notemos también que debido a que $f'(½) = 0$, la gráfica tiene una recta tangente horizontal en el punto de inflexión. La gráfica se muestra en la Figura.

M y M Leithold 2

Ejemplo 1

Dada $f\left(x\right)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$, obtener los máximos y mínimos relativos de *f* aplicando el criterio de la segunda derivada. Trazar la gráfica de *f*.

SOLUCION Se calculan la primera y segunda derivadas de *f*.



$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \quad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$
Sea $f'(x) = 0$.
$4x(x + 2x)(x - 1) = 0$
$x = 0 \quad x = -2 \quad x = 1$

Así los números críticos de *f* son –2, 0 y 1. Determinamos si existe o no un extremo relativo en cualquiera de estos números críticos obteniendo el signo que la segunda derivada tenga ahí. Los resultados se resumen en la Tabla 1

Tabla 1

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	*f* tiene un valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	-	*f* tiene un valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	*f* tiene un valor mínimo relativo

De la información que aparece en la tabla y trasladando a los ejes coordenados unos cuantos puntos más obtenemos la gráfica de *f* que se muestra en la Figura

Ejemplo 3

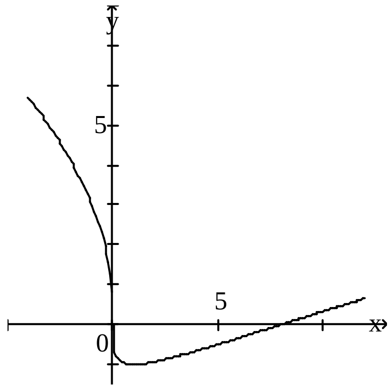
Dada

$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

determinar los extremos relativos de *f* mediante la aplicación del criterio de la segunda derivada cuando sea posible. Utilizar la segunda derivada para obtener cualesquiera puntos de inflexión de la gráfica de *f* y determinar dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Trazar la gráfica correspondiente.

SOLUCION

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{2}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-4/3} + \frac{4}{9}x^{-5/3}$$



Como $f'(0)$ no existe, 0 es un número crítico de *f*. Otros números críticos se obtienen estableciendo que $f'(x) = 0$.

$$\frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{2}{3x^{2/3}} = 0$$

$$2x^{1/3} - 2 = 0$$

$$x^{1/3} = 1$$

$$x = 1$$

De este modo, 1 es también número crítico. Podemos determinar si hay un extremo relativo en 1 aplicando el criterio de la segunda derivada. No podemos utilizar la prueba de la segunda derivada en el número crítico 0, ya que $f''(0)$ no existe. Aplicamos el criterio de la primera derivada en $x = 0$. La tabla 3 muestra los resultados de estas pruebas.

Ya que $f''(0)$ no existe (0, 0) es un posible punto de inflexión. Para determinar otros posibles puntos de inflexión hacemos $f''(x) = 0$.

$$\frac{2}{9x^{4/3}} + -\frac{4}{9x^{5/3}} = 0$$

$$-2x^{1/3} + 4 = 0$$

$$x^{1/3} = 2 \qquad x = 8$$

Para determinar si hay puntos de inflexión donde x es 0 y 8, se verifica si $f''(x)$ cambia de signo; al mismo tiempo aprendemos acerca de la concavidad de la gráfica en los intervalos respectivos. En un punto de inflexión se necesita que la gráfica tenga una recta tangente ahí. En el origen hay una recta tangente vertical ya que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^{1/3} - 2}{3x^{2/3}} \qquad = -\infty$$

La tabla 3 resume los resultados con los cuales se obtiene la gráfica de la Figura 7.

Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*

$x < 0$		-	-	f decrece; la gráfica es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	no existe	no existe	f no tiene un extremo relativo; la gráfica tiene un punto de inflexión.
$x < 0 < 1$		-	+	f decrece; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = 1$	-1	0	+	f tiene un valor mínimo relativo; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$1 < x < 8$		+	+	f crece; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = 8$	0	1/6	0	f crece; la gráfica tiene un punto de inflexión.
$8 < x$		+	-	f crece; la gráfica es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 3

Dada

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$$

Trazar la gráfica de *f* siguiendo las instrucciones del Ejemplo 2. Obtener asimismo las asíntotas horizontales y verticales.

SOLUCION El dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales excepto ± 2. El único punto donde la gráfica corta a un eje es en el origen. Ya que *f* –(-*x*)= *f*(*x*), la gráfica es simétrica con respecto al eje *y*.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2\right)}{\left(x^2-4\right)^2} \qquad f''(x)=\frac{-8\left(x^2-4\right)^2+8x\left[\left(x^2-4\right)(2x)\right]}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$=\frac{-8x}{\left(x^2-4\right)} \qquad =\frac{24x^2+32}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Hagamos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$; $f''(x)$ nunca es cero. Para la Tabla 2 consideramos los puntos en los cuales $x = 0$ y $x = \pm 2$ porque 2 y –2 no están en el dominio de *f*. También para la tabla considérense los intervalos que excluyen estos valores de *x*:

$x < -2 \qquad -2 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$

Como 2 y –2 se excluyen del dominio de *f*, calculamos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty \quad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty \quad \lim_{x\to -2^+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty \quad \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty$$

Por lo tanto, $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales de la gráfica

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$=1 \qquad\qquad =1$$

Por tanto, $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica.

Con los datos de la Tabla 2, las asíntotas como guía y el trazo de algunos puntos, obtenemos la gráfica de *f* que se muestra en la Figura.

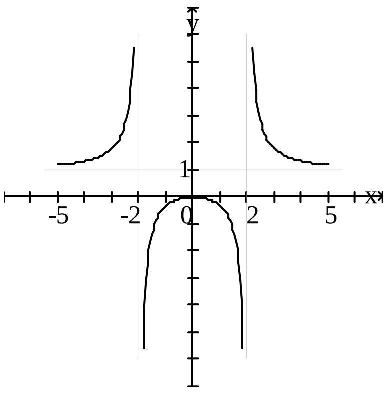


Tabla 2

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -2$		+	+	*f* crece; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = -2$	no existe	no existe	no existe	*f* crece; la gráfica es cóncava hacia abajo
$x = 0$	0	0	-	*f* tiene un máximo relativo
$x = 1$	1	-3	0	*f* decrece; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$0 < x < 2$		-	-	*f* decrece; la gráfica es cóncava hacia abajo.
$x = 2$	no existe	no existe	no existe	
$2 < x$		-	+	*f* decrece; la gráfica es cóncava hacia arriba.

Ejemplo 4

Dada

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)=5\boldsymbol{x}^{2/3}-\boldsymbol{x}^{5/3}$$

Trazar la gráfica de *f* siguiendo las instrucciones del Ejemplo 2.

SOLUCION El dominio de *f* es el conjunto de todos los números reales. La intercepción *y* es 0. Al hacer $f(x) = 0$ obtenemos

$x^{2/3}(5 - x) = 0$
$x = 0 \quad x = 5$

En consecuencia, las intercepciones *x* son 0 y 5.

$$f'\left(x\right)=\frac{10}{3}x^{-1/3}-\frac{5}{3}x^{2/3} \qquad f'\left(x\right)=-\frac{10}{9}x^{-4/3}-\frac{19}{9}x^{-1/3}$$

$$=\frac{5}{3}x^{-1/3}\left(2-x\right) \qquad =-\frac{10}{9}x^{-4/3}\left(1+x\right)$$

Cuando $x = 0$, ni $f'(x)$ ni $f''(x)$ existen. Hagamos $f'(x) = 0$ para obtener $x = 0$. Por lo tanto los números críticos de *f* son 0 y 2. A partir de $f'(x) = 0$, obtenemos $x = -1$. Al elaborar la tabla, considérense los puntos en los cuales *x* es –1, 0 y 2, y los siguientes intervalos:

$x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x$

El dibujo de la gráfica construida a partir de la información de la Tabla 3 y con el trazo de algunos puntos, se muestra en la Figura.

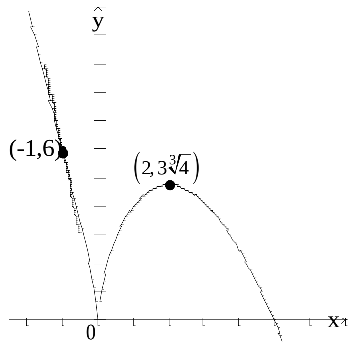


Tabla 3

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < -1$		-	+	f decrece; la gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = -1$	6	-5	0	f decrece; la gráfica tiene un punto de inflexión.
$-1 < x < 0$		-	-	f decrece; la gráfica es cóncava hacia abajo.
$x = 0$	0	no existe	no existe	f tiene un máximo relativo
$0 < x < 2$		+	-	f crece; la gráfica es cóncava hacia abajo.
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4} \approx 4.8$	0	-	f tiene un máximo relativo; la gráfica es cóncava hacia abajo.
$2 < x$		-	-	f decrece; la gráfica es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 2

Dada $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 12x + 3$, hallar los extremos absolutos de f en $(-\infty, +\infty)$, si los hay.

SOLUCION

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 24x - 12$ $\qquad$ $f''(x) = 36x^2 - 48x + 24$

$f'(x)$ existe para todos los valores de x. Hacemos $f'(x) = 0$ y obtenemos

$12(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0$

Ya que la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$ sólo tiene raíces imaginarias, la única solución real es 1. Por lo tanto, $f'(1) = 0$. Para determinar si $f(1)$ es un extremo relativo, aplicamos la prueba de la segunda derivada; los resultados de esta prueba se resumen en la Tabla 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = 1$	-2	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

l función de f es continua en $(-\infty, +\infty)$, y el único extremo relativo de f en $(-\infty, +\infty)$ está en $x = 1$. Por lo tanto, del Teorema 4.8 (ii) concluimos que -2, el valor mínimo relativo de f, es el valor mínimo absoluto de f.

Ejemplo 1.

Encontrar los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

$$f(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$$

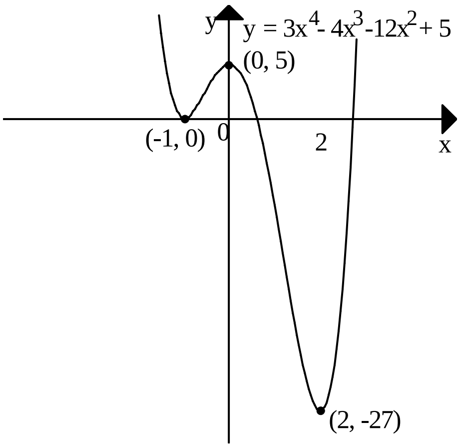


Figura 3.18

Para utilizar el teorema 3.19 se debe saber en donde $f'(x) > 0$ y en donde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los factores de $f'(x)$ -es decir, $12x,\ x-2$ y $x+1.$ Dividimos la recta real en intervalos cuyos extremos sean los números críticos- 1, 0 y 2 y elaboramos una tabla. Un signo más indica que la expresión dada es positiva y un signo menos indica que la expresión dada es negativa. La última columna de la tabla proporciona la conclusión con base en el Teorema 3.19. A partir de esta información y de los valores de *f* en los números críticos, trazamos la gráfica de *f* en la Figura 3.18

Intervalo	*12x*	*x-2*	*x+1*	*f'(x)*	*f*
X < -1	-	-	-	-	decreciente en (-∞, −1]
-1 < x < 2	-	-	+	+	Creciente en [-1, 0]
0 < x < 2	+	-	+	-	Decreciente en (0, 2]
X > 2	+	+	+	+	Creciente en [2, ∞)

Ejemplo 2.

Encontrar los extremos locales de $f(x) = x(1-x)^{2/5}$ y trazar su gráfica.

Solución:

Primeramente se encuentran los números críticos de *f*.

$$f'(x) = (1-x)^{2/5} + x \cdot \frac{2}{5}(1-x)^{-3/5}(-1)$$

$$= \frac{5(1-x) - 2x}{5(1-x)^{3/5}} = \frac{5-7x}{5(1-x)^{3/5}}$$

La derivada $f'(x) = 0$, cuando $5 - 7x = 0$, esto es $x = \frac{5}{7}$. Además, $f'(x)$ no existe cuando $x = 1$, de modo que los números críticos son $\frac{5}{7}$ y 1.

Al igual que se hizo en el Ejemplo 1, a continuación elaboramos una tabla, dividiendo la recta real en intervalos con los números críticos como extremos.

Intervalo	*5-7x*	*(1-x)*$^{3/5}$	*f'(x)*	*f*

$x<\frac{5}{7}$	+	+	+	creciente en $\left(-\infty,\frac{5}{7}\right]$
$\frac{5}{7}<x<1$	-	+	-	decreciente en $\left[\frac{5}{7},1\right]$
$x>1$	-	-	+	creciente en $[1, \infty)$

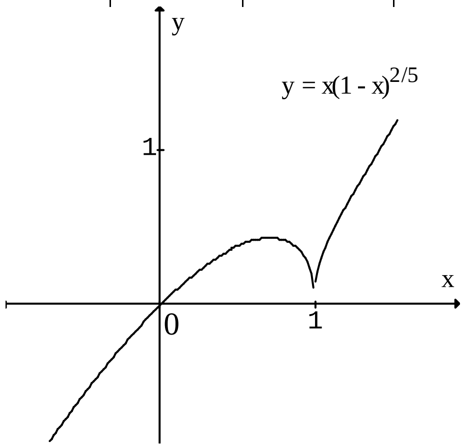


Figura 3.20

De la tabla podemos ver que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $\frac{5}{7}$ y el valor máximo local es

$$f\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^{2/5}$$

Puesto que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en 1, $f(1) = 0$ es un mínimo local. Estos valores máximo y mínimo y la información de la tabla se utilizan para trazar la gráfica de la Figura 3.20. Obsérvese que la curva no es suave en (1, 0), sino que tienen una “esquina” en ese punto (llamado *vértice*). Esto es debido a que $f'(1)$ no existe.

Ejemplo 3.
Encontrar los valores extremos locales y absolutos de la función $f(x)=x^3(x-2)^2$, $-1\le x\le 3$. Trazar su gráfica.

Solución:
Utilizando la Regla del Producto, se tiene

$$f'(x)=3x^2(x-2)^2+x^3\cdot 2(x-2)=x^2(x-2)(5x-6).$$

Para encontrar los números críticos hacemos $f'(x)=0$ y se obtiene $x=0,2,\frac{6}{3}$. Para determinar si dan lugar a valores extremos se elabora la tabla siguiente:

Intervalo	x^2	*x-2*	*5x-6*	*f’(x)*	*f*
$-1 \le x < 0$	+	-	-	+	creciente en [-1, 0]
$0<x<\frac{6}{3}.$	+	-	-	+	creciente en $\left[0,\frac{6}{3}\right]$
$\frac{6}{3}<x\le 3$	+	-	+	-	decreciente en $\left[\frac{6}{3},2\right]$
$2 < x \le 3$	+	+	+	+	creciente en [2, 3]

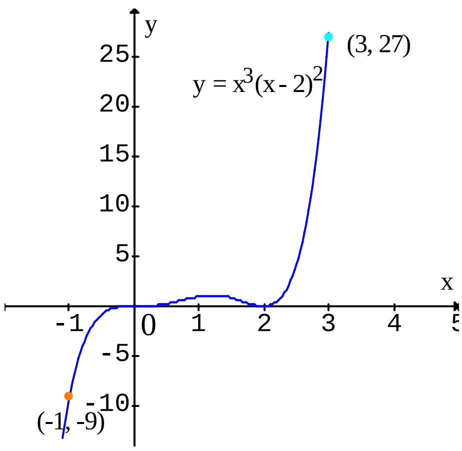


Figura 3.21

Obsérvese que $f'(x)$ no cambia de signo en 0, así que por la parte (c) del criterio de la primera derivada, f no tiene máximo ni mínimo en 0. [El único significado de $f'(0)=0$ es que la tangente es horizontal en ese punto]. Puesto que f' cambia de positiva a negativa en, $f=\frac{6}{5}$, $f\left(\frac{6}{5}\right)=(1.2)^3(-0.8)^2=1.10592$ es un máximo local. puesto que f' cambia de negativa a positiva en 2, $f(2)=0$ es un mínimo local.

Para encontrar los valores extremos absolutos calculamos f en los extremos del intervalo:

$$f(-1)=-9 \qquad f(3)\,27$$

Utilizando el procedimiento descrito en (3.8) se comparan estos valores con los valores de f en $\frac{6}{5}$, y 2 y obtenemos que el valor máximo absoluto es $f(3)=27$ y el valor mínimo absoluto es $f(-1) = -9$. La gráfica de f se muestra en la figura 3.21.

Ejemplo 4.
Probar que la desigualdad $(1+x)^n > 1 + nx$ es verdadera, siempre que $x > 0$ y $n > 1$.

Solución:
Considérese la diferencia

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n-(1+nx) \\ f'(x) &= m(1+x)^{n-1}-n \\ &= n[(1+x)^{n-1}-1] \end{aligned}$$

Puesto que $x > 0$ y $n - 1 > 0$, se tiene $(1 + x)^{n-1} > 1$, así que $f'(x) > 0$. Por lo tanto, f es creciente en $[0, \infty)$. En particular, $f(0) < f(x)$ cuando $0 > x$. Pero $f(0) = 0$, así que

$$0 > (1+x)^n - (1+nx)$$

y por lo tanto

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

cuando $x > 0$.

Ejemplo 1.
Determinar en dónde la curva $y = x^3 - 3x + 1$ es cóncava hacia arriba y en dónde es cóncava hacia abajo. Encontrar los puntos de inflexión y trazar la gráfica de la curva.

Solución:
Si $f(x) = x^3 - 3x + 1$, entonces

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$, cuando $x^2 = 1$, los números críticos son $\pm$ 1. Además

$f'(x) < 0$ ⁄ $x^2 - 1 < 0$ ⁄ $x^2 < 1$ ⁄ $|x| < 1$

$f'(x) > 0$ ⁄ $x^2 > 1$ ⁄ $x>1$ ó $x < -1$

Por lo tanto, *f* es creciente en los intervalos (-∞, -1] y [1, ∞) y es decreciente en [-1, 1]. Por el criterio de la Primera Derivada, $f(-1)=3$ es un valor máximo local y $f(1)=-1$ es un valor mínimo local.

Para determinar la concavidad se calcula la segunda derivada:

$$f''(x) = 6x$$

Así que $f''(x) > 0$, cuando $x > 0$ y $f''(x)<0$ cuando $x<0$ Luego, el criterio de Concavidad dice que la curva es cóncava hacia abajo en (-∞, 0) y cóncava hacia arriba en (0, ∞). Puesto que la curva cambia de concavidad cuando $x = 0$, el (0, 1) es un punto de inflexión. Esta información se utiliza para trazar la gráfica de la curva mostrada en la Figura 3.26

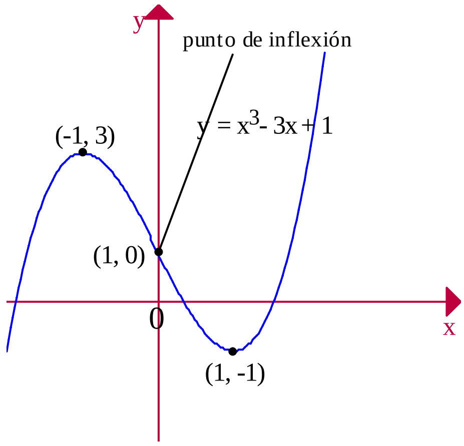


Figura 3.26

Ejemplo 2.
Examinar la curva $y^4 - 4x^3$ con respecto a su concavidad, puntos de inflexión y extremos locales. Utilizar esta información para trazar la gráfica de la curva.

Solución:
Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Para encontrar los números críticos se hace $f'(x) = 0$ y se obtiene $x = 0$ y $x = 3$. Para aplicar el Criterio de la Segunda Derivada se evalúa *f''* en estos momentos críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Puesto que $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3 = -27$ es un mínimo local. Dado que $f''(0) = 0$, el Criterio de la Segunda Derivada no proporciona información con respecto al número crítico 0. Pero puesto que $f(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, el Criterio de la Primera Derivada dice que *f* no tiene extremo local en 0.

Dado que $f''(x) = 0$, cuando $x = 0$ o 2, dividimos la recta real en intervalos con estos números como extremos y completamos la tabla siguiente.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavidad
(-∞, 0)	+	hacia arriba
(0, 2)	-	hacia abajo
(2, ∞)	+	hacia arriba

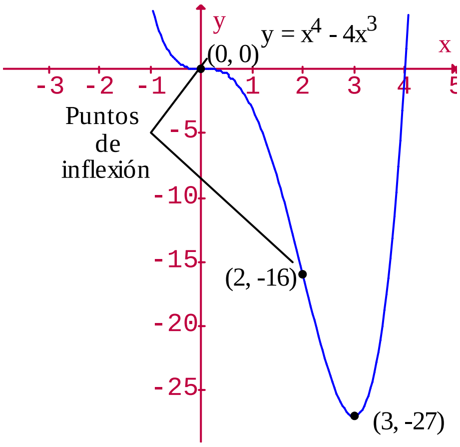


Figura 3.28

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, puesto que la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo en ese punto. También (2, -16) es un punto de inflexión, dado que la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en dicho punto.

Para trazar la gráfica de la curva mostrada en la Figura, utilizando el mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

Ejemplo 3
Trazar la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

Solución:
Calculando las dos primeras derivadas resulta

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x)\frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

Puesto que $f'(x) = 0$, cuando $x = 4$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	x^2	$x-2$	$5x-6$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	-	+	-	decreciente en $(-\infty, 0]$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	creciente en $[0, 4]$
$4 < x < 6$	-	+	+	-	decreciente en $[4, 6]$
$x > 6$	-	+	+	-	decreciente en $[6, \infty)$

Para encontrar los valores extremos locales utilizamos el Criterio de la Primera Derivada. Puesto que f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0)=0$ es un mínimo local. Como f' cambia de positiva a negativa en 4, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no cambia en 6, así que en ese punto no hay valor extremo. (podíamos haber utilizado el Criterio de la Segunda Derivada en 4 pero no en 0 ó 6, ya que f'' no existe en esos puntos).

Examinando la expresión de $f''(x)$ y observando que $x^{4/3} \geq 0$ para todo x, tenemos que $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$ y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. Por consiguiente, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$ y cóncava hacia arriba en $(6, \infty)$ y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. En la Figura se muestra la gráfica. Obsérvese que la curva tiene tangentes verticales en $(0, 0)$ y $(6, 0)$.