Capítulo 7

Razones de cambio relacionadas

[1]

7.1 Razones de cambio relacionadas

Al definir la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_0, se mencionó que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ & $\Delta x = x - x_0 = h$ son los incrementos de las variables y & x, respectivamente.
Refiriéndonos a estos incrementos podemos decir que:

- El incremento $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$, nos muestra el cambio que ha tenido la variable y

- El incremento $\Delta x = x - x_0 = h$, nos muestra el cambio que ha tenido la variable x.

  De esto se desprende que el cociente

  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  es una razón de cambio que nos muestra el cambio que ha tenido la variable y, cuando la variable x ha tenido un cambio Δx.

  Es decir es una razón que compara el cambio de la variable y, con respecto al cambio de la variable x.

  O sea que, es una razón que mide el cambio promedio de la variable y, a lo largo del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$.

- Esto es, es la razón de cambio promedio de la función $y = f(x)$ con respecto a x, a lo largo del intervalo con extremos x_0 & $x_0 + \Delta x$.

[1]canek.azc.uam.mx: 5/ 4/ 2006

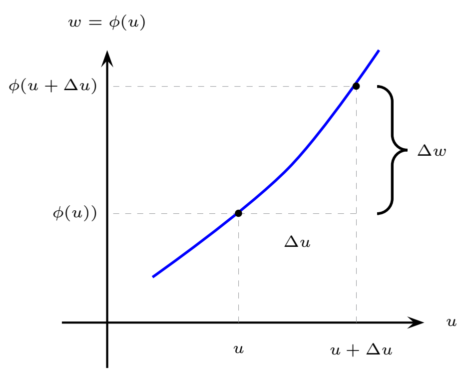
Ahora bien, al escribir $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos estamos refiriendo a la razón de cambio promedio de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en la variable x.
Podemos decir que con este límite se busca una razón de cambio instantánea de la variable y con respecto a la variable x.
Es decir, cuando hacemos que la longitud ($|\,\Delta x\,|$) del intervalo limitado por x_0 & $x_0 + \Delta x$ tienda a cero, "la razón de cambio promedio de y" se convierte en "la razón de cambio instantánea de y", por supuesto, con respecto a x.

Concretando y generalizando.

Si se tiene que la variable w está en función de la variable u, entonces decimos que $w = \phi(u)$.
Si Δu es un incremento en la variable u, entonces:

1. $\Delta w = \phi(u + \Delta u) - \phi(u)$ es el incremento de la variable w.

2. $\dfrac{\Delta w}{\Delta u} = \dfrac{\phi(u + \Delta u) - \phi(u)}{\Delta u}$ es la razón de cambio promedio de la varible w, a lo largo del intervalo limitado por u & $u + \Delta u$.



3. $\phi'(u) = \dfrac{dw}{du} = \displaystyle\lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta u}\right) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\phi(u + \Delta u) - \phi(u)}{\Delta u}$ es la razón de cambio instantánea de la variable w con respecto a la variable u.

   Es decir, la derivada $\dfrac{dw}{du}$ es la razón de cambio instantánea de w con respecto a u.

Comentario adicional.

En el caso particular en que la variable independiente es el tiempo $t \geq 0$, es usual referirse a la derivada como una rapidez (o velocidad) de cambio, en lugar de decir razón de cambio instantánea con respecto a t. Por ejemplo:

- si $x = \phi(t)$ es la posición de un móvil en el instante de tiempo $t \geq 0$, entonces $\dfrac{dx}{dt} = \phi'(t)$ es la rapidez de cambio de la posición $x = \phi(t)$, que es la velocidad instantánea del móvil.

- si $v = g(t)$ es la velocidad de un móvil en el instante de tiempo $t \geq 0$, entonces $\dfrac{dv}{dt} = g'(t)$ es la rapidez de cambio de la velocidad $v = g(t)$, que es la aceleración instantánea del móvil.

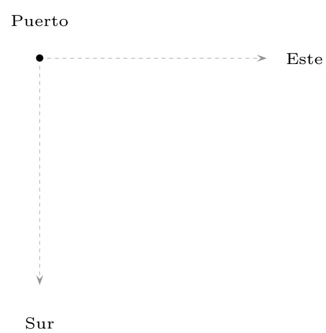
Supongamos que tenemos una función de la que queremos medir su razón de cambio. Si la función se encuentra relacionada con otras de las cuales es más facil calcular la derivada y logramos que todas ellas aparezcan en una misma igualdad podremos entonces igualar la derivada de ambos miembros y de aquí despejar la razón de cambio deseada que aparecerá ahora en términos de las otras. Decimos que tenemos un problema de razones de cambio relacionadas.

En este tipo de problemas es de vital importancia tener muy claro ¿qué es lo que se pide en el problema? así como, ¿qué es lo que se sabe en el problema? Teniendo claro lo que se pide y lo que se sabe, procedemos a matematizar el problema.

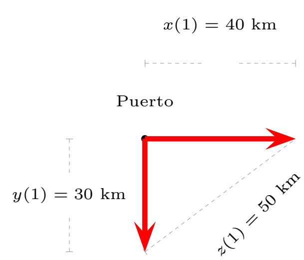
Ejemplo 7.1 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto, uno viaja hacia el Sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el Este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 horas ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que se están separando los barcos después de 2 horas de haber partido del mismo puerto. Es decir, si consideramos que $z(t)$ es la distancia que separa a los barcos en cierto instante t, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la distancia $z(t)$ al paso del tiempo. Esto es se pide calcular a la derivada $\dfrac{dz}{dt}$ cuando el tiempo t transcurrido es de 2 horas.

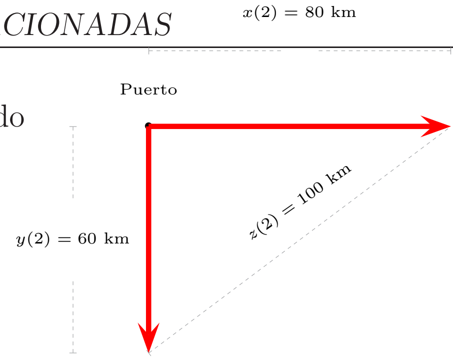
Antes de iniciar su desplazamiento



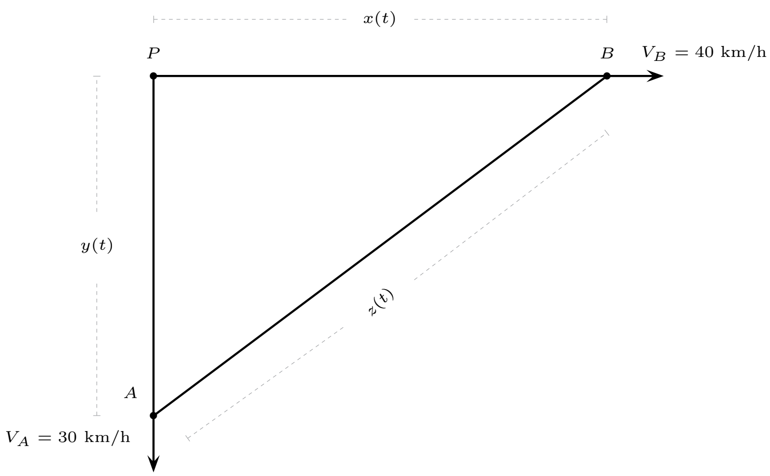
Una hora después de haber iniciado su desplazamiento



Dos horas después de haber iniciado su desplazamiento



Consideramos al puerto P como el origen de nuestro sistema de referencia y a los barcos A y B desplazándose con movimientos uniformemente rectilíneos (cada uno a velocidad constante).



Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el Este entonces

$$x(t) = v_B \cdot t = (40\,km/h)(t\,h) = 40t\,km$$

y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el Sur entonces

$$y(t) = v_A \cdot t = (30\,km/h)(t\,h) = 30t\,km$$

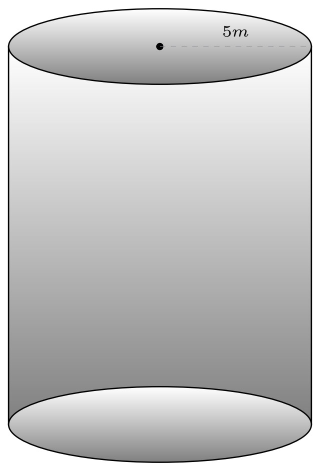
Luego, por el teorema de Pitágoras, la distancia z que separa a los dos barcos cumple con

$$\begin{aligned} & z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = (40t)^2 + (30t)^2 = 1600t^2 + 900t^2 = 2500t^2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow z(t) = \sqrt{2500t^2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow z(t) = 50t\,km \end{aligned}$$

Así pues la distancia $z(t)$ es la función lineal $z(t) = 50t$, por lo que su derivada es $\dfrac{dz}{dt} = 50$, que es una función constante. Esto es, en cualquier instante $t > 0$, los barcos se están separando a una velocidad constante $z'(t) = 50\,km/h$.
En particular, después de 2 horas, $z'(2) = 50\,km/h$.

Ejemplo 7.2 *A un depósito cilíndrico de base circular y 5 m de radio, le está entrando agua a razón de 25 litros por segundo. Calcular la rapidez a la que sube la superficie del agua.*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando la altura de un cilindro circular de radio fijo, cuando su volumen aumenta a razón de 25 litros por segundo ($25\ dm^3/s$). Es decir, si consideramos un cilindro circular que tiene un radio fijo $r = 5\,m$, altura h y volumen V, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la altura h, cuando la razón de cambio del volumen V es de $25\ dm^3/s$. Esto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dh}{dt}$ cuando $r = 50\,dm$ y $\dfrac{dV}{dt} = 25\,dm^3/s$.
El volumen V de un cilindro circular de radio r y altura h es $V = \pi r^2\,h$. Entonces cuando $r = 50\,dm$, el volumen del cilindro es $V = \pi(50)^2\,h = 2500\,\pi\,h\,dm^3$.



Sabiendo que tanto la altura como el volumen son función del tiempo t, derivamos respecto a t y obtenemos

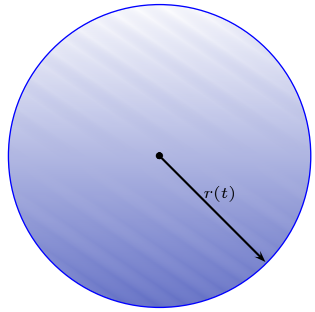
$$\frac{dV}{dt} = 2500\,\pi\left(\frac{dh}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}\left(\frac{dV}{dt}\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2500\pi}\left(25\right) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ dm/s \approx 0.032\ dm/s$$

Por lo tanto, la rapidez con que sube la superficie del agua es

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{100\pi}\ dm/s \approx 0.032\ dm/s$$

Ejemplo 7.3 *Al arrojar una piedra a un estanque de agua tranquila se forman ondas circulares concéntricas cuyos radios aumentan de longitud al paso del tiempo. Cuando la onda exterior tiene un radio de 3 metros, éste aumenta a una rapidez (velocidad) de 50 cm/s. ¿A qué rapidez (velocidad) aumenta el área del círculo formado por dicha onda?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está aumentando el área de un círculo, cuando su radio mide 3 m y la longitud de éste aumenta a razón de 0.5 m/s. Es decir, si consideramos un círculo que (en cierto instante t) tiene un radio $r(t)$ y un área $A(t)$, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) el área $A(t)$, cuando el radio $r(t)$ es de 3 m y la razón de cambio del radio es de 0.5 m/s. Esto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $r = 3$ y $\dfrac{dr}{dt} = 0.5$.



Como el área de círculo es $A = \pi r^2$ y la razón de cambio de A con respecto al tiempo t es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r(t)^2) = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right)$$

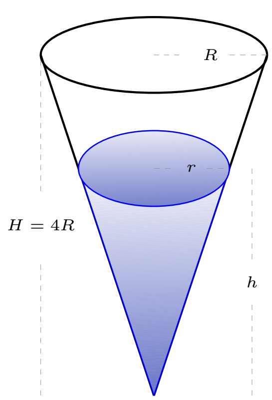
En el caso particular en que $r(t) = 3\,m$ y $\dfrac{dr}{dt} = 0.5\,m/s$ se tiene que

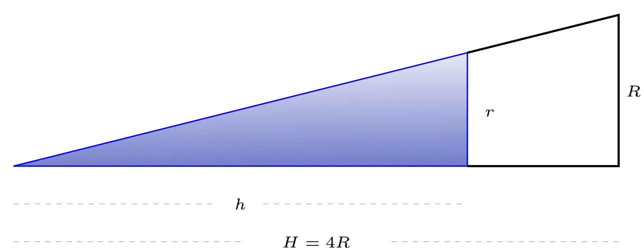
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r(t)\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2\pi(3\,m)(0.5\ m/s) = 3\pi\,m^2/s \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 3\pi\,m^2/s \approx 9.4248\,m^2/s$$

Esto es en el preciso instante (al transcurrir el *segundo*) en que el radio es de 3 m, éste tiene un cambio de 0.5 m y el área tiene un cambio de $3\pi\,m^2/s \approx 9.4248\,m^2/s$.

Ejemplo 7.4 *Un recipiente tiene la forma de un cono circular recto invertido y la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro. Al recipiente le está entrando agua a una rapidez constante por lo que la profundidad del agua va en aumento. Cuando la profundidad es de $1\,m$ la superficie sube a razón de $1\,cm$ por minuto. ¿A qué rapidez le está entrando agua al recipiente?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez a la que está aumentando el volumen del cono limitado por la superficie del agua, cuando la altura del mismo cono es de $1\,m$ y aumenta a razón de $1\,cm/min$. Es decir si consideramos un cono circular recto que tiene un radio r, una altura h y un volumen V entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) el volumen V, cuando la razón de cambio de la altura h es de $1\,cm/min$ y $h = 1\,m$. Esto es se pide calcular a la derivada $\dfrac{dV}{dt}$ cuando $\dfrac{dh}{dt} = 1\,cm/min$ y $h = 100\,cm$.





El volumen V del cono circular de radio r y altura h es

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Cuando *la longitud de su altura es el doble de la de su diámetro*, por triángulos semejantes se cumple que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{4R} \Rightarrow r = \frac{h}{4},$$

y el volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{4}\right)^2 h = \frac{\pi}{48} h^3$$

Considerando que tanto la altura como el volumen son función del tiempo t, derivamos respecto a t y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48} 3h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)$$

En el instante en que $h = 100\, cm = 10\, dm$ y $\dfrac{dh}{dt} = 1\, cm/min = 0.1\, dm/min$ se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{16} h^2 \left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{\pi}{16} (10\, dm)^2 (0.1\, dm/min) = \frac{10\pi}{16}\, dm^3/min = \frac{5\pi}{8}\, dm^3/min$$

Por lo tanto, la rapidez con que entra el agua al recipiente es

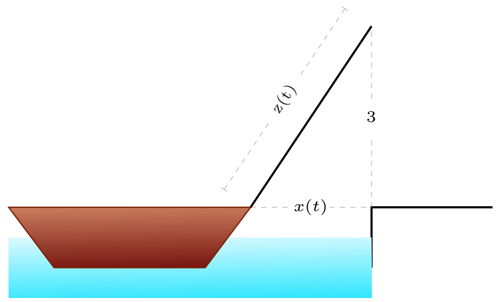
$$\frac{dV}{dt} = \frac{5\pi}{8} \text{ litros/min} \approx 1.963 \text{ l/min}$$

pues 1 l $= 1\, dm^3$.

Ejemplo 7.5 *Un hombre está parado en un muelle y jala una lancha por medio de una cuerda. Sus manos están a 3 m por encima del amarre de la lancha. Cuando la lancha está a 4 m del muelle el hombre está jalando la cuerda a una velocidad de 80 cm/s. ¿A qué velocidad se aproxima la lancha al muelle?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la rapidez (velocidad) a la que está disminuyendo la distancia que hay entre la lancha y el muelle, cuando dicha distancia es de 4 m y la longitud de la cuerda está "disminuyendo" a razón de 0.8 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) la lancha se encuentra a una distancia $x(t)$ del muelle y $z(t)$ es la longitud de la cuerda, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la distancia $x(t)$, cuando el valor de $x(t)$ es de 4 m y la razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda es de $-0.8\, m/s$. Esto es se pide calcular a la derivada $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $x = 4$ y $\dfrac{dz}{dt} = -0.8$. [El signo negativo en la razón de cambio de la longitud $z(t)$ de la cuerda se debe a que dicha longitud está disminuyendo (decreciendo)].

Consideramos el triángulo rectángulo cuyos vértices están en el amarre de la lancha, la base del muelle y las manos del hombre. Este triángulo tiene catetos de longitudes $x(t)$ (distancia entre la lancha y el muelle) y 3 (altura entre la base del muelle y las manos) e hipotenusa de longitud $z(t)$ (longitud de la cuerda).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$z(t)^2 = x(t)^2 + 3^2 = x(t)^2 + 9$$

donde $x(t)$ y $z(t)$ dependen del tiempo t.
Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2z(t)\left(\frac{dz}{dt}\right) = 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

de donde, para cualquier instante $t \geq 0$, mientras $x > 0$ se tiene que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z(t)}{x(t)}\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

En el instante t_0 en que $x(t_0) = 4\,m$ se tiene que

$$z(t_0)^2 = 4^2 + 9 = 25 \Rightarrow z(t_0) = 5\,m$$

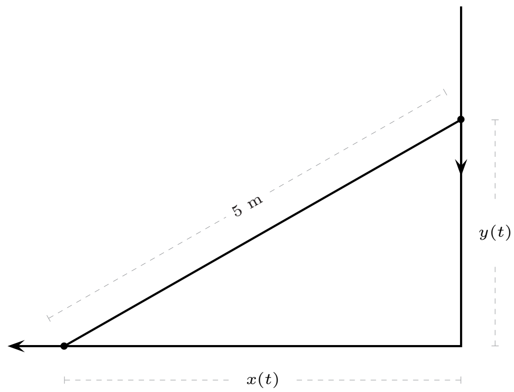
Y debido a que $\dfrac{dz}{dt} = -0.8\,m/s$, obtenemos que, en ese instante t_0:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{z(t_0)}{x(t_0)}\right)\frac{dz}{dt} = \left(\frac{5}{4}\right)(-0.8) = -1 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\,m/s$$

Ejemplo 7.6 *Una escalera de 5 m de longitud descansa contra un muro que está sobre el nivel del suelo. Si el extremo inferior de la escalera se está resbalando a razón de 1.2 m/s ¿a qué velocidad desciende el extremo superior cuando éste está a 3 m del suelo?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que está disminuyendo la distancia que hay entre el extremo superior de la escalera y el piso, en el instante en que dicha distancia es de 3 m y la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera está aumentando a razón de 1.2 m/s. Es decir, si consideramos que (en cierto instante t) el extremo superior de la escalera se encuentra a una distancia $y(t)$ del piso y $x(t)$ es la distancia que hay entre la pared y el extremo inferior de la escalera, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la distancia $y(t)$, cuando la rapidez de cambio de la distancia $x(t)$ es de $1.2\,m/s$. Ésto es, se pide calcular a la derivada $\dfrac{dy}{dt}$ cuando $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$, en el preciso instante en que $y(t) = 3$. (El signo positivo en la razón de cambio de la distancia $x(t)$ se debe a que dicha longitud está aumentando)

Consideramos el triángulo rectángulo que tiene catetos de longitudes $y(t)$ (distancia entre el extremo superior de la escalera y el piso) y $x(t)$ (distancia entre el extremo inferior de la escalera y la pared) e hipotenusa de longitud $z = 5$ (longitud de la escalera).



Por el teorema de Pitágoras se cumple que

$$y(t)^2 + x(t)^2 = 5^2 = 25$$

donde $y(t)$ y $x(t)$ dependen del tiempo t.

Derivando implícitamente con respecto a t se obtiene

$$2y(t)\left(\frac{dy}{dt}\right) + 2x(t)\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

de donde, para cualquier instante $t \geq 0$, mientras $y(t) > 0$ se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x(t)}{y(t)}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

En el instante t_0 en que $y(t_0) = 3\,m$ se tiene que

$$3^2 + x(t_0)^2 = 25 \Rightarrow x(t_0) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4\,m$$

Y debido a que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$, obtenemos que, en ese instante t_0:

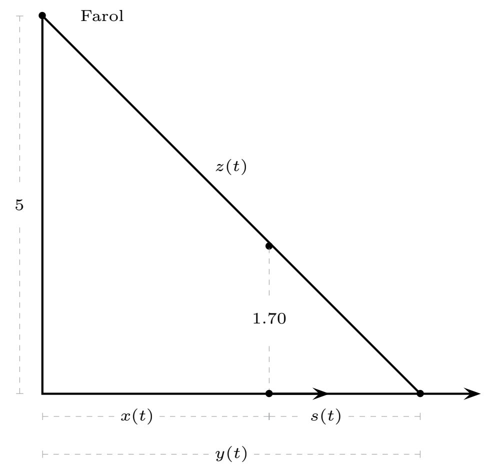
$$\frac{dy}{dt} = \left(-\frac{x(t_0)}{y(t_0)}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)1.2 = -1.6 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -1.6\,m/s$$

Ejemplo 7.7 *Un farol de 5 m de altura tiene una luz en la parte superior y un hombre de 1.70 m de estatura se aleja del farol caminando a una velocidad de 1.2 m/s. Cuando la distancia de la base del farol a la punta (parte más alejada) de la sombra del hombre es de $6\,m$ ¿con qué velocidad crece su sombra? ¿con qué velocidad se mueve la punta de la sombra con respecto a la luz?*

- ¿Qué se pide en la primera pregunta? *¿Con qué velocidad crece su sombra?*

  Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la sombra proyectada por el hombre, a medida que éste se aleja del farol (y por ende de la luz). Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $s(t)$ de la sombra, cuando se conocen la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre al farol, así como la distancia $x(t) + s(t)$ desde la base del farol hasta la punta de la sombra. Esto es, se quiere conocer a la razón de cambio $\dfrac{ds}{dt}$ a sabiendas de que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$ y que $x(t) + s(t) = 6\,m$.

Es importante notar que a partir de los pies del hombre se miden dos longitudes en el piso: su distancia $x(t)$ a la base del farol y la longitud $s(t)$ de su sombra.



Construimos dos triángulos rectángulos semejantes (uno dentro del otro) con un vértice común ubicado en la punta más alejada de la sombra. El triángulo "grande" con vértices en la base y en la luz del farol; el triángulo "pequeño" con vértices en los pies y en la cabeza del hombre. El triángulo "grande" tiene un cateto de longitud $5\,m$ y el otro de longitud $y(t) = x(t) + s(t)$; el triángulo "pequeño" tiene un cateto de longitud $1.70\,m$ y el otro de longitud $s(t)$.

Por la semejanza de los triángulos rectángulos sucede que $\dfrac{s(t)}{1.70} = \dfrac{y(t)}{5}$; por lo cual

$5\,s(t) = 1.7\,y(t) \Rightarrow 5\,s(t) = 1.7(x(t)+s(t)) \Rightarrow 5\,s(t) - 1.7\,s(t) = 1.7\,x(t) \Rightarrow 3.3\,s(t) = 1.7\,x(t) \Rightarrow s(t) = 0.\overline{51}x(t)$

Derivando con respecto a t se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = 0.\overline{51}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Considerando que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$ se tiene que $\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,m/s) = 0.6\overline{18}\,m/s$.

Luego, en cualquier instante, la sombra crece a razón (constante) de $0.618\,m/s$, no importando la distancia a la que se encuentre el hombre del farol. En particular,

$\dfrac{ds}{dt} = (0.\overline{51})(1.2\,m/s) = 0.6\overline{18}\,m/s$ en el instante t_0 en que $y(t_0) = 6\,m$.

- ¿Qué se pide en la segunda pregunta? *¿Con qué velocidad se mueve la parte más alejada de la sombra con respecto a la luz?*

Se pide calcular la velocidad a la que está creciendo la distancia que hay entre la luz y la punta de la sombra. Es decir, se desea conocer la velocidad a la que crece la longitud $z(t)$ de la hipotenusa del triángulo grande, cuando se conocen la velocidad a la que aumenta la distancia $x(t)$ del hombre al farol, la velocidad a la que aumenta la longitud $s(t)$ de la sombra proyectada por el hombre, así como la distancia $y(t) = x(t) + s(t)$ desde la base del farol hasta la punta de la sombra.

Esto es se quiere conocer a la razón de cambio $\dfrac{dz}{dt}$ a sabiendas de que $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$, que $\dfrac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}\,m/s$ y que $y = 6m$.

Por el teorema de Pitágoras

$$z(t)^2 = y(t)^2 + 5^2 \Rightarrow z(t) = \sqrt{y(t)^2 + 25}$$

Derivando respecto a t

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\frac{d}{dt}(x(t)+s(t)) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{y(t)}{\sqrt{y(t)^2+25}}\left(\frac{dx}{dt}+\frac{ds}{dt}\right)$$

Sustituyendo los valores particulares $y = 6m$, $\dfrac{dx}{dt} = 1.2\,m/s$ y $\dfrac{ds}{dt} = 0.6\overline{18}\,m/s$,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{6}{\sqrt{6^2+25}}\left(1.2 + 0.6\overline{18}\right) = \frac{6(1.\overline{81})}{\sqrt{61}} \approx 1.3968 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} \approx 1.4\,m/s$$

Ejemplo 7.8 *Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de $20\,m/s$, entonces su altura (posición con respecto al suelo) después de t segundos es $h(t) = 20t - 4.9t^2$ metros. ¿Cuál es su velocidad después de 1 segundo? ¿Cuándo alcanza la pelota una velocidad de $5\,m/s$? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 12 metros arriba del suelo?*

- *¿Cuál es su velocidad después de 1 segundo?* Considerando que la velocidad instantánea de un móvil es la razón de cambio instantánea (rapidez de cambio) de la posición en el tiempo, debemos calcular la derivada de la función posición $h(t) = 20t - 4.9t^2$, para luego valuarla en $t = 1$. Esto es, primero calcularemos la velocidad instantánea

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dh}{dt} \text{ para luego determinar } v(1) = v(t=1) \\ v(t) &= \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}(20t - 4.9t^2) = 20 - 9.8t \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow v(1) = 20 - 9.8 = 10.2 \;\Rightarrow\; v(1) = 10.2\,m/s \end{aligned}$$

  El signo positivo $v(1) = 10.2\,m/s$ de su velocidad instantánea indica que la pelota se dirige hacia arriba.

- *¿Cuándo alcanza la pelota una velocidad de $5\,m/s$?* Ahora nos interesa conocer el instante (segundo) $t \geq 0$ en el que $v(t) = 5$. Para esto hacemos lo siguiente,

$$v(t) = 5 \;\Leftrightarrow 20 - 9.8t = 5 \;\Leftrightarrow 9.8t = 15 \;\Leftrightarrow t = \frac{15}{9.8} \Leftrightarrow t \approx 1.53$$

  luego $1.53\,s$ después de haberse lanzado, la pelota alcanza una velocidad de $5\,m/s$.

- *¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?* Debemos determinar ahora la posición de la pelota, en el instante en que ella se detiene en su movimiento hacia arriba. Cuando la pelota se encuentra en su altura máxima, su velocidad es cero.

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 20 - 9.8t = 0 \Leftrightarrow 9.8t = 20 \Leftrightarrow t = \frac{20}{9.8} \Leftrightarrow t \approx 2.04$$

  luego $2.04\,s$ después de haberse lanzado, la pelota se detiene (tiene velocidad cero).

  Su posición en ese instante es

$$h(2.04) \approx 20(2.04) - 4.9(2.04)^2 \approx 20.41,$$

  que es su altura máxima.

- *¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 12 metros arriba del suelo?* Debemos determinar ahora la velocidad de la pelota, en el instante en que su posición es $h(t) = 12$.

$$h(t) = 12 \Leftrightarrow 20t - 4.9t^2 = 12 \Leftrightarrow -4.9t^2 + 20t - 12 = 0$$

  ecuación cuyas soluciones son

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4(-4.9)(-12)}}{2(-4.9)} = \frac{-20 \pm \sqrt{164.8}}{-9.8} \approx \frac{-20 \pm 12.84}{-9.8}$$

  de donde se obtienen dos valores reales para t.

$$t_1 = \frac{-20 + 12.84}{-9.8} = \frac{-7.16}{-9.8} \approx 0.73 \qquad \& \qquad t_2 = \frac{-20 - 12.84}{-9.8} = \frac{-32.84}{-9.8} \approx 3.35$$

  entonces se tienen dos instantes, $t_1 \approx 0.73\,seg$ y $t_2 \approx 3.35\,seg$, en que la posición de la pelota es $h = 12\,m$. [Intuimos que el primer instante ocurre al subir y el segundo al bajar la pelota].

  La velocidad de la pelota en cada uno de estos instantes es

$$v(t_1) = 20 - 9.8(0.73) \approx 12.846\,m/s \qquad \& \qquad v(t_2) = 20 - 9.8(3.35) \approx -12.83\,m/s$$

  Por lo tanto en cada uno de los instantes la rapidez de la pelota es la misma y la diferencia de signos de los vectores velocidad nos indica que, en efecto, en el primer instante la pelota se dirige hacia arriba y en el segundo se dirige hacia abajo.

Ejemplo 7.9 *La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (kelvin) y la presión P (en atmósferas) con un volumen V (en litros), es $PV = nRT$; donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante de los gases. Suponga que en cierto instante $P = 8\,atm$ y que aumenta a razón de $0.10\,atm/min$, además $V = 10\,\ell$ y disminuye a razón de $0.15\,\ell/min$. Determinar la razón de cambio de T con respecto al tiempo, en ese preciso instante, si $n = 10\,mol$.*

¿Qué se desea en el problema? Se desea determinar la razón de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo t. Esto es, se quiere calcular la rapidez de cambio de la temperatura en el preciso instante en que la presión es de $8\,atm$ y aumenta a razón de $0.10\,atm/min$ y además el volumen es de $10\,\ell$ y disminuye a razón de $0.15\,\ell/min$. Más concretamente, se quiere calcular la rapidez de cambio de la temperatura $\dfrac{dT}{dt}$ en el preciso instante en que $P = 8\,atm$, $\dfrac{dP}{dt} = 0.10\,atm/min$, $V = 10\,\ell$ y $\dfrac{dV}{dt} = -0.15\,\ell/min$.

Ya que $PV = nRT$, $R = 0.0821$ y $n = 10\,mol$, entonces en cualquier instante t se tiene que $PV = 10(0.0821)T == 0.821\,T$; donde P , V y T están en función del tiempo t.

Derivando con respecto a t en $PV = 0.821\,T$

$$\frac{d}{dt}(PV) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right) \Rightarrow P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right) = 0.821\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

.

Despejando a $\dfrac{dT}{dt}$ y sustituyendo valores obtenemos que

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{0.821}\left[P\left(\frac{dV}{dt}\right) + V\left(\frac{dP}{dt}\right)\right] = \frac{1}{0.821}\left[(8)(-0.15) + (10)(0.10)\right] = \frac{-0.2}{0.821} \approx -0.24.$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la temperatura es $\dfrac{dT}{dt} = -0.24\,kelvin/min$. Esto es la temperatura *disminuye* 0.24 kelvin cada minuto.

Ejemplo 7.10 *La masa de la parte de una varilla metálica que se encuentra entre uno de sus extremos y un punto que está a x metros es de $3x^2$ kg. Calcular la densidad lineal de masa cuando $x = 2\,m$, $x = 3\,m$ y $x = 4\,m$. ¿En dónde es mayor la densidad y dónde es menor?*

¿Qué se desea en el problema? Primero calcular la densidad lineal de masa de una varilla metálica en tres secciones diferentes y luego compararlas para decidir donde se tienen la mayor y la menor densidad. Pero, ¿cómo calcular la densidad lineal de masa en una sección transversal de la varilla?

Recordemos que la densidad de masa de un cuerpo es $\rho = \dfrac{M}{V}$, donde M es la masa y V es el volumen de dicho cuerpo. Notemos aquí que ρ es realmente una densidad *volumétrica promedio* de masa, o sea una cantidad promedio de masa por unidad de volumen.

Ahora bien, si la masa de la parte de la varilla que se encuentra entre uno de sus extremos y un punto que está a x metros es de $3x^2\,kg$, entonces dicha masa es $M(x) = 3x^2$, que es una función (puntual) de x. Y si consideramos un pequeño incremento Δx en la longitud x de la varilla, entonces la masa de la porción de la varilla que se encuentra entre tal extremo y el punto que está a $x + \Delta x$ metros es $M(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2\,kg$.

De esto se desprende que la masa del pedazo de varilla que tiene por extremos x y $x + \Delta x$ es

$$\Delta M = M(x + \Delta x) - M(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

Luego entonces, la densidad *lineal promedio* de masa de este pedazo de varilla es

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \frac{6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3(\Delta x)$$

Ahora propiciamos que el pedazo de varilla sea cada vez más pequeño, lo cual se logra haciendo que $\Delta x \to 0$. Cuando esto sucede se tiene que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{M(x + \Delta x) - M(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[6x + 3(\Delta x) \right] = 6x$$

Hemos obtenido, en general, una nueva función (puntual) de x que es $\rho(x) = M'(x)$, a la cual denominamos *densidad lineal puntual de masa* y que se mide en unidades de masa por unidad de longitud.

En particular (en este problema) se tiene que la densidad lineal (puntual) de masa del pedazo de varilla (que se encuentra entre uno de sus extremos y un punto que está a x metros) es $\rho(x) = 6x$. De aquí que: $\rho(2) = 12\,kg/m$, $\rho(3) = 18\,kg/m$ y $\rho(4) = 24\,kg/m$. Por lo tanto, la mayor densidad está en $x = 4\,m$ y la menor está en $x = 2\,m$.