5.1. DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Aplicando la definición de la derivada se tiene:

$$f(x) = a^x$$ *Enunciado.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$ *Aplicando la definición de la derivada.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\left(a^h - 1\right)}{h}$$ *Resolviendo y factorizando.*

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^h - 1\right)}{h}$$ *Pero.*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(a^h - 1\right)}{h} = f'(0)$$ $\boxed{f'(x) = f'(0)a^x}$

Por lo anterior se puede decir que "***La razón de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función***".

Derivada de a^x y a^u

Tomando $y = a^x$, Por definición de logaritmos se puede decir que :

$a = e^{Ln(a)}$, Elevando a la potencia x, se tiene::

$\boxed{a^x = \left(e^{Ln(a)}\right)^x = e^{x\,Ln(a)}}$, para obtener la derivada:

$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x\,Ln(a)}\right)$, que se puede resolver por la ***Regla de la Cadena***, así:

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \left(e^{x\,Ln(a)}\right)\frac{d}{dx}\left(e^{x\,Ln(a)}\right)$$

$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \left(e^{x\,Ln(a)}\right)Ln(a)$, aplicando la definición anterior:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \left(a^x\right)Ln(a)}$$

Aplicando la Regla de la Cadena, es posible entonces escribir:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^u\right) = \left(a^u \right) Ln\left(a \right)\left(\frac{du}{dx} \right)}$$

Siempre y cuando ***u*** sea una función continua y derivable en ***x***.

Ejemplo 1 : Hallar la derivada de $y = 3^x$:

$\frac{d}{dx}\left(3^x\right) = 3^x \; Ln\left(3 \right)$, aplicando la definición anterior.

Ejemplo 2 : Hallar la derivada de $y = e^x$:

$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \; Ln\left(e \right) = e^x \left(1 \right) = e^x$, aplicando la definición anterior.

Ejemplo 3 : Hallar la derivada de $y = 3^{Sen(x)}$:

$$\frac{d}{dx}\left(3^{Sen(x)}\right) = 3^{Sen(x)} \; Ln\left(3 \right)\frac{d}{dx}\left(Sen(x) \right) = 3^{Sen(x)} \; Ln\left(3 \right)\left(Cos(x) \right)$$

<u>**Derivada de** $y = e^x$</u>

Para hallar la derivada de $y = e^x$ se toman logaritmos en ambos lados de la igualdad,

$$Ln\,(y) = x$$

Diferenciando implícitamente se tiene:

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1$, de donde $\frac{dy}{dx} = y$, o sea que $\frac{dy}{dx} = e^x$,

De donde se puede ser que se trata de una función que no cambia con la diferenciación. (***Función Indestructible***)

Tratándose de $y = e^u$, donde ***u*** es una función continua y deribable, se puede escribir:

$$\frac{d(e^{u})}{dx} = \frac{d(e^{u})}{du}\frac{du}{dx} = e^{u}\,\frac{du}{dx}$$

Ejercicios Propuestos:

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = 3^{2x}$
2. $y = 2^{x}\,3^{x}$
3. $y = x^{Sen(\,x\,)}$
4. $y = 2^{Sec(\,x\,)}$
5. $y = x^{Ln(\,x\,)}$
6. $y = \left[\,Cos(\,x\,)\,\right]^{x}$
7. $y = x\,2^{x^{2}}$
8. $y = 2^{x}\,Ln(\,x\,)$
9. $y = \left[\,Cos(\,x\,)\,\right]^{\sqrt{x}}$

5 FUNCIONES TRASCENDENTES

5 FUNCIONES TRASCENDENTES

5.1. Derivada de la función Logaritmo Natural

Para determinar la derivada de un logaritmo Natural se procede así:

$$y = Ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Ln(x+\Delta x) - Ln(x)}{\Delta x}$$, Por definición de la Derivada.

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} Ln\left(\frac{x+\Delta x}{x} \right),$$ Por la regla del cociente en Logaritmos.

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} Ln\left(1+\frac{\Delta x}{x} \right),$$ Factorizando dentro del logaritmo.

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \lim_{h \to +\infty} \frac{h}{x} Ln\left(1+\frac{x/h}{x} \right)$$, donde $\Delta x = x/h$, luego $h \to +\infty$ si $\Delta x \to 0$

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \lim_{h \to +\infty} \frac{h}{x} Ln\left(1+\frac{1}{h} \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to +\infty} h\, Ln\left(1+\frac{1}{h} \right)$$ Por tratarse de una constante.

$$\frac{d}{dx}\left(Ln(x) \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to +\infty} Ln\left(1+\frac{1}{h} \right)^{h},$$ Por la regla de la potencia para logaritmos.

$$\frac{d}{dx}\left(\ Ln(x)\ \right)=\frac{1}{x}\,Ln\,\lim_{h\to+\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{h},$$ Limite de un logaritmo, como se vio es ***e***

$$\frac{d}{dx}\left(\ Ln(x)\ \right)=\frac{1}{x}\,Ln(e),$$ Por definición de ***e***

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\ Ln(x)\ \right)=\frac{1}{x}},$$ pues $Ln(e)=1$

Por la regla de la cadena es posible decir :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\ Ln(u)\ \right)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$$

5.2. Derivada de la función Logaritmo en cualquier base

Para obtener la derivada de $y=Log_a(\ x\ )$, se procede de la siguiente manera:

Por la definición de la función logaritmo, sea $a^y=x$,
Tomando Logaritmo a ambos lados de la igualdad:
$Ln\left(\ a^y\ \right)=Ln(\ x\ )$, de acuerdo con las propiedades de los logaritmos:
$y\,Ln(\ a\ )=Ln(\ x\ )$, despejando la variable dependiente:
$y=\dfrac{Ln(\ x\ )}{Ln(\ a\ )}$, que es lo mismo que escribir $\boxed{Log_a(\ x\ )=\dfrac{Ln(\ x\ )}{Ln(\ a\ )}}$

Para obtener la derivada, se procede entonces como si se tratara de un cociente, así:

$\dfrac{d}{dx}\left(Log_a(\ x\ )\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{Ln(\ x\ )}{Ln(\ a\ )}\right)$, aplicando la derivada de un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(Log_a(\ x\ )\right)=\frac{1}{Ln(\ a\ )}\frac{d}{dx}\left(Ln(\ x\ )\right)$$

$\dfrac{d}{dx}\left(Log_a(\ x\ )\right)=\dfrac{1}{Ln(\ a\ )}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, que de acuerdo con la Regla de la Cadena, se puede decir:

$\dfrac{d}{dx}\left(Log_a(\ u\ )\right)=\dfrac{1}{Ln(\ a\ )}\left(\dfrac{1}{u}\right)\dfrac{d}{dx}(\ u\ )$, agrupando términos se tiene:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(Log_a\,(\,u\,)\,\right)=\frac{1}{u\,Ln(\,a\,)}\;\frac{d}{dx}(\,u\,)}$$

Ejemplo 1 : Hallar la derivada de $y=Ln\left(\,5x^2+2x+1\,\right)$

Si $u=5x^2+2x+1$, entonces $\frac{du}{dx}=10x+2$

Aplicando la regla de la derivada:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\,5\,x^2+2\,x+1\,\right)}(\,10\,x+2\,)\;\Rightarrow\;\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{10\,x+2}{\left(\,5\,x^2+2\,x+1\,\right)}}$$

Ejemplo 2 : Hallar la derivada de $y=Log_{10}\,(3x+1)$,

Aplicando la definición se puede decir:

$u=3x+1$, de donde $\frac{du}{dx}=3$, luego la derivada será:

$\frac{d}{dx}\left(\,Log_{10}\,(3x+1)\,\right)=\frac{1}{(3x+1)}\,\frac{1}{Ln(10)}\left(\frac{d}{dx}(3x+1)\right)$, aplicando valores se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\,Log_{10}\,(3x+1)\,\right)=\frac{1}{(3x+1)\,Ln(10)}(3)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\,Log_{10}\,(3x+1)\,\right)=\frac{3}{(\,3x+1\,)\,Ln(10)}$$

Ejemplo 3 Hallar dy/dx, si $y^{2/3}=\frac{\left(x^2+1\right)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{(2x-3)\left(x^2-4\right)}}$

$$Ln\left(y^{2/3}\right)=Ln\left(\frac{\left(x^2+1\right)(3x+4)^{1/2}}{\sqrt[5]{(2x-3)\left(x^2-4\right)}}\right)$$

Aplicando las propiedades de las potencias de los logaritmos y el cociente de los logaritmos, se tiene:

$$\frac{2}{3}Ln(y)=Ln\left(\left(x^2+1\right)(3x+4)^{\frac{1}{2}}\right)-Ln\left(\sqrt[5]{(2x-3)\left(x^2-4\right)}\right)$$
$$\frac{2}{3}Ln(y)=Ln\left(x^2+1\right)+Ln\left((3x+4)^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{5}Ln\left((2x-3)\left(x^2-4\right)\right)$$
$$\frac{2}{3}Ln(y)=Ln\left(x^2+1\right)+Ln\left((3x+4)^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{5}\left[Ln(2x-3)+Ln\left(x^2-4\right)\right]$$
$$\frac{2}{3}Ln(y)=Ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}Ln(3x+4)-\frac{1}{5}Ln(2x-3)-\frac{1}{5}Ln\left(x^2-4\right)$$

Donde, resolviendo la derivada para cada término se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}Ln(y)\right)=\frac{2}{3}\frac{d}{dx}\left(Ln(y)\right)=\frac{2}{3}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}\left(Ln\left(x^2+1\right)\right)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)}(2x)=\frac{(2x)}{\left(x^2+1\right)}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}Ln(3x+4)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(Ln(3x+4)\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{(3x+4)}(3)=\frac{3}{2(3x+4)}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}Ln(2x-3)\right)=\frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(Ln(2x-3)\right)=\frac{1}{5}\frac{1}{(2x-3)}(2)=\frac{2}{5(2x-3)}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}Ln\left(x^2-4\right)\right)=\frac{1}{5}\frac{d}{dx}\left(Ln\left(x^2-4\right)\right)=\frac{1}{5}\frac{1}{\left(x^2-4\right)}(2x)=\frac{2x}{5\left(x^2-4\right)}$$

Entonces la derivada total será:

$$\frac{2}{3}\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{(2x)}{\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2(3x+4)}-\frac{2}{5(2x-3)}-\frac{2x}{5\left(x^2-4\right)}$$
$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{2}\left[\frac{(2x)}{\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2(3x+4)}-\frac{2}{5(2x-3)}-\frac{2x}{5\left(x^2-4\right)}\right]}$$

Ejercicios Propuestos

Hallar dy/dx para los siguientes ejercicios:

1. $y=(3x-7)^4\left(8x^2-1\right)^3$ y	**2.** $y=x^{2/5}\left(x^2+8\right)^4 e^{x^2+x}$
3. $y=Ln\sqrt{x^2+5}$	**4.** $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$
5. $y=Ln\left(\,Sen(x)\,Sen(2x)\,\right)$	**6.** $y=\dfrac{1}{2}\,Ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
7. $y=Ln\dfrac{\left(x^2+1\right)^5}{\sqrt{1-x}}$	**8.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, donde $x\rangle 1$
9. $y^5=\sqrt{\dfrac{(x+1)^5}{(x+2)^{10}}}$	**10.** $y=\sqrt[3]{\dfrac{x\,(x+1)\,(x-2)}{\left(x^2+1\right)(2x+3)}}$
11. $y^{4/5}=\dfrac{\sqrt{Sen(x)\,Cos(x)}}{1+2\,Ln(x)}$	**12.** $\sqrt{y}\;=\dfrac{x^5\;Tan^{-1}(\;x\;)}{(3-2x)\sqrt[3]{x}}$
13. $y=Log_{10}\sqrt{x}$	**14.** $y=Log_4\sqrt{x^2+25x+3}$
15. $y=Log_{10}\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$	**16.** $y=Log_3\sqrt[5]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$