# CAPITULO 3

## *Aplicaciones de la Derivada*

Licda. Elsie Hernández Saborío

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Escuela de Matemática

**Créditos**

**Primera edición impresa:** Rosario Álvarez, 1988.

**Edición Latex:** Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, Luis E. Carrera y Lisseth Angulo.

**Edición y composición final:** Walter Mora.

**Gráficos:** Walter Mora, Evelyn Agüero, Marieth Villalobos y Alejandra Araya.

**Comentarios y correcciones:** escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Enero 20, 2006

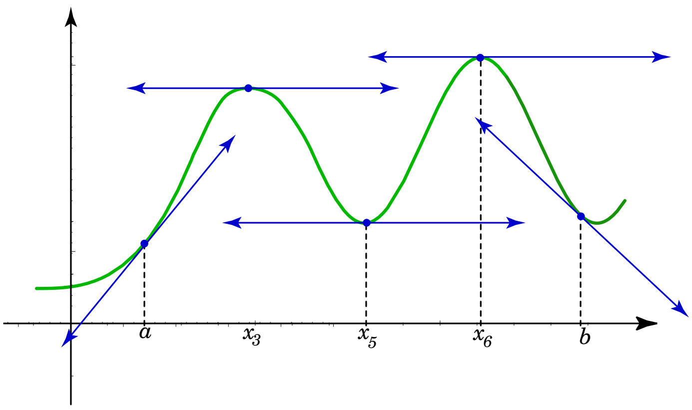
# Contenido

## 3.1 Estudio de la variación de funciones

Además de la utilización de la derivada para el cálculo de ciertos límites, (Regla de L'Hôpital), es posible, por medio de ella, obtener información sobre el comportamiento de una función, lo que permite contar con ciertos criterios que ayudan a representarla gráficamente.

### 3.1.1 Funciones crecientes y decrecientes y su relación con la derivada

Sea $f$ una función continua con ecuación $y = f(x)$, definida en un intervalo $[a, b]$. La siguiente es la representación gráfica de $f$ en el intervalo $[a, b]$.




En la representación gráfica anterior puede observarse la función $f$ es:

1. Creciente en los intervalos $]a, x_3[$ , $]x_5, x_6[$
2. Decreciente en los intervalos $]x_3, x_5[$ , $]x_6, b[$

También se tiene que cuando la pendiente de la recta tangente es positiva, la función $f$ crece; y cuando la pendiente de la recta tangente es negativa, la función decrece.

Note además que en los puntos $(x_3, f(x_3))$ , $(x_5, f(x_5))$ y $(x_6, f(x_6))$ la recta tangente es horizontal, por lo que su pendiente es cero, es decir, la primera derivada de la función se anula en cada uno de esos puntos.

En los siguientes teoremas se formalizan las apreciaciones anteriores.

**■ Teorema 1**

Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $]a, b[$.

1. Si $f'(x) > 0$ para toda $x$ en $]a, b[$, entonces la función $f$ es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para toda $x$ en $]a, b[$, entonces la función $f$ es decreciente en $[a, b]$. Demostración: Al final del capítulo

**■ Ejemplo 1**

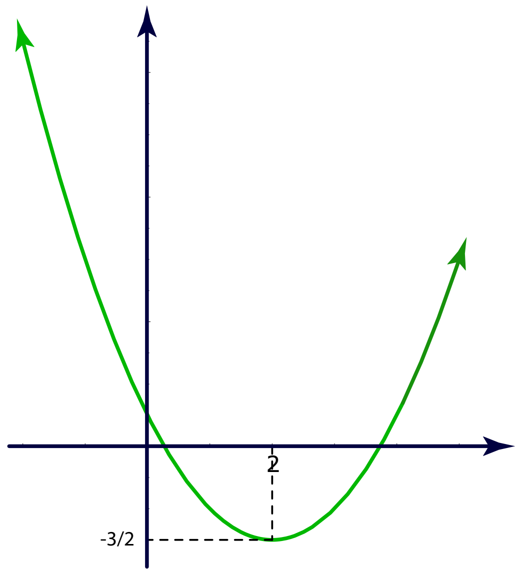
1. Determinemos los intervalos en que crece o decrece la función con ecuación $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 1)$.

   Para ello calculemos la primera derivada de $f$ : $f'(x) = x - 2$.

   Como $f'(x) > 0 \iff x - 2 > 0$, o sea si $x > 2$, entonces $f$ es creciente para $x > 2$.

   Como $f'(x) < 0 \iff x - 2 < 0$, o sea si $x < 2$, entonces $f$ es decreciente para $x < 2$.

   En la representación gráfica de la función puede observarse lo obtenido anteriormente.




2. Determine en cuáles intervalos crece o decrece la función con ecuación $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ con $x \neq 0$.

   La derivada de $f$ está dada por $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$ que puede escribirse como $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x^3}$

   Como $2(x^2 - 1)$ es positivo para toda $x$ en $\mathbb{R}$ entonces:

   $f'(x) > 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x^3} > 0$ y

   $f'(x) < 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x^3} < 0$

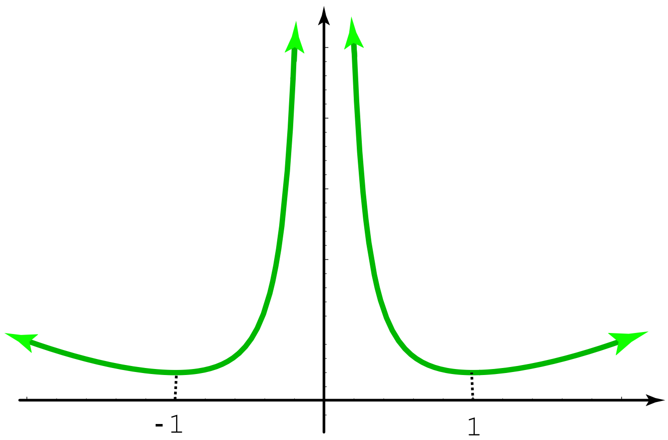
   Para resolver estas desigualdades recurrimos a la siguiente tabla.

| | $-\infty \quad -1$ | $-1 \quad 0$ | $0 \quad 1$ | $1 \quad +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^3$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Luego: $f'(x) > 0$ si $x \in ]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[$ por lo que la función $f$ crece en el intervalo $]-1, 0[ \cup ]1, +\infty[$.

Además: $f'(x) < 0$ si $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$ de donde la función $f$ decrece en el intervalo $]-\infty, -1[ \cup ]0, 1[$.

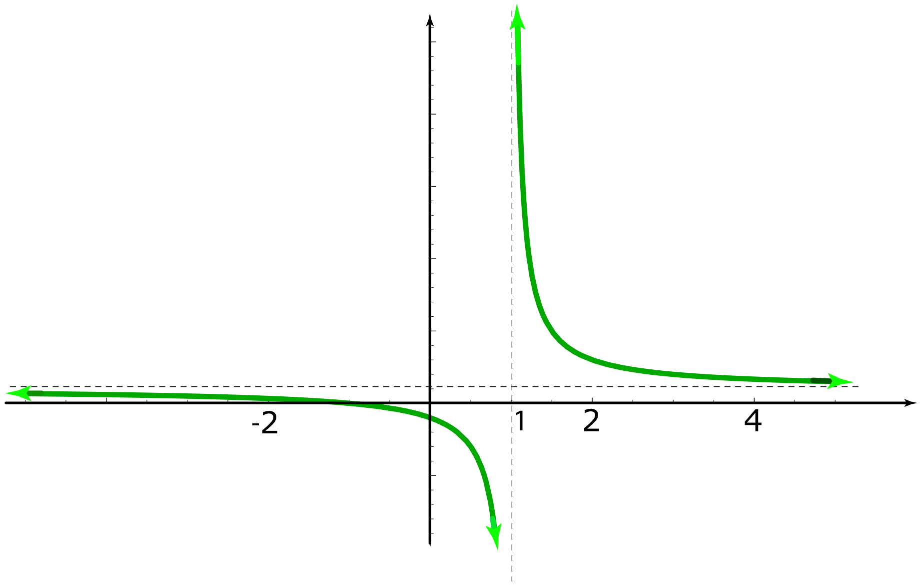
La representación gráfica de la función es la siguiente:




3. Determinar los intervalos en que crece o decrece la función $f$ con ecuación $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, con $x \neq 1$.

La derivada de $f$ es $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Como $(x-1)^2$ es mayor que cero para $x$ en $\mathbb{R}$, $x \neq 1$, y además $-2 < 0$ entonces $f'(x) < 0$ para todo $x$ en $\mathbb{R}$ $(x \neq 1)$, por lo que la función $f$ es decreciente para $x$ en $\mathbb{R}$, $x \neq 1$.

La siguiente, es la representación gráfica de dicha función:




### 3.1.2 Valor máximo y valor mínimo de una función

Si $f$ es una función dada, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de $f$, si existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $a < c < b$ y $f(c) \geq f(x)$ para $x \in ]a, b[$, siendo $x$ un valor del dominio de la función.

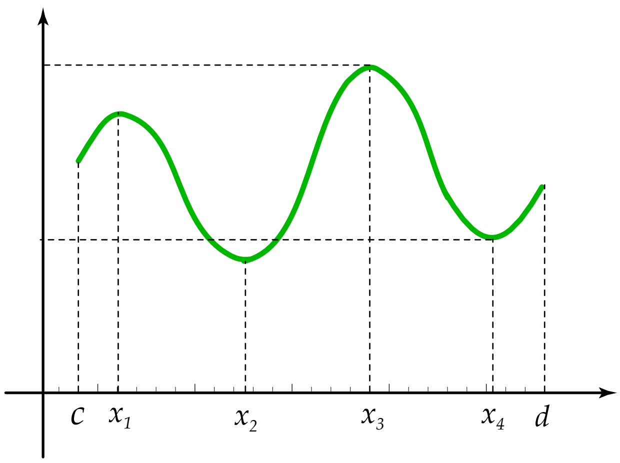
Si $f(c) \geq f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$, entonces $f(c)$ es el valor máximo de $f$ o máximo absoluto.

Similarmente, $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función $f$, si existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $a < c < b$ y $f(c) \leq f(x)$ para $x \in ]a, b[$, con $x$ en el dominio de $f$.

Si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$, entonces se dice que $f(c)$ es el valor mínimo de dicha función. También se llama mínimo absoluto.

**Ejemplo 1**

Considere una función $f$ definida en un intervalo $]c, d[$, cuya representación gráfica es la siguiente:



Note que $f(x_1)$, es un máximo relativo y $f(x_3)$ es el máximo valor que toma la función en el intervalo en que está definida. Similarmente, $f(x_4)$ es un valor mínimo relativo y $f(x_2)$ es el mínimo absoluto de la función en $]c, d[$.

**Teorema 1**

Sea $c$ un punto interior del dominio de una función $f$.

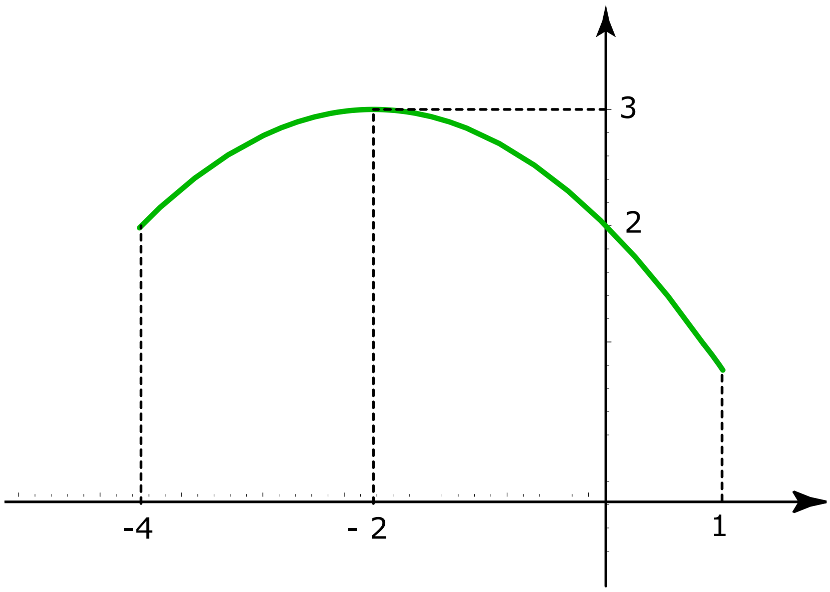
Si $f(c)$ es un valor máximo relativo de $f$ y si existe $f'(c)$ entonces $f'(c) = 0$.

**Prueba:** al final del capítulo.

**Ejemplo 2**

Considere la función $f$ definida por $f : [-4, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-1}{4}(x^2 + 4x - 8)$

Su representación gráfica es la siguiente:




Puede observarse que cuando $x$ toma el valor de $-2$ entonces la función tiene un valor máximo. En este caso $(-2, 3)$ es precisamente el vértice de la parábola con ecuación: $y = \dfrac{-1}{4}(x^2 + 4x - 8)$.

Según el teorema anterior debe cumplirse que $f'(-2)$ sea igual a cero.

En efecto, como $f'(x) = \dfrac{-1}{4}(2x + 4)$, al sustituir $x$ por -2 se obtiene que $f'(-2) = \dfrac{-1}{4}(-4 + 4) = 0$, que era lo que quería comprobarse.

**Teorema 2**

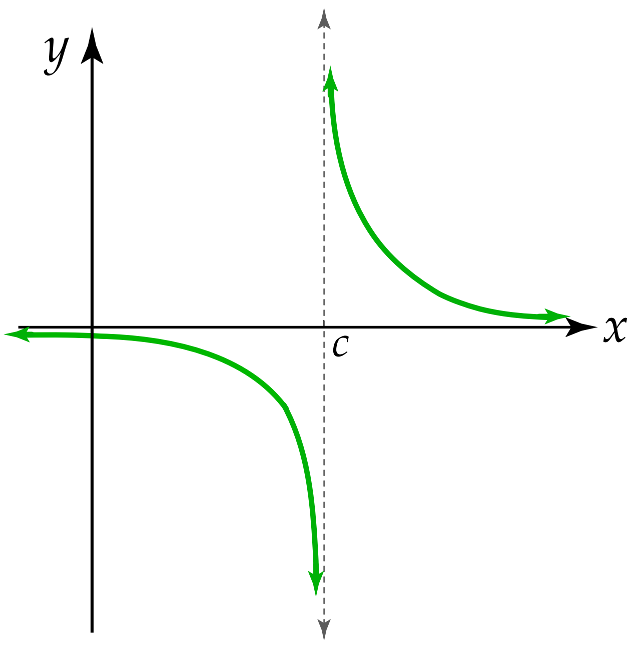
Sea $c$ un punto interior del dominio de una función $f$. Si $f(c)$ es un valor mínimo relativo de $f$ y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

La demostración es similar a la del teorema anterior.

■ **Ejemplo 3**

Considere la función $f$ definida por $f : [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 7$

Su representación gráfica es la siguiente:

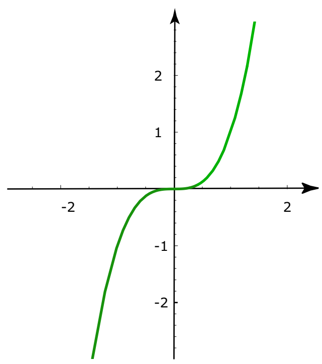



Note que la función $f$ tiene un valor mínimo en $x = 3$ dado por $f(3) = -2$. El punto $(3, -2)$ es el vértice de la parábola con ecuación $y = x^2 - 6x + 7$. De acuerdo con el teorema 3 debe cumplirse que $f'(3)$ sea igual a cero. Como $f'(x) = 2x - 6$ entonces $f'(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0$ y se verifica lo enunciado respecto al valor mínimo.

**Observación**: El recíproco de los dos teoremas anteriores no es cierto. Es decir, el hecho de que $f'(c)$ sea igual a cero, no implica que en $x = c$ exista un máximo o un mínimo.

■ **Ejemplo 4**

Para la función $f$ con ecuación $f(x) = x^3$, se tiene que $f'(x) = 3x^2$, y $f'(x) = 0$ si $x = 0$; sin embargo, en $x = 0$ no hay ni un valor máximo ni un valor mínimo, como puede observarse en la siguiente representación gráfica de la funcón.



■ **Definición 1**
Sea $f$ una función. Recibe el nombre de valores críticos del dominio de f, aquellos en los que $f'(x)$ es igual a cero o en los que $f'(x)$ no existe.

■ **Ejemplo 5**

Determinemos los valores crítcos de las funciones con ecuaciones:

a. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x \in \mathbb{R}$

b. $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

**Solución**:

a. Como $f(x) = 2x^2 - x^4$, entonces $f'(x) = 4x - 4x^3$ Ahora: $f'(x) = 0$ si y solo si $4x(1 - x^2) = 0$ o sea si $x = 0$, ó, $x = 1$, ó, $x = -1$ Luego, los valores críticos de $f$ son: $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$.

b. Como $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ Luego $f'(x) = \dfrac{x+1}{2\sqrt{x^3}}$, de donde $f'(x) = 0$ si y solo si $x + 1 = 0$, o sea, si $x = -1$ Por lo tanto el valor crítico de $f$ es $x = -1$. Note que aunque $f'(x)$ se indefine en $x = 0$, como este valor no pertenece al dominio de $f$, entonces no es valor crítico de dicha función.

**Observación:** Reciben el nombre de valores extremos de una función $f$ los valores máximos relativos y los valores mínimos relativos de $f$. Dada una función $f$ cuyo dominio es el intervalo $K$, un valor $c \in K$ será un valor crítico de $x$ para la función $f$ si:

a. $f'(c) = 0$ ó

b. $f'(x)$ no existe ó

c. $c$ es un extremo del intervalo $K$.

En este último caso, si $K = [a, b]$ entonces "$a$" y "$b$" son valores críticos. Si $K = [a, b[$ o si $K = [a, +\infty[$ entonces "$a$" es un valor crítico. Si $K = ]a, b[$, o si $K = ]-\infty, b]$ entonces "$b$" es un valor crítico. Si $K = ]a, b[$, entonces ni "$a$" ni "$b$" son valores críticos (note que los valores extremos de un intervalo abierto no son elementos del intervalo).

### 3.1.3 Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y los mínimos de una función

En el siguiente teorema se establece cómo determinar los valores máximos y los valores mínimos de una función, al estudiar los intervalos en que crece o decrece la función.

■ **Teorema 1**

Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, que es derivable en todo punto del intervalo abierto $]a, b[$. Sea $c$ en $]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

a. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$, y negativa para todo $x > c$, entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de $f(x)$.

b. Si $f'(x)$ es negativa para toda $x < c$, y positiva para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de $f(x)$.

c. Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y también lo es para todo $x > c$; o si $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y a su vez para todo $x > c$, entonces $f(c)$ no es un valor máximo relativo ni un valor mínimo relativo de $f(x)$.

**Prueba:** al final del capítulo.

Las situaciones enunciadas en a.), b.) y c.) pueden representarse gráficamente como sigue:

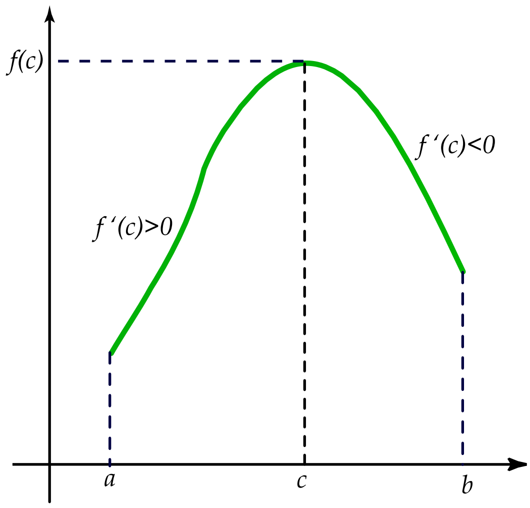



Figura 3.1: Máximo relativo en $x = c$

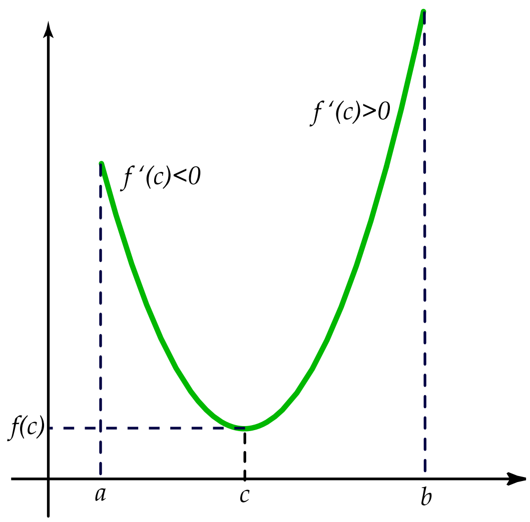



Figura 3.2: Mínimo relativo en $x = c$

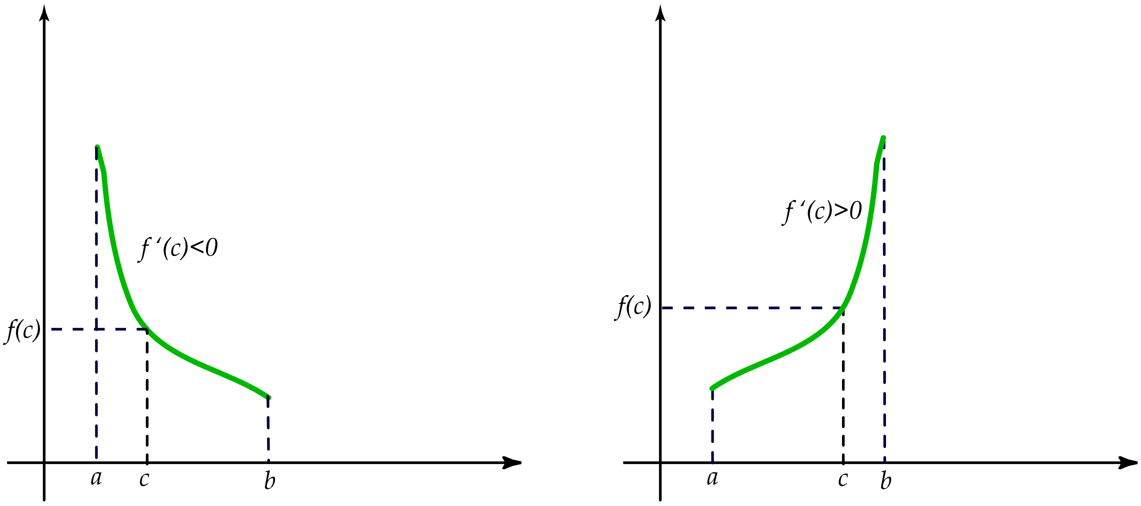



Figura 3.3: En $x = c$ no hay ni máximo ni mínimo relativo.

En los siguientes ejemplos determinaremos los valores extremos de una función cuya ecuación se da. Para ello, se calcula la primera derivada de la función, luego se determinan los valores críticos y por último se aplica el Teorema 4.

### Ejemplo 1

$f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

Note que $f$ está definida para $x \in \mathbb{R}$

Como $f'(x) = 4 - x^2$ entonces $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 2$, ó $x = -2$.

Los valores críticos son $x = 2$, y , $x = -2$.

Determinemos ahora cuándo $f'(x) > 0$ y cuándo $f'(x) < 0$.

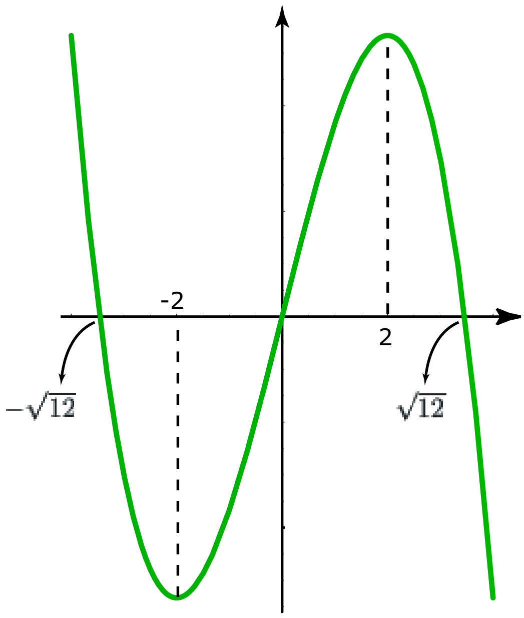
Como $f'(x) = (2-x)(2+x)$, se deben resolver las desigualdades: $(2-x)(2+x) > 0$, $(2-x)(2+x) < 0$. Nos ayudamos con la tabla siguiente:

| | $-\infty$ | 2 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | $+$ | $+$ | $-$ | |
| $2+x$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | |

Como $f'(x) < 0$ para $x \in ]-\infty, -2[$ y $f'(x) > 0$ para $x \in [-2, 2]$ entonces $f(-2)$ es un valor mínimo.

Como $f'(x) > 0$ para $x \in ]-2, 2[$ y $f'(x) < 0$ para $x \in ]2, +\infty[$ entonces $f(2)$ es un valor máximo.

La representación gráfica de la función es la siguiente:




Note que $f(-2) = \dfrac{-16}{3}$ es un mínimo relativo y que $f(2) = \dfrac{16}{3}$ es un máximo relativo, en el dominio de la función.

**Ejemplo 2**

$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}\ (x+1)^3;\ x \in\ [-1, 1]$

En este caso $f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(11x-7)}{3\sqrt[3]{x-1}}$ (¡Compruébelo!)

Luego, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{7}{11}$, ó, $x = -1$

Además, $f'(x)$ no existe si $x = 1$.

Los valores críticos de $f$ son $x = \dfrac{7}{11}$, $x = 1$, $x = -1$.

Como $(x+1)^2$ es positivo para todo $x \in\ [-1, 1]$ entonces para determinar cuando $f'(x) > 0$, y cuando $f'(x) < 0$, basta con analizar la expresión $\dfrac{11x-7}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Utilizamos la siguiente tabla:

| $x$ $\quad -1$ | $\frac{11}{7}$ | $1$ |
|---|---|---|
| $11x-7$ | $-$ | $+$ |
| $\sqrt[3]{x-1}$ | $-$ | $-$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

i. Como $f'(x) > 0$ para $x \in \left]-1, \frac{11}{7}\right[$ y como $f$ es continua sobre ese intervalo, entonces $f(x)$ es creciente sobre $\left]-1, \frac{11}{7}\right[$ por lo que $f(-1) \leq f(x)$ si $x \in \left[-1, \frac{11}{7}\right[$.

   Por lo tanto $f(-1) = 0$ en un valor mínimo relativo de $f$.

ii. Como $f'(x) > 0$ para $x \in \left]-1, \frac{11}{7}\right[$ y $f'(x) < 0$ para $x \in \left]\frac{11}{7}, 1\right[$, entonces $f\left(\frac{1}{7}\right) = \sqrt[3]{\frac{16}{49}}.\ \left(\frac{18}{7}\right)^3$ es un valor máximo relativo de $f$.

iii. Como $f'(x) < 0$ si $x \in \left]\frac{11}{7}, 1\right[$ y como $f$ es continua sobre $\left]\frac{11}{7}, 1\right]$ entonces f es decreciente sobre $\left]\frac{11}{7}, 1\right]$, y por tanto $f(1) \leq f(x)$ cuando $x \in \left]\frac{11}{7}, 1\right]$. Luego $f(1) = 0$ es un valor mínimo relativo de $f$.

**■ Ejemplo 3**

$$f(x) = \frac{x^3+8x}{\sqrt{x^2+4}}, \qquad x \in [-2, 2]$$

Se tiene que $f'(x) = \dfrac{x^3+8x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ (¡Compruébelo!)

Ahora, $f'(x) = 0$ si y solo si $x(x^2+8) = 0$ es decir, si $x = 0$.

Los valores críticos de f son $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$, estos últimos por ser extremos del intervalo.

Como $f'(x) = \dfrac{x(x^2+8)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, y, $x^2+4$, $x^2+8$, y, $\sqrt{x^2+4}$ son expresiones positivas para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces el signo de $f'(x)$ estará determinado por la variación de $x$.

Luego se tiene:

| $x$ $\quad -2$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

i. Como $f'(x) < 0$ para $x \in\ ]-2,0]$ y $f$ es continua en $[-2,0[$ entonces $f$ es decreciente sobre $[-2,0[$. Luego

$f(-2) \geq f(x)$ para $x \in\ [-2,0[$, y $f(-2) = \sqrt{2}$ es un máximo relativo de $f$.

ii. Como $f'(x) < 0$ para $x \in\ ]-2,0[$ y $f'(x) > 0$ para $x \in\ ]0,2[$, entonces $f(0) = 0$ es un mínimo relativo de $f$.

iii. Como $f'(x) > 0$ para $x \in\ ]0,2]$ y $f$ es continua en $]0,2]$ entonces $f$ es creciente en $]0,2]$. Luego $f(2) \geq f(x)$ para $x \in\ ]0,2]$ y $f(2) = \sqrt{2}$ es un máximo relativo de $f$.

**Ejercicios**

Hacer un estudio similar para las funciones

a.) $f(x) = x^2 - 6x^2 + 12x - 8$, b.) $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, $x \in\ [-2,2]$, c.) $h(x) = x\sqrt{5-x^2}$;$|x| < \sqrt{5}$

## 3.2 Concavidad y puntos de inflexión

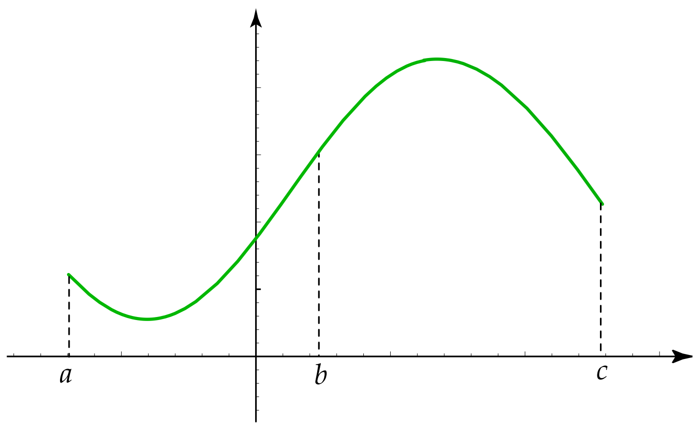
La segunda derivada de una función también proporciona información sobre el comportamiento de ésta. Para iniciar este estudio daremos la siguiente:

**Definición 1**

**(Definición de concavidad)**. Se dice que la gráfica de una función $f$ es cóncava hacia arriba en un intervalo A, $(A \subseteq D_f)$, si $f'(x)$ es creciente sobre A. Si $f'(x)$ es decreciente sobre A entonces se dice que la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo.

---

Note que es la función derivada $f'$ la que debe ser creciente o decreciente en el intervalo A. En la siguiente representación gráfica, una función $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $]a,b[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]b,c[$



**Teorema 2**

Si $f$ es una función tal que $f''(x) > 0$ cuando $x \in ]a, b[$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba sobre $]a, b[$.

**Demostración:**

Si $f''(x) > 0$ y como $f''(x) = D_x f'(x)$, entonces se tiene que $f'(x)$ es creciente sobre $]a, b[$ por lo que de acuerdo con la definición de concavidad de una función, se obtiene que $f$ es cóncava hacia arriba sobre $]a, b[$.

**Teorema 3**

Si $f$ es una función tal que $f''(x) < 0$ cuando $x \in ]a, b[$, entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo sobre $]a, b[$.

**Demostración:**

De la hipótesis: $f''(x) < 0$, y como $f''(x)_x = D_x f'(x)$, se obtiene que $f'(x)$ es decreciente sobre $]a, b[$ por lo que según la definición dada sobre concavidad, la gráfica de la función $f$ es cóncava hacia abajo sobre $]a, b[$.

**Ejemplo 4**

Ejemplifiquemos los dos teoremas anteriores utilizando la función $f$ con ecuación $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3}$

Si $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^3}{3}$ entonces $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$, y, $f''(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

Luego, $f''(x) > 0$ si $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$ y, $f''(x) < 0$ si $x \in ]0, 2[$.

Como $f''(x) = D_x f'(x)$, entonces $f'$ es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ , $]2, +\infty[$, pues en ellos $f''(x)$ es positiva. Además $f'$ es decreciente en el intervalo $]0, 2[$ pues en el $f''(x)$ es negativa.

Luego, $f$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0, 2[$.

La representación gráfica de la función $f'$ es la siguiente:

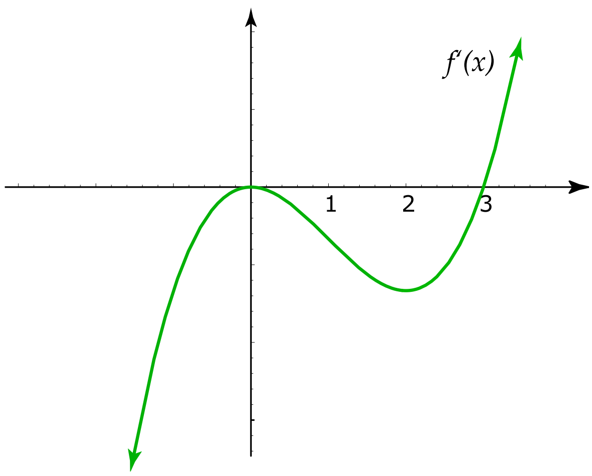



Figura 3.4: Representación gráfica de $f'$

Observe que $f'$ es creciente en $]-\infty,0[$ y $]2,+\infty[$ y decreciente en $]0,2[$.

Representación gráfica de la funcón $f$ :

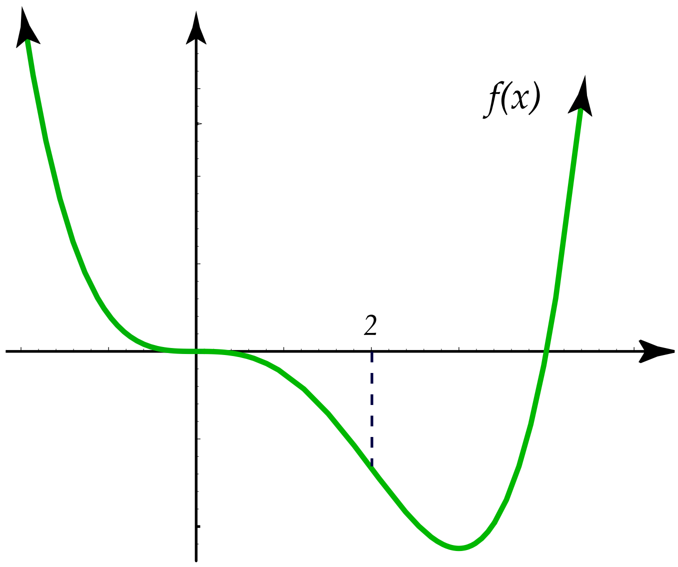



Figura 3.5: Representación gráfica de $f$

Note que $f$ es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-\infty,0[$ , $]2,+\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0,2[$.

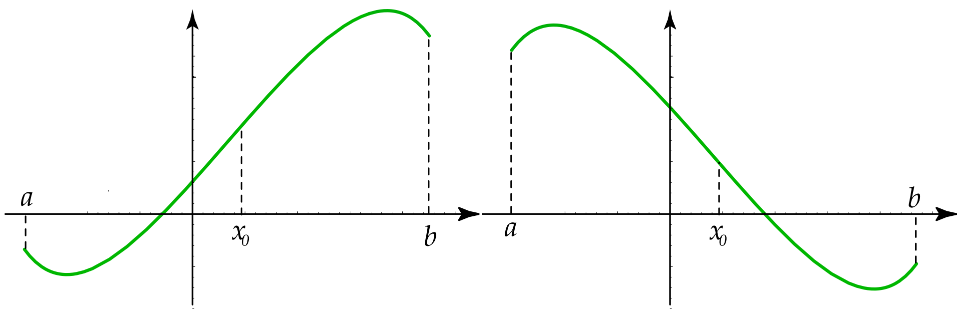
Damos ahora la:

**Definición 2**

**(Definición de punto de inflexión)**. Se dice que $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de una función $f$ , si existe un intervalo $]a,b[$ tal que $x_0 \in\ ]a,b[$, y la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba sobre $]a,x_0[$, y cóncava hacia abajo sobre $]x_0,b[$, o viceversa.

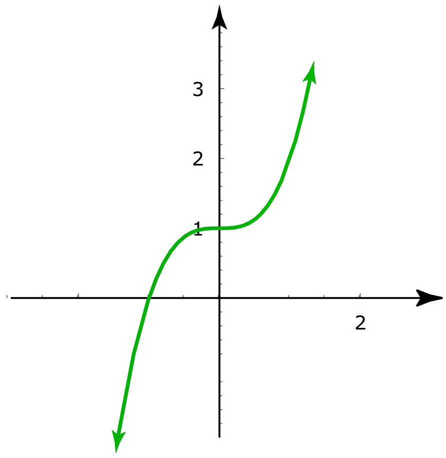
---

Podemos representar lo anterior en forma gráfica como sigue:




**Ejemplo 5**

1. El punto $(0, 1)$ es un punto de inflexión de la curva con ecuación $f(x) = x^3 + 1$, pues $f''(x) = 6x$ es positiva si $x > 0$, y negativa si $x < 0$, de donde $f$ es cóncava hacia arriba para $x > 0$, y cóncava hacia abajo para $x < 0$. Gráficamente se tiene:




2. Determinemos los puntos de inflexión de la función $f$ con ecuación $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2 + 1$ Se tiene que

   $f'(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ por lo que $f''(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

   Resolvamos las desigualdades $f''(x) > 0, f''(x) < 0$

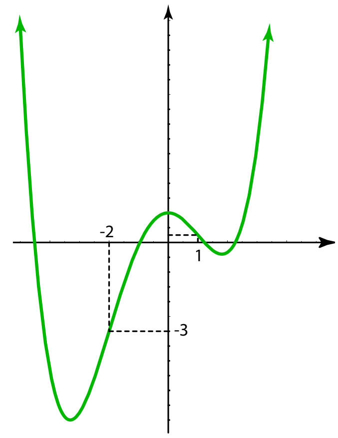
| $x$ | $-\infty \quad -2$ | $-2 \quad 1$ | $1 \quad +\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x) = (x-1)(x+2)$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |

   Como $f''(x) > 0$ si $x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]1, +\infty[$ entonces la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba en esos intervalos.

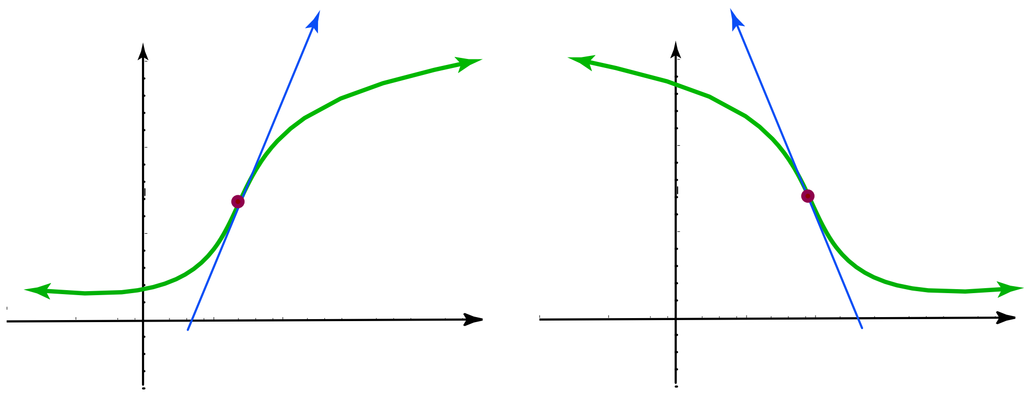
   La gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-2, 1[$ pues en él $f''(x) < 0$.

   Luego los puntos $(-2, -3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ son puntos en los que cambia la concavidad y por tanto son puntos de inflexión.

   La gráfica de la función $f$ es la siguiente:




Puede decirse que un punto de inflexión separa una parte de la curva que es cóncava hacia arriba de otra sección de la misma que es cóncava hacia abajo. En un punto de inflexión, la tangente a la curva recibe el nombre de tangente de inflexión. Gráficamente:



Observe que una parte de la curva queda sobre la tangente de inflexión, y otra parte bajo ella.

**Teorema 4**

Si $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f$ y si $f''(x_0)$ existe, entonces $f''(x_0) = 0$
Demostración: Al final del capítulo.

**Ejemplo 6**

Considere la función $f$ con ecuación $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

La segunda derivada de $f$ es $f''(x) = 6x + 2$.

Note que $f''(x) > 0$ si $x > \dfrac{-1}{3}$, y, $f''(x) < 0$ si $x < \dfrac{-1}{3}$

Luego, $f$ es cóncava hacia arriba para $x > \dfrac{-1}{3}$, y cóncava hacia abajo para $x < \dfrac{-1}{3}$

Se tiene entonces que $\left(\dfrac{-1}{3}, f\left(\dfrac{-1}{3}\right)\right)$ es un punto de inflexión. Evaluando la segunda derivada de $f$ en $x = \dfrac{-1}{3}$ resulta que $f''\left(\dfrac{-1}{3}\right) = 0$ con lo que se verifica lo expresado en el teorema anterior.

En el siguiente teorema se dan las condiciones para que un punto sea punto de inflexión.

**Teorema 5**

Si:

i. $f$ es una función continua sobre un intervalo I,

ii. $x_0$ es un punto interior de I tal que $f''(x_0) = 0$, ó $f''(x_0)$ existe, y

iii. Si existe un intervalo $]a, b[$ con $x_0 \in ]a, b[$, $(]a, b[\in\ I)$ tal que:

- $f''(x) > 0$ cuando $x \in ]a, x_0[$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in ]x_0, b[$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f$.
- $f''(x) < 0$ cuando $x \in ]a, x_0[$ y $f''(x) > 0$ cuando $x \in ]x_0, b[$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gáfica de $f$.
- $f''(x) > 0$ cuando $x \in ]a, x_0[$ y $f''(x) > 0$ cuando $x \in ]x_0, b[$, o bien, $f''(x) < 0$ cuando $x \in ]a, x_0[$ y $f''(x) < 0$ cuando $x \in ]x_0, b]$ entonces $(x_0, f(x_0))$ no es un punto de inflexión de la gráfica de $f$.

**Demostración:** Es similar a la dada para el Teorema 4, sustituyendo $f$ por $f'$, y $f'$ por $f''$.

**Ejemplo 7**

1. Sea $f$ una función con ecuación $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2 + x$ con $x \in \mathbb{R}$. Note que $f$ es una función continua en todo su dominio por ser una función polinomial. La segunda derivada de $f$ es $f''(x) = x^2 + x - 2$, que es igual a cero si y solo si $x = 1$ ó $x = -2$.

   Así $f''(-2) = f''(1) = 0$

   Observemos la solución de las desigualdades $f''(x) > 0$, y $f''(x) < 0$ por medio de la siguiente tabla:

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $-2$ | $-2$ $\quad$ $1$ | $1$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x - 1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x + 2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Como $f''(x) > 0$ para $x \in ]-\infty, -2[$ y $f''(x) < 0$ para $x \in ]-2, 1[$ entonces $(-2, f(-2))$ es un punto de inflexión según el punto 1 del Teorema 8.

De acuerdo con el punto 2 de ese mismo teorema, como $f'(x) < 0$ para $x \in ]-2, 1[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in ]1, +\infty[$, entonces $(1, f(1))$ es un punto de inflexión.

2. Consideraremos ahora la función $g$ con ecuación:

   $g(x) = \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$, con $x \geq 1$

   Como $f''(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ se tiene que $f''(x)$ nunca se hace cero y que $f''(1)$ no existe.

   Además $f''(x)$ es mayor que cero para $x \in\ ]1, +\infty[$, por lo que $f$ siempre es cóncava hacia arriba en su dominio, y por lo tanto $(1, f(1))$ no es punto de inflexión.

### 3.2.1 Criterio de la segunda derivada para establecer los valores máximos y los valores mínimos de una función

Además de proporcionar información sobre la concavidad de la gráfica de una función, la segunda derivada permite establecer si un punto crítico es un valor máximo o un valor mínimo.

El siguiente teorema se refiere a este segundo aspecto.

■ **Teorema 1**

Sea $f$ una función con dominio D.

Si $f'(x)$ está definida para $x \in\ ]a, b[$ donde $]a, b[ \subset D$ y si $f'(x_0) = 0$ con $x_0 \in\ ]a, b[$ entonces:

a. $f(x_0)$ es un valor máximo relativo de $f$ si se cumple que $f''(x_0) < 0$

b. $f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de $f$ si se cumple que $f''(x_0) > 0$

**Demostración:** Al final del capítulo.

Utilizando el teorema anterior vamos a determinar los valores máximos y los valores mínimos de las algunas funciones

■ **Ejemplo 1**

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $x \in ]-4, 2[$

Note que la función $f$ no está definida en $x = -1$

La derivada de $f$ está dada por $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

Los valores críticos de $f$ se obtienen cuando $f'(x) = 0$. En este caso, $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, ó $x = -2$.

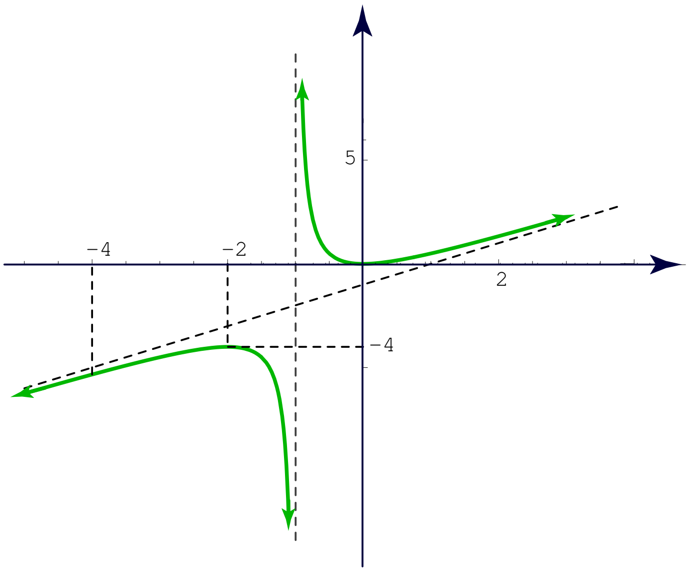
Ahora, la segunda derivada de $f$ es $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

Vamos a evaluar $f''(x)$ en $x = 0$ y en $x = -2$

a. $f''(0) = 2$; como $2 > 0$ entonces $f(0)$ es un valor mínimo relativo de $f$.

b. $f''(-2) = -2$; como $-2 < 0$ entonces $f(-2)$ es un valor máximo relativo de $f$.

Gráficamente se tiene en el intervalo $]-4, 2[$




■ **Ejemplo 2**

$g(x) = \dfrac{3}{8}(x-9)(x-1)^{5/3}$

Se tiene que $D_g = \mathbb{R}$

La primera derivada de $g$ está dada por $g'(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$

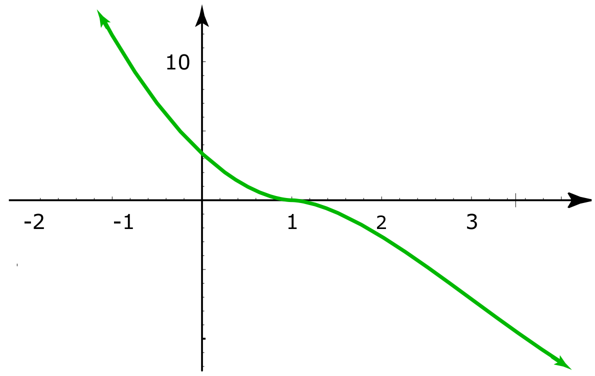
Como $g'(x) = 0$ cuando $x = 1$ y cuando $x = 6$ entonces estos son los valores críticos de $g$.

La segunda derivada de $g$ es $g''(x) = \dfrac{5(x-3)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

Evaluando $g''(x)$ en $x = 6$ se tiene que $g''(6) = \sqrt[3]{35}$ que es mayor que cero, por lo que $g(6)$ es un valor mínimo relativo de $g$.

Observe que $g''$ no puede evaluarse en $x = 1$ pues hace cero el denominador por lo que para este valor crítico debe utilizarse el criterio de la primera derivada.

Analizando $g'(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x-6)$ se obtiene que $g'(x) < 0$ para $x \in \; ]-\infty, 1[$ y $g'(x) < 0$ para $x \in \; ]1, 6[$ por lo que al no existir cambio de signo resulta que $f(1)$ no es ni máximo ni mínimo. El gráfico de $g$ se muestra a continuación.




## 3.3 Trazo de curvas

La teoría estudiada hasta ahora sobre máximos y mínimos de una función, será aplicada tanto en la resolución de problemas como en el trazo de la gráfica de una curva. Para este último aspecto nos hace falta estudiar las asíntotas de una curva, tema que veremos a continuación para pasar luego al trazo de curvas y por último a la resolución de problemas.

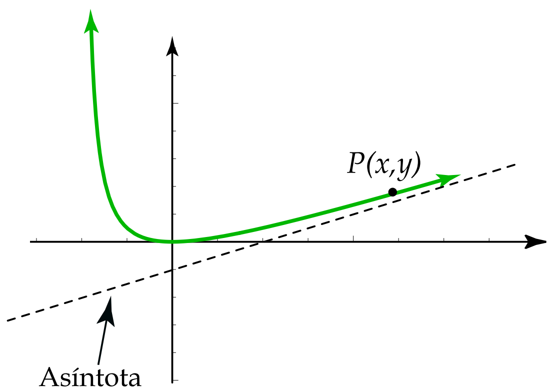
### 3.3.1 Asíntotas

Dada una curva con ecuación $y = f(x)$ es necesario estudiar la variación de la función cuando la abscisa y la ordenada de un punto cualquiera de la curva tiende al infinito.

**Definición 1**

Cuando el punto $P(x, y)$ de una curva se desplaza a lo largo de ella, de tal forma que tienda a infinito su distancia al origen, puede suceder que la distancia de $P$ a una recta fija tienda a cero. Esta recta recibe el nombre de asíntota de la curva.

Gráficamente:




**Asíntota horizontal**

**Definición 2**

Sea la función con ecuación $y = f(x)$

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ó $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces la recta con ecuación $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f$.

**Ejemplo 1**

1. Sea $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ la ecuación de una curva.

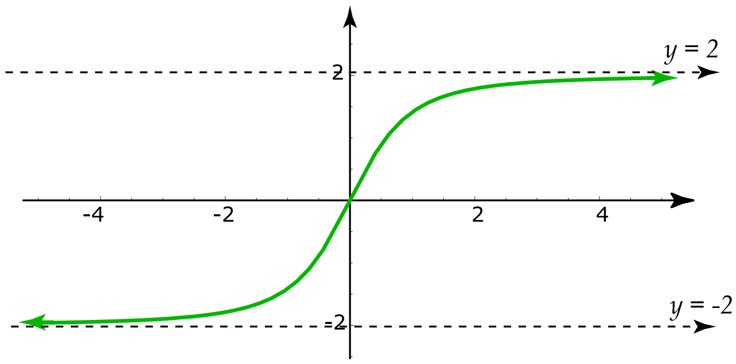
   Como: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 2$

   entonces la recta con ecuación $y = 2$ es una asíntota horizontal de la curva.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -2$

   entonces la recta con ecuación $y = -2$ es una asíntota horizontal de la curva.

Gráficamente se tiene:




**Asíntota vertical**

**Definición 3**

La recta con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función con ecuación $y = f(x)$, si se cumple alguna de las siguientes condiciones.

i. $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ iii. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ iv. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Si la recta con ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de una función $f$, entonces $f$ es discontinua en "$a$".

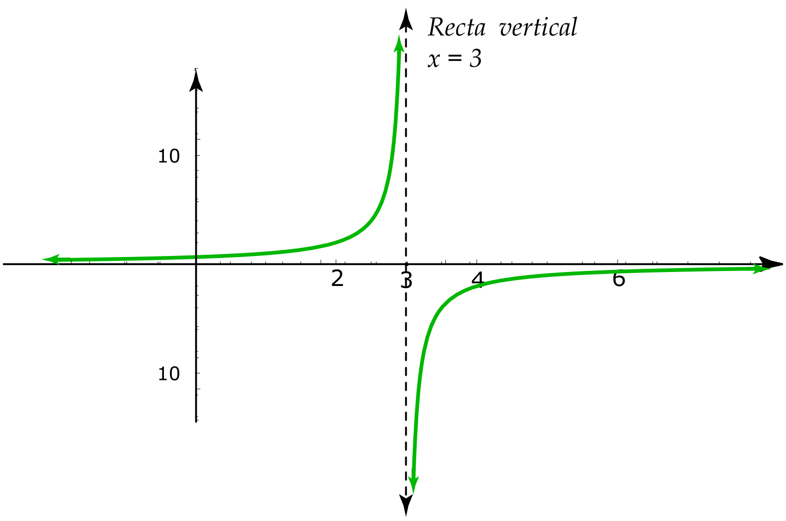
**Ejemplo 2**

Sea $y = \dfrac{2}{3 - x}$ la ecuación de una curva. Observe que el dominio es el conjunto: $\mathbb{R} - \{3\}$

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{3 - x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2}{3 - x} = +\infty$

entonces la recta con ecuación $x = 3$ es una asíntota vertical de la gráfica de la curva.

Gráficamente:




Note que la recta con ecuación $y = 0$, (eje $X$), es asíntota horizontal de la curva.

**Asíntota oblicua**

**Definición 4**

Si los límites: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - mx = b$

existen, entonces la recta con ecuación $y = mx + b$ es una asíntota oblicua.

---

■ **Ejemplo 3**

La curva con ecuación $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x} - 1$ posee asíntota oblicua pues:

a. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(4 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 4,$

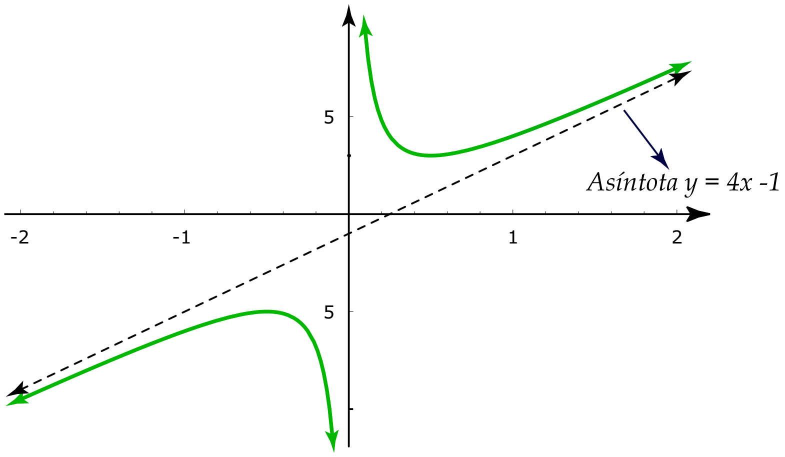
de donde $m = 4$

b. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \left(4x + \frac{1}{x} - 1 - 4x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right) = -1,$

de donde $b = -1$

Así la ecuación de la asíntota es $y = 4x - 1$

La representación gráfica es la siguiente:




Note que la recta con ecuación $x = 0$, (eje Y), es asíntota vertical de la curva.

Especificaremos ahora los pasos a seguir para hacer el análisis y la gráfica de una función $f$ cuya ecuación se da.

1. Calcular el dominio de $f$. $(D_f)$

2. Averiguar las intersecciones con los ejes coordenados.

   Si $y = f(x)$ es la ecuación de la curva, los puntos de intersección con el eje $X$ se determinan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$, los puntos de intersección con el eje $Y$ se calculan dándole a $x$ el valor cero.

3. **Sentido de variación**

   Se hace el estudio de la primera derivada.

a. Se calcula $f'(x)$

b. Para determinar los valores críticos se resuelve $f'(x) = 0$

c. Para determinar los intervalos en que $f$ crece y en los que decrece se resuelven las desigualdades $f'(x) > 0$, y, $f'(x) < 0$

4. Estudio de la segunda derivada de $f$ .

a. Se calcula $f''(x)$

b. Se determinan los puntos de inflexión resolviendo $f''(x) = 0$

c. Para determinar los intervalos en que $f$ es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo, se resuelven las desigualdades $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$

Los puntos máximos y los puntos mínimos se pueden establecer ya sea utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada.

5. Estudio de los límites

Se calculan los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ donde $a \notin D_f$

6. Estudio de las asíntotas: Se determina si la curva posee asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

7. Se hace el cuadro de variación. Este es un cuadro en el que se resume todo el análisis anterior.

8. Gráfica de la función. Con los datos señalados en el cuadro de variación se dibuja la gráfica de $f(x)$.

■ **Ejemplo 4**

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

2. **Intersección con los ejes:**

   $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$, luego $(0, 0)$ es el punto de intersección con el eje $Y$ , y con el eje $X$ .

3. **Sentido de variación:**

   i. $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

   Como $(x^2-1)^2$ es positivo para $x \in D_f$, basta con analizar el numerador.

ii. $f'(x) = 0 \iff -2x = 0 \iff x = 0$ valor crítico.

iii. $f'(x) > 0 \iff -2x > 0 \iff x < 0$; luego $f$ crece si $x \in ]-\infty, 0[$

iv. $f'(x) < 0 \iff -2x < 0 \iff x > 0$, luego $f$ decrece si $x \in ]0, +\infty[$. De i. y iv. se deduce que $f(0)$ es un máximo relativo.

4. **Estudio de la segunda derivada:**

i. $f''(x) = \dfrac{6x^2 + 2}{(x-1)^3(x+1)^3}$

ii. $f''(x) \neq 0$ para toda $x \notin D_f$

Para determinar si $f$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo se deben resolver las desigualdades $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para lo que utilizamos la siguiente tabla.

| $x$ | $-\infty$ a $-1$ | $-1$ a $1$ | $1$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x-1)^3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $(x+1)^3$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Como $f''(x) > 0$ para $x \in ]-\infty, -1[ \cup [1, +\infty[$ entonces $f$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

Como $f''(x) < 0$ para $x \in ]-1, 1[$ entonces $f$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

5. **Estudio de los límites:**

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} 1 = 1$

c. $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x > 1 \implies x - 1 > 0 \implies (x-1) \to 0^+)$

d. $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = -\infty \quad (x < 1 \implies x - 1 < 0 \implies (x-1) \to 0^-)$

e. $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x > -1 \implies x + 1 > 0 \implies (x+1) \to 0^+)$

f. $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = +\infty \quad (x < -1 \implies x + 1 < 0 \implies (x+1) \to 0^-)$

6. **Asíntota:**

De a. y b. del punto anterior, la recta con ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal.

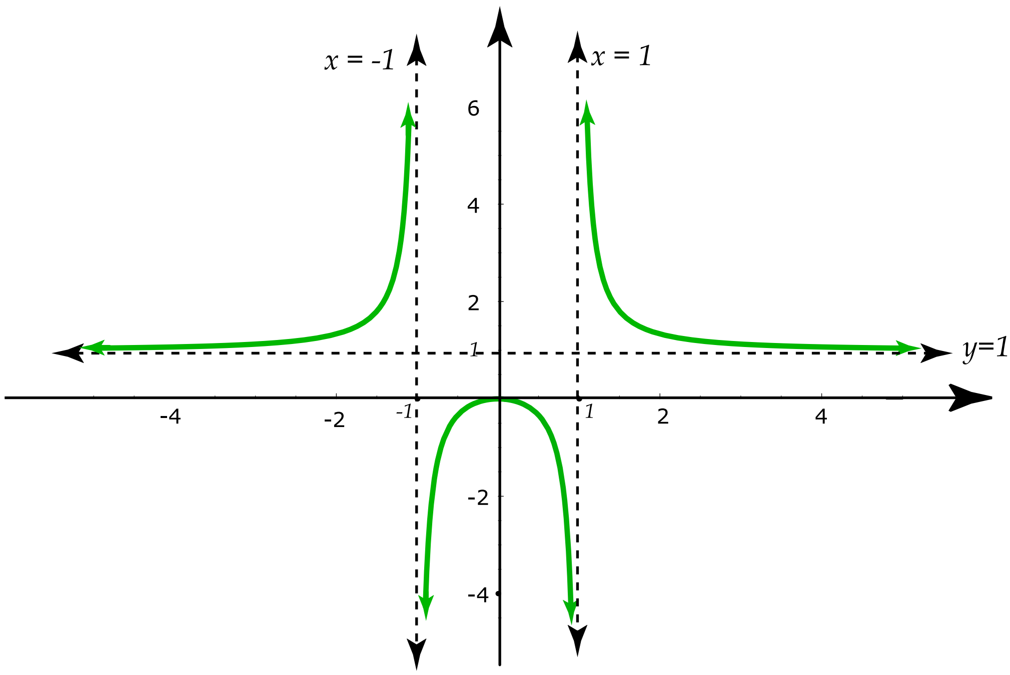
Del punto anterior también se obtiene que las rectas con ecuaciones $x = 1$, $x = -1$ son asíntotas verticales.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{3x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{6x} = 0$ pero: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 0.x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ 1 entonces la asíntota oblicua coincide con la asíntota horizontal.

7. **Cuadro de variación:** Resumen de lo estudiado

| | $-\infty$    $-1$ | $-1$    $0$ | $0$    $1$ | $1$    $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1 \nearrow \bigcup +\infty$ | $\nearrow \bigcap -\infty$ | $\searrow \bigcap -\infty$ | $\searrow \bigcup +\infty$ |

8. **Representación Gráfica:**




## ■ Ejemplo 5

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = xe^{1/x}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{0\}$

2. **Intersección con los ejes:** para que la curva interseque al eje $X$ se necesita que $f(x) = 0$, pero esto sucede únicamente si $xe^{1/x} = 0$, es decir, si $x = 0$ pero $0 \notin D_f$ por lo que no hay intersección con el eje $X$.

Para la intersección con el eje $Y$, $x$ debe ser igual a cero, pero $0 \notin D_f$, por lo que tampoco hay intersección con el eje $Y$.

3. **Sentido de variación:** Estudio de la primera derivada,

   a. $f'(x) = e^{1/x}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

   b. $f'(x) = 0 \iff x = 1$

   c. Para determinar los intervalos en que crece o decrece la función debemos resolver $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$

   Como $e^{\frac{1}{x}}$ es mayor que cero para $x \in D_f$, basta analizar el comportamiento de $\dfrac{x-1}{x}$. Para ello utilizamos el siguiente cuadro.

| | $-\infty$ a $0$ | $0$ a $1$ | $1$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

   Como $f'(x) > 0$ para $x \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$ entonces $f$ crece en ese intervalo.

   Como $f'(x) < 0$ para $x \in ]0, 1[$ entonces $f$ decrece en ese intervalo. Además en $(1, f(1))$, hay un mínimo relativo.

4. **Estudio de la segunda derivada**

   a. $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$

   b. $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x \in D_f$

   c. $f''(x) > 0 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$, luego $f$ es cóncava hacia arriba si $x > 0$

   d. $f''(x) < 0 \iff x^3 < 0 \iff x < 0$, luego $f$ es cóncava hacia abajo si $x < 0$

5. **Estudio de los límites**

   a. $\lim\limits_{x \to 0^+} x\, e^{1/x}$ (forma $0.\infty$)

   Si $x \to 0^+$ entonces $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ y $e^{1/x} \to +\infty$, por lo que:

   $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot e^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}$ (forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital)

   $$= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

   $$= \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

b. $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cdot e^{1/x} = 0$, pues si $x\to 0^-$ entonces $\dfrac{1}{x}\to -\infty$ y $e^{1/x}\to 0 \quad x\to 0^-$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot e^{1/x} = +\infty$

Si $x\to +\infty$ entonces $\dfrac{1}{x}\to 0$ y $e^{1/x}\to 1$

d. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\cdot e^{1/x} = -\infty$, pues $\dfrac{1}{x}\to 0$ y $e^{1/x}\to 1$

6. **Asíntotas**

Existe asíntota vertical dada por la recta con ecuación $x=0$, por el resultado del límite a. No hay asíntota horizontal.

**Asíntota Oblicua**

i. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ e^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$ de donde $m=1$

ii. $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ \ e^{1/x} - x = \lim\limits_{x\to +\infty} x(e^{1/x}-1)$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}$ (forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que puede aplicarse la Regla de L'Hôpital)

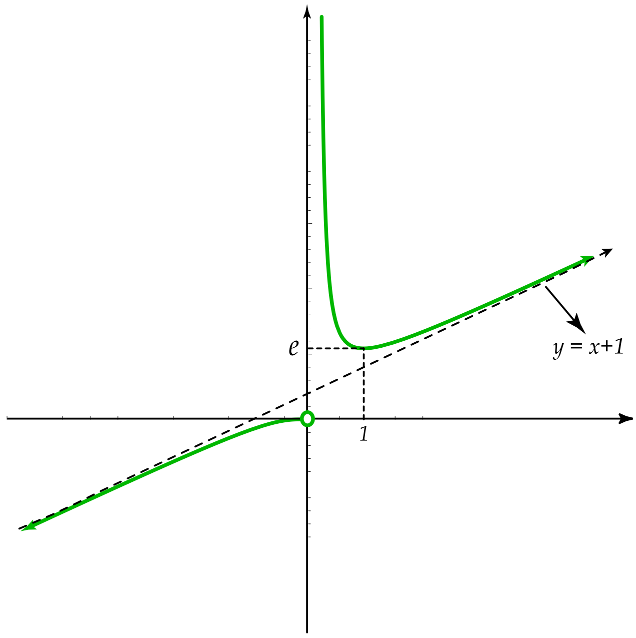
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1/x}\cdot \dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1, \text{ de donde } b=1$$

Por tanto, la recta con ecuación $y = x+1$ es una asíntota oblicua.

7. **Cuadro de variación:** Resumen de lo anterior.

| | $-\infty$ a $0$ | $0$ a $1$ | $1$ a $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow\bigcap -\infty$ | $\searrow\bigcup +\infty$ | $\nearrow\bigcup +\infty$ |

8. **Gráfica:**




## ■ Ejemplo 6

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

1. **Dominio:** $D_f : \mathbb{R} - \{0\}$
2. **Intersección con los ejes**
   a. eje $Y:$ no hay intersección, pues $x$ debe tomar el valor de cero, pero $0 \notin D_f$
   b. eje $X:$ $f(x) = 0 \iff x + \dfrac{4}{x} = 0 \iff \dfrac{x^2+4}{x} = 0$, pero $x^2 + 4 \neq 0 \;\; \forall x \in D_f$, por lo que no hay intersección con este eje.
3. **Sentido de variación: Estudio de la primera derivada**
   a. $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$
   b. $f'(x) = 0 \iff \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \iff x = 2$ ó $x = -2$, estos son los valores críticos de $f$
   c. Como:

| | $-\infty$ … $-2$ | $-2$ … $2$ | $2$ … $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Se tiene que $f'(x) > 0$ si $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$ $f'(x) < 0$ si $x \in ]-2, 2[$

Entonces $f$ es creciente si $x \in ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$ y $f$ es decreciente si $x \in ]-2, 2[$ Luego, $f(-2)$, es un valor máximo y $f(2)$ es un valor mínimo.

4. **Estudio de la segunda derivada:**

   a. $f''(x) = \dfrac{8}{x^3}$

   b. $f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \ D_f$

   c. $f''(x) > 0 \iff x^3 > 0 \iff x > 0$, entonces $f$ es cóncava hacia arriba si $x > 0$

   d. $f''(x) < 0 \iff x^3 < 0 \iff x < 0$; luego, $f$ es cóncava hacia abajo si $x < 0$

5. **Estudio de los límites:**

   a. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left( x + \frac{4}{x} \right) = +\infty$

   b. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \left( x + \frac{4}{x} \right) = -\infty$

   c. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left( x + \frac{4}{x} \right) = +\infty$

   d. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left( x + \frac{4}{x} \right) = -\infty$

6. **Asíntotas**

   De a. y b. del punto anterior se concluye que la recta con ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical. De c. y d. del punto anterior se concluye que no existe asíntota horizontal.

   **Asíntota oblicua**

   i. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left( x + \frac{4}{x} \right) \cdot \frac{1}{x}$

   $\displaystyle= \lim_{x \to +\infty} \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right) = 1$ de donde $m = 1$

   ii. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{4}{x} - x$

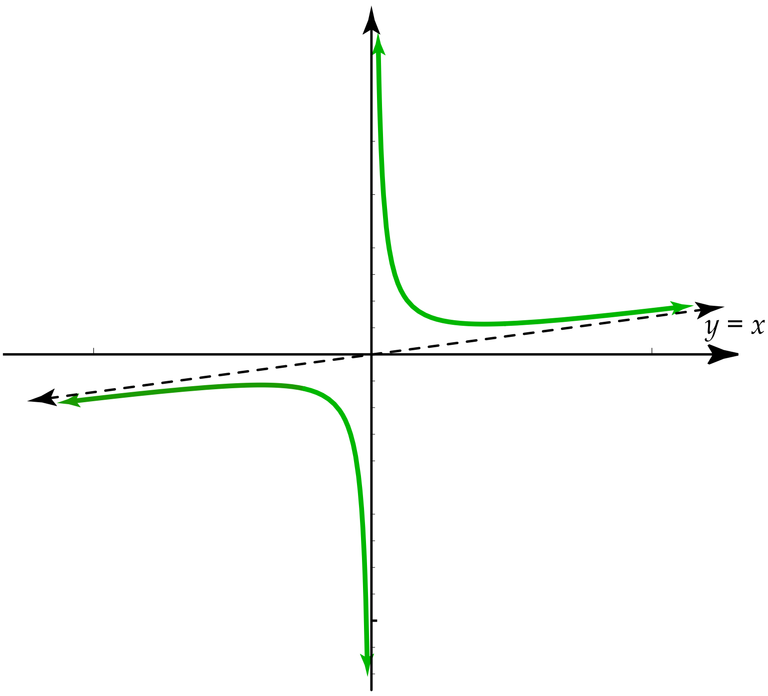
   $\displaystyle= \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$ de donde $b = 0$

   Luego, la recta con ecuación $y = x$ es una asíntota oblicua.

7. **Cuadro de variación**

| | $-\infty \qquad -2$ | $-2 \qquad 0$ | $0 \qquad 2$ | $2 \qquad +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow \bigcap -\infty$ | $\searrow \bigcap -\infty$ | $\searrow \bigcup +\infty$ | $\nearrow \bigcup +\infty$ |

8. **Gráfica**




## ■ Ejemplo 7

Hacer el análisis, cuadro de variación y gráfica de la curva con ecuación $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

1. **Dominio**

   Se necesita: $x^2 - 4 > 0$ lo cual se cumple cuando $x \in \,]-\infty, -2[\, \cup \,]2, +\infty[$

2. **Intersección con los ejes:**

   Eje $X$: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$, luego en el punto $(0,0)$ interseca al eje $X$.

Como $f(0)=0$ también en $(0,0)$ interseca al eje $Y$.

3. **Sentido de variación o estudio de la primera derivada**

   a. $f'(x) = \dfrac{x(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$ (¡Compruébelo!)

   Como $(x^2-4)^{\frac{3}{2}}$ es positivo para $x \in D_f$, *analizamos únicamente el numerador* para determinar $f'(x) > 0$ y $f'(x) < 0$

| $-\infty$ | $-\sqrt{8}$ | $0$ | $\sqrt{8}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-2\sqrt{2}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+2\sqrt{2}$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

   Como $f'(x)$ es mayor que cero para $x \in ]8,0[\, \cup\, ]8,+\infty[$ entonces $f$ es creciente en esos intervalos.

   Como $f'(x)$ es menor que cero para $x \in ]-\infty,-\sqrt{8}[\, \cup\, ]0,\sqrt{8}[$ entonces $f$ es decreciente en esos intervalos.

   Además en $(-\sqrt{8}, f(-\sqrt{8}))$ y $(\sqrt{8}, f(\sqrt{8}))$ hay dos valores mínimos relativos.

4. **Estudio de la segunda derivada**

   a. $f''(x) = \dfrac{4x^2+32}{(x^2-4)^{\frac{5}{2}}}$

   b. $f''(x) \neq 0 \;\; \forall x \in D_f$ y $f''(x) > 0 \;\; \forall x \in D_f$ por lo que $f$ siempre es cóncava hacia arriba.

5. **Estudio de los límites**

   a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = +\infty$

   $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = +\infty$

   b. $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \; x \to -2^- \implies x < -2 \implies x^2 > 4 \implies x^2-4 > 0 \implies x^2-4 \to 0^+$

   $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \; x \to 2^+ \implies x > 2 \implies x^2 > 4 \implies x^2-4 > 0 \implies x^2-4 \to 0^+$

6. **Asíntotas**

Del punto a. anterior se obtiene que no hay asíntota horizontal.

Del punto b. anterior se obtiene que $x = -2$ y $x = 2$ son las ecuaciones de asíntotas verticales.

Determinemos si existen asíntotas oblicuas:

1. a. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = 1 \text{ de donde } m = 1$$

b. $$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}(x^2 + x\sqrt{x^2-4})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}(x^2 + x\sqrt{x^2-4})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\; x^2\left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\;\left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)} = 0, \text{ de donde } b = 0.$$

La recta con ecuación $y = x$ es una asíntota oblicua.

2. a. $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = -1 \text{ de donde } m = -1$$

b. $$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} + x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2 + x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}} \cdot \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-4}}{x^2 - x\sqrt{x^2-4}}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2-4)}{\sqrt{x^2-4}\;(x^2 - x\sqrt{x^2-4})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\; x^2\left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)}$$

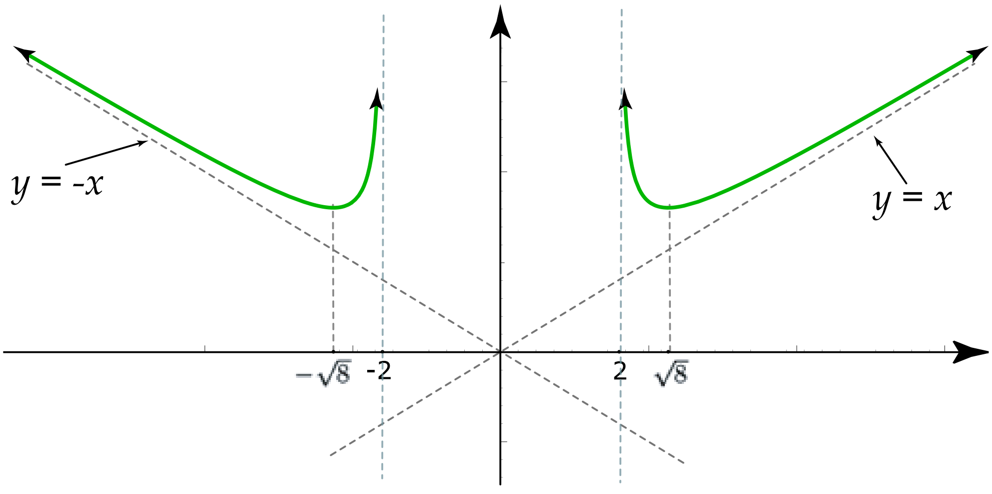
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4}{-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\;\left(1 + \sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)} = 0, \text{ de donde } b = 0.$$

Luego, la recta con ecuación $y = -x$ es otra asíntota oblicua.

7. **Cuadro de variación:**

| | $-\infty$ — $-\sqrt{8}$ | $-\sqrt{8}$ — $-2$ | $2$ — $\sqrt{8}$ | $\sqrt{8}$ — $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty \searrow \cup$ | $\nearrow \cup +\infty$ | $\searrow \cup +\infty$ | $\nearrow \cup +\infty$ |

8. **Gráfica**




## 3.4 Resolución de problemas de máximos y mínimos:

En la resolución de problemas en que se debe determinar el máximo o el mínimo de una cierta expresión, deben seguirse los siguientes pasos:

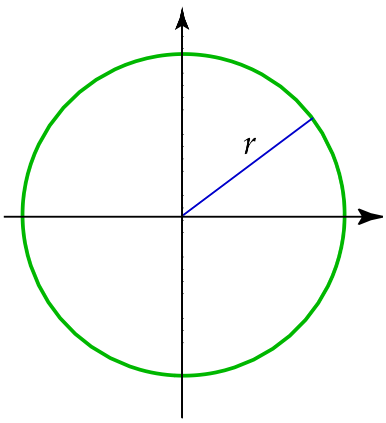
- Determinar la magnitud que debe hacerse máxima o mínima, y asignarle una letra.
- Hacer un dibujo cuando sea necesario.
- Asignar una letra a las cantidades mencionadas en el problema y escribir una ecuación en la que se establezca lo que se debe hacer máximo o mínimo.
- Establecer las condiciones auxiliares del problema y formar una ecuación (ecuación auxiliar)
- Expresar la cantidad que debe maximizarse o minimizarse en términinos de una sola variable utilizando para ello la ecuación auxiliar. Determinar el dominio de esta función.
- Obtener la primera derivada de esta función para determinar los valores críticos.

- Comprobar, utilizando el criterio de la primera derivada o el de la segunda derivada, si los valores críticos son máximos o mínimos.

- Verificar que el valor obtenido cumple las condiciones dadas en el problema.

- Responder a la pregunta establecida en el enunciado del problema.

En algunos problemas hay que utilizar diversas figuras geométricas por lo que a continuación se especifican algunas de ellas junto con las respectivas fórmulas sobre áreas y volúmenes:

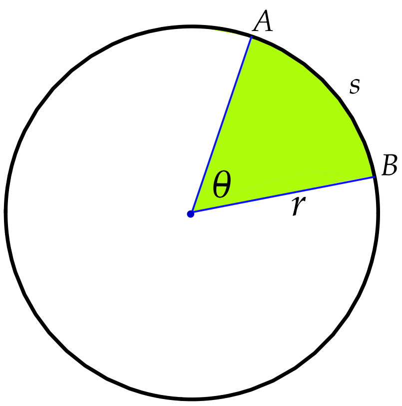



Círculo de radio $r$ con centro en $(0,0)$

Ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia: $2\pi r$

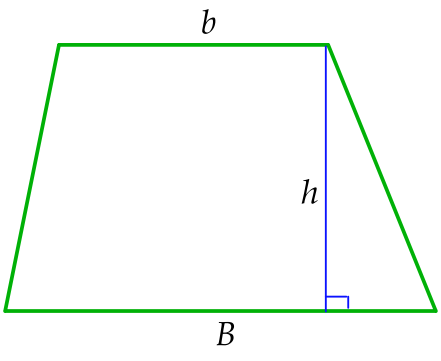
Área: $\pi r^2$




Sector circular;

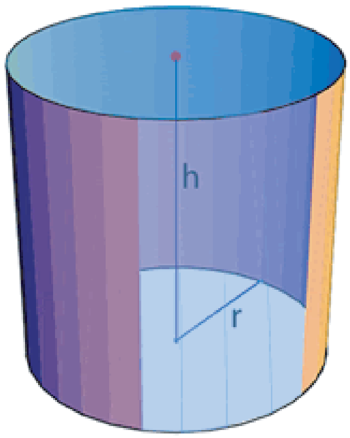
Área: $\frac{1}{2}r^2\ \theta$ donde $\theta$ es el ángulo central medio en radianes.

Área: $\frac{rs}{2}$ donde $s$ es la longitud del arco $AB$




Trapecio

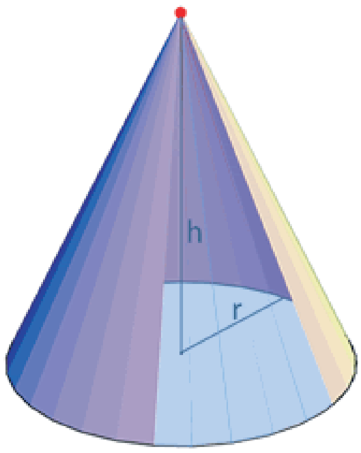
Area: $\frac{(B+b)}{2}\cdot h$, donde $B$ es la longitud de la base mayor, $b$ es la de la base menor y $h$ es la altura del trapecio.




Cilindro circular recto de altura $h$ y radio de la base $r$. Volumen: $\pi r^2 h$

Area lateral: $2\pi r h$

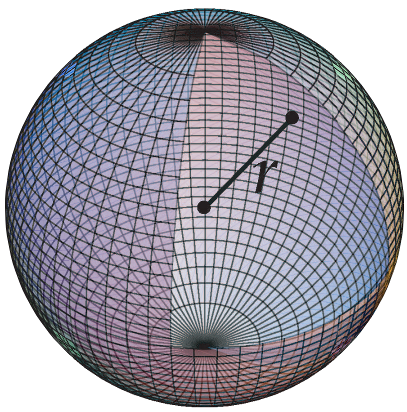
Area total: $2\pi r h + 2\pi r^2$




Cono circular recto de altura $h$ y radio de la base $r$.

Volumen: $\dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Superficie lateral: $\pi\, r\, L$ donde $L$ es la generatíz está dada por: $L = \sqrt{r^2 + h^2}$




Esfera de radio $r$.

Volumen: $\dfrac{4}{3} r^3 \pi$

Superficie: $4\pi r^2$

■ **Ejemplo 8**

Determinar dos números no negativos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.

**Solución:**

Se debe de maximizar el producto $P$ de dos números positivos.

Sean estos números: $x$, $y$

Luego $P = xy$

Como la suma de esos números es 10, entonces $x + y = 10$ es la **ecuación auxiliar**, de donde $y = 10 - x$.

Entonces: $P(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$

Se debe de determinar el valor de $x$ que hace máxima la función $P(x)$

Derivando: $P'(x) = 10 - 2x$

Valores críticos: $P'(x) = 0 \iff 10 - 2x = 0 \iff x - 5$

En $x = 5$ se tiene un valor crítico, y se debe estudiar si es un valor mínimo o un valor máximo.

Como $P''(x) = -2$ entonces $P''(x) = -2 < 0$ por lo que en $x = 5$ se tiene un valor máximo.

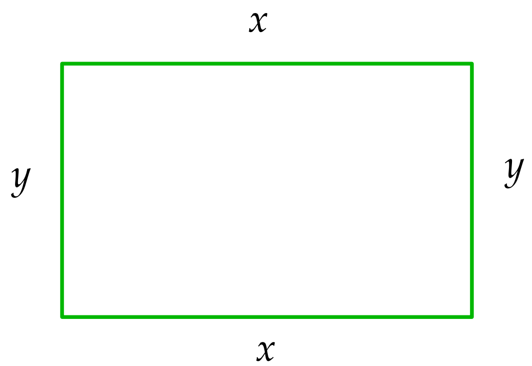
Si $x = 5$ entonces $y = 10 - 5 = 5$. Luego, los números positivos cuyo producto es máximo y cuya suma es 10 son ambos iguales a 5.

## ■ Ejemplo 9

Un rectángulo tiene 120 m. de perímetro. ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que dan el área máxima?

**Solución:**

Se debe maximizar el área $A$ de un rectángulo:




Designemos con "$x$","$y$" las longitudes de los lados del rectángulo.

Luego $A = xy$

Como el perímetro del rectángulo es 120 m. entonces la ecuación auxiliar es: $2x+2y = 120$ de donde $y = 60-x$.

Luego $A(x) = x(60 - x) = 60x - x^2$

Como $A'(x) = 60 - 2x$ y $A'(x) = 0 \iff x = 30$ entonces $x = 30$ es un valor crítico.

Analicemos si este valor es máximo o mínimo utilizando el criterio de la segunda derivada.

Como $A''(x) = -2x$ y $A''(30) = -2(30) = -60 < 0$, entonces $x = 30$ es un valor máximo.

Si $x = 30$ entonces $y = 30$ por lo que un cuadrado de lado 30 es el rectángulo de mayor área y perímetro 120m.

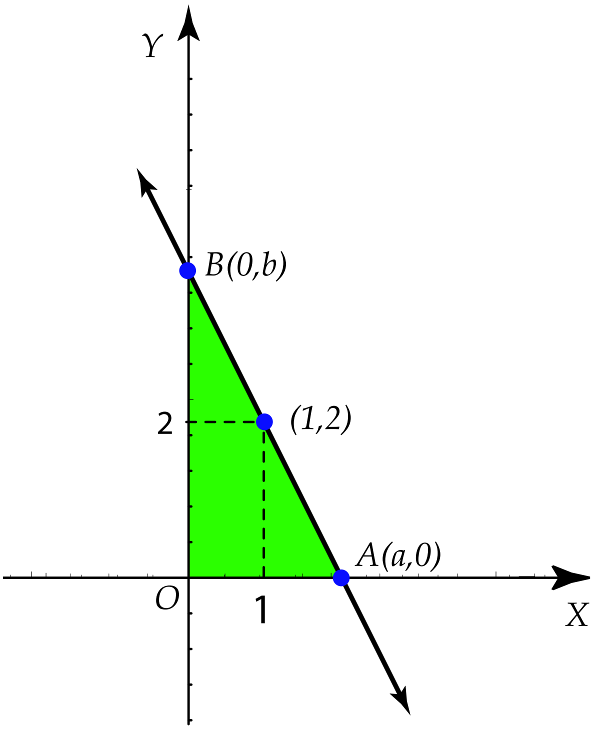
## ■ Ejemplo 10

Una recta variable que pasa por el punto $(1, 2)$ corta al eje $X$ en $A(a, 0)$ y al eje Y en $B(0, b)$. Hallar el área del triángulo $AOB$ de superficie mínima, suponiendo $A$ y $B$ positivos.

**Solución:**

Se debe minimizar el área $T$ de un triángulo.

Gráficamente se tiene:




El triángulo es rectángulo y su área está dada por $T = \frac{ab}{2}$

La recta pasa por los puntos $(0,b)$,$(1,2)$ y $(a,0)$, por lo que la pendiente está dada como sigue:

i. Tomando $(0,b)$ y $(1,2)$: $m = \frac{2-b}{1-0} = 2-b$

ii. Tomando $(1,2)$ y $(a,0)$: $m = \frac{2-0}{1-a} = \frac{2}{1-a}$

Luego: $2-b = \frac{2}{1-a}$ es <u>la ecuación auxiliar</u>, de donde $b = 2 - \frac{2}{1-a}$ (*)

Entonces $T(a) = \frac{a}{2}(2 - \frac{2}{1-a}) = a - \frac{a}{1-a} = \frac{a-a^2-a}{1-a} = \frac{-a^2}{1-a} = \frac{-a^2}{-(a-1)}$

$T(a) = \frac{a^2}{a-1}$, $a \neq 1$

Como $T'(a) = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2} = \frac{a(a-2)}{(a-1)^2}$ entonces

$T'(a) = 0 \iff a(a-2) = 0 \iff a = 0$ ó $a = 2$

Determinemos, utilizando el criterio de la primera derivada si los valores críticos son máximos o mínimos:

| $a$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $+$ | $+$ | |
| $a-2$ | $-$ | $+$ | |
| $T'(a)$ | $-$ | $+$ | |
| $T(a)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | |

Del cuadro anterior, como $T$ decrece para $a \in ]0,2[$ y crece para $a \in ]2,+\infty[$ entonces en $a = 2$ se tiene un valor mínimo.

Si $a = 2$ entonces $b = 4$ (al sustituir en (*))

Luego el área del triángulo es $T = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4$

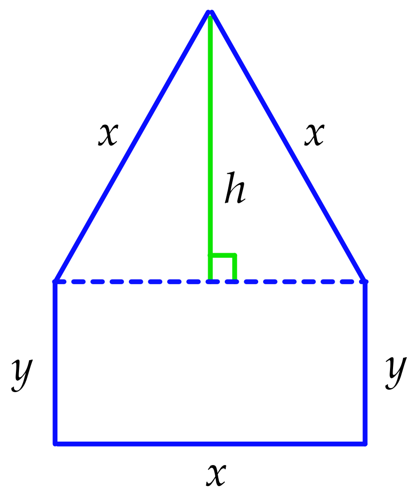
Además, la ecuación de la recta es $y = -2x + 4$

### Ejemplo 11

Una ventana tiene forma de rectángulo, culminando en la parte superior con un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es de 3 metros. ¿Cuál debe ser la longitud de la base del rectángulo para que la ventana tenga el área máxima?

**Solución:**

En este caso se debe maximizar el área de la siguiente figura geométrica:




Se han señalado con las letras "$x$" y "$y$" las longitudes de los lados de la ventana.

El área de la ventana está dada por la suma de las áreas del triángulo y del rectángulo.

Area del triángulo: $\dfrac{x \cdot h}{2}$

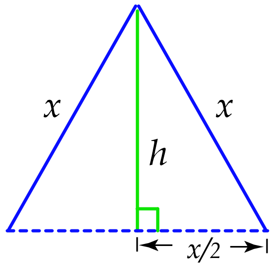
Area del rectángulo: $xy$

Area total: $A = xy + \dfrac{xh}{2}$

Como el perímetro de la ventana es 3 metros entonces: $2y+3x = 3$ de donde $y = \dfrac{3-3x}{2}$ es una <u>ecuación auxiliar</u>.

Luego: $A = x(\frac{3-3x}{2}) + \frac{xh}{2}$. Debemos escribir $h$ también en términos de $x$.

Se tiene en el triángulo:




$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}x}{2}, h > 0$$

Luego: $A(x) = \frac{1}{2}(3x - 3x^2) + \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$A(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ Determinamos los valores críticos $A'(x) = \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Luego: $A'(x) = 0 \iff \frac{3}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$

$$\iff \frac{3}{2} + x\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right) = 0$$

$$\iff x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 3} \iff x = \frac{3}{6 - \sqrt{3}}$$

El valor crítico es $x = \frac{3}{6-\sqrt{3}}$

Utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene que

$A''(x) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$, y , $A''\left(\frac{3}{6-\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 < 0$

de donde $x = \frac{3}{6-\sqrt{3}}$ es un valor máximo.

Luego, la longitud de la base del rectángulo debe ser $\frac{3}{6-\sqrt{3}}$ para que la ventana tenga el área máxima.

La altura del rectángulo debe ser: $\frac{9-\sqrt{3}}{12-2\sqrt{3}}$ y el lado del triángulo es $\frac{3}{6-\sqrt{3}}$.

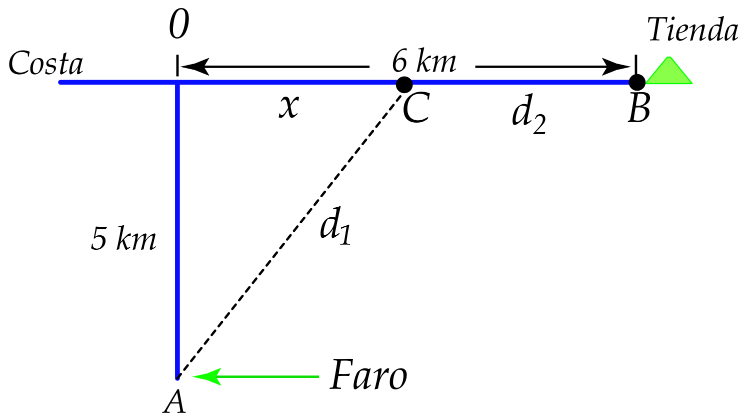
## ■ Ejemplo 12

Un faro se encuentra ubicado en un punto $A$, situado a 5 km del punto más cercano $O$ de una costa recta. En un punto $B$, también en la costa y a 6 km de $O$, hay una tienda. Si el guarda faros puede remar a $2km/h$, y puede cambiar a $4km/h$, ¿Dónde debe desembarcar en la costa, para ir del faro a la tienda en el menor tiempo posible?

**Solución:**

Se debe minimizar el tiempo de recorrido

Gráficamente la situación es la siguiente:




Sea $C$ el punto de la playa en el que desemboca el guarda faros, designemos con $x$ la distancia $OC$.

$d_1$ es la distancia en que debe remar desde $A$ hasta $C$

$d_2$ es la distancia en que debe caminar desde $C$ hasta $B$

Note que $d_1 = \sqrt{25 + x^2}$ y $d_2 = 6 - x$

Además se tiene que la distancia $S$ recorrida en un tiempo $t$ es igual a la velocidad por el tiempo: o sea;

$S = v \cdot t$ de donde $t = \dfrac{s}{v}$.

La distancia $d_1$ es recorrida con una velocidad de $2km/h$, y la distancia $d_2$ con una velocidad de $4km/h$, por lo que el tiempo total de recorrido será:

$t = \dfrac{d_1}{2} + \dfrac{d_2}{4} = \dfrac{\sqrt{25 + x^2}}{2} + \dfrac{6 - x}{4}$ siendo esta la función a minimizar.

Luego: $t'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{25 + x^2}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{4x - \sqrt{25 + x^2}}{4\sqrt{25 + x^2}}$

Para determinar los valores críticos hacemos $t'(x) = 0$

$t'(x) = 0 \iff 4x - \sqrt{25 + x^2} = 0 \iff 16x^2 = 25 + x^2$

$\iff 15x^2 = 25 \iff x^2 = \dfrac{5}{3} \iff x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Utilicemos el criterio de la segunda derivada para determinar si el valor crítico es un mínimo.

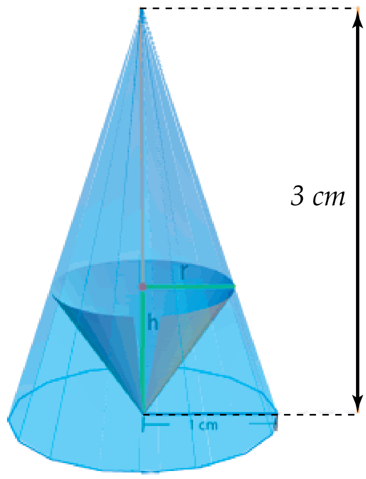
$t''(x) = \dfrac{25}{(25+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, evaluando en $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ se obtiene

$t''\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right) = \dfrac{25}{\left(\dfrac{80}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$ por lo que $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ es un valor mínimo.

Luego, el guarda faros debe desembarcar en un punto $C$ que está a $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ km de punto C, para llegar a la tienda en el menor tiempo posible.

## ■ Ejemplo 13

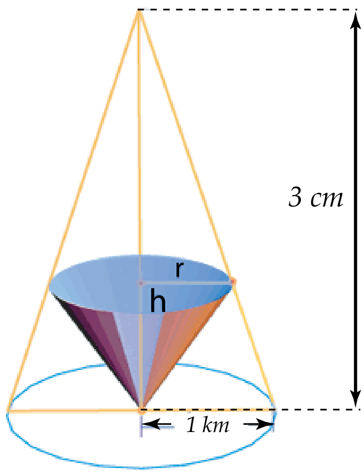
Determinar las dimensiones del cono de mayor área lateral que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1cm y altura 3cm, como se muestra en la figura siguiente:



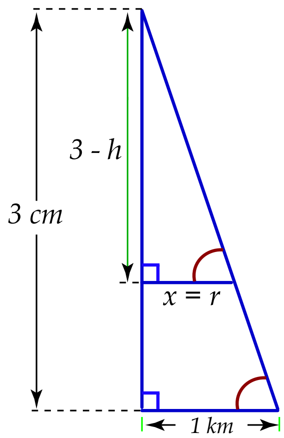

**Solución:**

Hay que maximizar el área lateral del cono inscrito.

Las dimensiones de éste son: $x$ radio de la base, $h$ altura y se especifican en la figura de la siguiente manera:




El área lateral del cono está dada por $A = \pi x L$ Una ecuación auxiliar se puede obtener por medio de semejanza de triángulos de la siguiente forma:




Además $L = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{(3 - 3x)^2 + x^2} = \sqrt{10x^2 - 18x + 9}$

Sustituyendo en la ecuación del área lateral $A = \pi x L = x\sqrt{10x^2 - 18x + 9}$

Determinemos los puntos críticos:

$A'(x) = \pi\sqrt{10x^2 - 18x + 9} + \dfrac{\pi x(10x - 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$

$A'(x) = \dfrac{\pi(20x^2 - 27x + 9)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}} = \dfrac{\pi(4x - 3)(5x - 3)}{\sqrt{10x^2 - 18x + 9}}$

$A'(x) = 0 \iff (4x - 3)(5x - 3) = 0 \iff x = \dfrac{3}{4}$, ó $x = \dfrac{3}{5}$

Por lo tanto, los valores críticos son $x = \dfrac{3}{4}$ y $x = \dfrac{3}{5}$

Determinemos cuál de esos valores es un valor máximo utilizando el criterio de la primera derivada.

$$-\infty \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{3}{4} \qquad +\infty$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $4x-3$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $5x-3$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $A'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $A(x)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Como $A(x)$ crece para $x \in \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$ y decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ entonces $x = \frac{3}{5}$ es un valor máximo.

Como $A(x)$ decrece para $x \in \left]\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right[$ y crece para $x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[$ entonces $x = \frac{3}{4}$ es un valor mínimo.

Luego el valor que nos interesa es $x = \frac{3}{5}$

Por lo tanto, el radio de la base del cono inscrito es $x = \frac{3}{5}$ cm, y la altura es $h = \frac{6}{5}$cm.

### Ejemplo 14

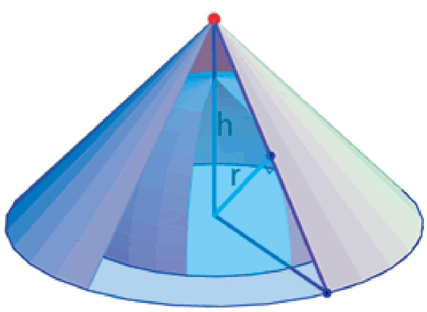
Determinar las dimensiones del cono de volumen mínimo circunscrito a una semiesfera de radio R, de tal forma que el plano de la base del cono coincida con el de la semiesfera.

**Solución:**

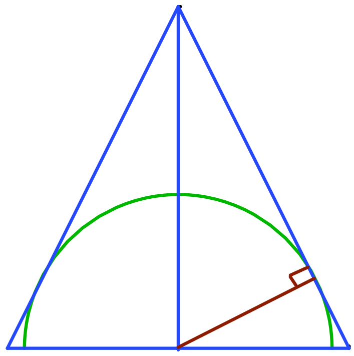
Hay que minimizar el volumen del cono circunscrito.

Si el radio de la base del cono es $x$ y su altura es h, su volumen está dado por: $V = \frac{\pi}{3}x^2h$

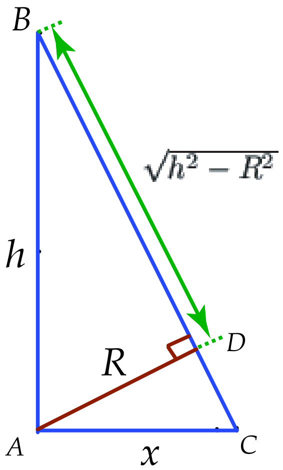
Gráficamente se tiene:




Haciendo un corte transversal se tiene:



Podemos utilizar semejanza de triángulo para obtener una ecuación auxiliar:




$\triangle ABC \sim \triangle ABD$

$\dfrac{R}{x} = \dfrac{\sqrt{h^2-R^2}}{h}$

de donde $x = \dfrac{hR}{\sqrt{h^2-R^2}}$

Sustituyendo en la ecuación del volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3}x^2h = \frac{\pi}{3}\frac{hR^2}{\sqrt{h^2-R^2}} \cdot h = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2-R^2}$$

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h^2-3R^2)}{(h^2-R^2)^2} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot \frac{h^2(h-\sqrt{3}R)(h+\sqrt{3}R)}{(h^2-R^2)^2}$$

Utilizando el criterio de la primera derivada, analicemos cuál valor crítico corresponde a un valor mínimo:

| $h$ | $-\infty$ ... $-\sqrt{3}R$ | $-\sqrt{3}R$ ... $0$ | $0$ ... $\sqrt{3}R$ | $\sqrt{3}R$ ... $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $h-\sqrt{3}R$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $h+\sqrt{3}R$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $V'(h)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $V(h)$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

Como $V(h)$ decrece para $x \in ]0, \sqrt{3}R[$ y crece para $x \in ]\sqrt{3}R, +\infty[$ entonces $h = \sqrt{3}R$ corresponde a un valor mínimo que era lo que nos interesaba. Luego, las dimensiones del cono circunscrito a la esfera son: radio de la base $x = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ y altura $h = \sqrt{3}R$