Contenido

INTRODUCCIÓN

Los números complejos

El tema de los Números Complejos, a pesar de ser tan interesante por integrar la trigonometría, el álgebra y la geometría, es muy poco estudiado. Para muchos docentes, la finalidad de los números complejos está en poder calcular las raíces enésimas de la unidad. En los cursos de álgebra de la Universidad, apenas se esbozan algunas de sus propiedades más importantes, dejando de lado aspectos geométricos tan importantes como el estudio de las transformaciones y los movimientos del plano.

El poder de cálculo que se esconde detrás de los complejos, es algo mágico. Con un mínimo de esfuerzo, podemos derivar identidades y fórmulas trigonométricas que requieren de un trabajo tedioso y agotador, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de la matemática, como el de función, límites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano.

En el presente, se tratan los aspectos históricos más importantes sobre los números complejos, que considero son fundamentales para cualquier desarrollo didáctico de este tema dentro del aula y espero que sirva para motivar a los docentes y estudiantes hacia el estudio de este y otros temas que puedan surgir a partir de éste. Además, también espero que resuelva esa inquietud que surge en los estudiantes: ¿Por qué los números complejos? ¿De dónde surgen? ¿Por qué se llaman complejos o imaginarios? ¿Para qué sirven?

1. Un poco de historia: los inicios del álgebra

Muchos conceptos en matemáticas tardaron varios años y hasta siglos en desarrollarse, desde el momento en que fueron descubiertos por primera vez, por alguna mente brillante, hasta la formalización de los mismos. El avance en el tiempo de la matemática fue un proceso lento, debido al carácter formal de esta ciencia: una de sus reglas es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado por toda la comunidad. Así pues, muchas ideas incompletas quedaron relegadas a la oscuridad y el olvido por no encajar en el sistema de razonamiento de la época, como fue el caso de los números complejos.

Fue en Italia, durante el periodo del renacimiento, cuando por vez primera los algebristas se dedican a investigar seriamente estos números y penetran el halo misterioso en que se hallaban envueltos desde la antigüedad. Los complejos aparecen inicialmente en el libro *Ars Magna* de *Girolamo Cardano*, publicado en 1545. Pero ¿Cómo surge la idea de usar estos números? ¿Porqué no aparecieron antes? ¿Quién era *Cardano*? Trataremos de contestar a estas interrogantes remontándonos a los orígenes del álgebra.

Podemos decir que los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las matemáticas, pero fueron ignorados sistemáticamente, por su carácter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar. Aparecen entre las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, que generan raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo la ecuación:

$$x^2 + x + 5 = 0$$

no tiene soluciones reales. Si empleamos la conocida fórmula de resolución de una ecuación de segundo grado, nos encontraremos con la raíz cuadrada de -19. Los matemáticos griegos, que conocían los métodos geométricos de resolución, consideraban este tipo de problemas irresolubles. Es completamente incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debido a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, pues los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas, como veremos mas adelante.

Recordemos que los griegos rechazaron el uso de los números negativos, por la falta de un equivalente dentro de la geometría. Para ellos, todo número representaba la longitud de un segmento o el área de una figura plana. La geometría era considerada entonces como el corazón de toda la matemática y esto, por supuesto, retardó considerablemente el desarrollo de los sistemas numéricos.

Con el surgimiento del álgebra durante la Edad Media, el concepto de número se amplía, para poder manipular las ecuaciones, desligadas ya de la influencia dominante de la geometría. El algebrista se va a mover en un mundo pleno de libertad e imaginación donde las ecuaciones y fórmulas serán el semillero de las grandes ideas que darían impulso a la matemática. Los números, de ahora en adelante, quedarán libres de sus equivalentes geométricos.

La palabra álgebra se deriva del vocablo árabe ***al-jabr*** que quiere decir restaurar. ¿Qué tiene esto que ver con la matemática? Cuando se tiene una ecuación, como por ejemplo:

$$2x + 3 = 5$$

entonces quitamos y ponemos símbolos a los lados para resolverla. Esta es la forma de operar del algebrista. Pero no solo los algebristas operan: también los doctores lo hacen. En la medicina antigua el término álgebra se usaba para designar las operaciones de los huesos. Así pues, un algebrista era un matemático o bien un doctor que colocaba los huesos partidos en su sitio. Álgebra es el arte de restituir a su lugar los huesos dislocados, según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

Dejemos los huesos por el momento y volvamos a la médula del problema. ¿Quienes descubrieron el álgebra? Se puede considerar al matemático árabe ***Al-Khwarizmi*** como el padre de esta disciplina. El fue el autor de un libro, llamado ***al-jabr***, publicado en el año 830 d.c., primer libro de álgebra, de gran influencia en toda Europa, donde se recogían todas las técnicas conocidas hasta entonces sobre la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. Dichas técnicas habían sido expuestas con anterioridad, en una obra del matemático hindú *Brahmagupta* en el 628 d.c. Como se sabe, los matemáticos árabes se encargaron de difundir las matemáticas de los griegos, mesopotámicos e hindúes en toda Europa, a través de España.

1.1 Cardano

La vida del matemático italiano *Girolamo Cardano* esta llena de historias, situaciones y aventuras tan interesantes que bien pueden servir de guión para una película o novela. Fue un destacado matemático, así como también médico, filósofo, astrónomo y teólogo. Su padre, Fazio Cardano, fue un abogado que trabajaba en la ciudad de Milán y se dedicaba a las matemáticas en sus horas libres. Tuvo cierta destreza en la ciencia de los números pues enseñó geometría en la *Universidad de Pavia* y *Milán*. Fazio fue asesor del célebre pintor Leonardo da Vinci en cuestiones de geometría. Cuando *Cardano* estaba a punto de nacer, una epidemia de peste azotó a Milán y sus padres se trasladaron a Pavia. Alli nació *Girolamo* el 24 de Septiembre de 1501, como hijo ilegítimo de Fazio y Chiara Micheria.

Cardano entra a la Universidad de Pavia a estudiar medicina, en contra del deseo de su padre de seguir la profesión de abogado. Más tarde se cambia a la Universidad de Padua, donde se gradúa de médico. Después de recibir el titulo de Doctor en Medicina se dedica a ejercer su profesión, pero también al juego de cartas, dados y ajedrez. *Cardano* fue un jugador empedernido durante toda su vida. Su adicción por el juego lo llevó a estudiar y desarrollar muchas técnicas de la teoría de las probabilidades y las aplicó en forma bastante exitosa logrando hacer una fortuna como jugador. El lado oscuro de esta realidad feliz, es que su vida fue muy atormentada por las vicisitudes del juego, que lo llevó por los senderos más bajos y ruines de la vida. En una ocasión alguien le hizo trampas y entonces sacó una navaja y le cortó la cara a su oponente.

Su fama de buen médico, por otra parte, fue creciendo como la espuma, debido a sus curaciones casi milagrosas y su profundo conocimiento en la diagnosis de las enfermedades. Sin embargo el Colegio de Médicos de Milán no quería recibirlo en su seno, debido a su carácter arisco y pendenciero y además por ser un hijo natural. Después de varios intentos de ingreso, por parte de *Cardano*, finalmente fue aceptado en 1537. Una vez estabilizada su posición, le quedaba tiempo libre para dedicarse seriamente a las matemáticas.

En el año de 1539, *Cardano* conoce al célebre matemático *Tartaglia*, lo cual fue un hecho crucial en su vida, pues desde ese momento comienza a interesarse en las ecuaciones cúbicas. *Tartaglia* era un matemático de reconocida fama y prestigio, entre otras cosas, por haber ganado concursos sobre la resolución de ecuaciones, usando métodos secretos. Aparte de poseer estas habilidades, *Tartaglia* fue un experto en el estudio de las trayectorias de los proyectiles. El descubrió que la máxima trayectoria se obtiene cuando el ángulo de disparo es igual a 45°. También se debe a *Tartaglia* la primera traducción de los Elementos de Euclides al italiano.

Tartaglia le enseño a *Cardano* sus trucos y técnicas secretas para el manejo de las ecuaciones, no sin antes hacerle prestar un juramento de no revelar a nadie dichos secretos. En 1545, *Cardano* publica su obra ***Ars Magna***, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. *Tartaglia* monta en cólera y acusa a *Cardano* de traidor y deshonesto, por haber faltado a su juramento.

Sin embargo, un joven matemático de apenas 18 de edad, *Lodovico Ferrari*, quien a la sazón era sirviente de *Cardano*, sale en defensa de su protector diciendo que el estuvo presente la noche de la reunión entre los dos matemáticos y no hubo ningún juramento. En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica, había sido descubierta mucho antes por el matemático

Scipione del Ferro, quien publicó un pequeño libro, que en alguna oportunidad fue consultado por *Cardano*. Luego *Cardano* quedaba libre de toda culpa.

En su *Ars Magna*, *Cardano* reconoce a *Al-Khwarizmi* como el padre del álgebra. El libro, que vio a la luz varias ediciones, fue un clásico de la matemática y contribuyó de manera decisiva al desarrollo del álgebra. En aquella obra aparecen muchos resultados originales, como el método para eliminar la x^2 en una ecuación cúbica, conocido como el *método de Cardano*. También desarrolló un método para resolver ecuaciones diferenciales, llamado método de las proporcionales.

Cardano hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios aunque con mucha cautela. En una nueva edición de su libro, en 1570, *Cardano* se adentra un poco más en el misterio de estos números y da algunas reglas para manipularlos.

Por ejemplo, la expresión:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-\left(-15\right)=40$$

Fueron entre las soluciones a la ecuación cúbica en el libro de *Cardano* donde se dio el nacimiento de los números complejos, como algo digno de ser estudiado por los matemáticos. En particular, para la ecuación:

$$x^3 = 3px + 2q \qquad (1.1)$$

Cardano nos da lo fórmula:

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2+p^3}} \qquad (1.2)$$

Conocida como la **Fórmula de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano**.

1.3. Bombelli

La matemática ha evolucionado en el transcurso del tiempo de la forma más inesperada. De repente alguien hace una pequeña observación sobre un detalle, inadvertido para la gran mayoría, en alguna fórmula o relación muy conocida, y esto puede tener consecuencias imprevisibles, planteando nuevas situaciones, generando un mar de preguntas sin respuestas e inclusive, abriendo nuevas áreas de estudio. Tal es el caso de las dudas de ***Rafael Bombelli***, sobre la ecuación cúbica. Por ejemplo, la ecuación:

$$x^3 = 6x + 6$$

se resuelve usando la fórmula (1.2)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3+\sqrt{9-8}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{9-8}} \\ &= \sqrt[3]{3+1} + \sqrt[3]{3-1} \end{aligned}$$

La solución parece un poco compleja, sin embargo, se sabe por métodos de cálculo que la ecuación tiene una raíz real entre 2 y 3, la cual es, aproximadamente $x \cong 2.8473$. Nos preguntamos entonces ¿Cómo es posible que una expresión de números complejos nos de un resultado real? ¿Quién era *Bombelli*? ¿Hasta cuando iría a durar la prolongada infancia de los números complejos en las manos de los algebristas italianos?

Rafael Bombelli nace en enero de 1526 en Bolonia, siendo su padre *Antonio Mazzoli*, un comerciante en lanas. *Bombelli* no recibió una educación formal como *Cardano,* pero desde muy joven sintió una atracción muy especial hacia las matemáticas. Recibió las primeras lecciones de matemáticas de *Pier Francesco Clementi*, un arquitecto e ingeniero. Por esta razón, *Bombelli* se dedica a la ingeniería, siguiendo a su maestro en las obras de ingeniería hidráulica que realizaba por toda Italia, secando pantanos y reparando puentes.

Bombelli conocía bien los trabajos sobre ecuaciones cúbicas de *Cardano*, pues había leído el *Ars Magna*. Consideraba aquel libro como el más interesante de todos los escritos sobre álgebra, hasta el momento. Sin embargo pensó que algunas cosas estaban todavía algo confusas y que se podían hacer mucho más comprensibles para el gran público.

Estando en la región de Val de Chiana, haciendo un trabajo de agrimensuría, debió pasar muchos ratos de ocio, pues las obras fueron suspendidas debido a una reclamación. Para utilizar este tiempo libre, *Bombelli* comienza a escribir un libro de álgebra en 1557. La idea era bastante ambiciosa: publicar una obra monumental en cinco volúmenes en donde se trataran tópicos de aritmética, resolución de ecuaciones, problemas de aplicaciones y los números complejos. Lamentablemente, solo pudo completar tres volúmenes de ***L'Algebra***, publicados en 1572, unos meses antes de su muerte.

Bombelli puede ser llamado con todo derecho, el padre de los números complejos, pues fue el primero que desarrolló el álgebra formal para trabajar con las expresiones de la forma $a + b\sqrt{-1}$. Hemos visto que en la fórmula de *del Ferro-Tartaglia-Cardano*, aparecen dos sumandos del tipo:

$$\sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}}$$

la idea de *Bombelli*, es reducir dicho número a uno del tipo $a+b\sqrt{-1}$, para lo cual debe resolver el problema de como sumar y multiplicar dichas expresiones. El número $a+b\sqrt{-1}$ debe ser elevado al cubo, para obtener una expresión del tipo $\sqrt[3]{c+d\sqrt{-1}}$. Usando ahora los números complejos, se pueden obtener soluciones reales de la ecuación cúbica. En el libro *L'Algebra*, aparecen por vez primera el cálculo con los números negativos, así como también las reglas para sumar y multiplicar dichos números. El gran aporte de *Bombelli* al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de $\sqrt{-1}$ como un número. A manera de ejemplo, *Bombelli* nos da las siguientes reglas:

$$\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n} = -n$$

$$\sqrt{-n} \cdot - \sqrt{-n} = n,$$

siendo n un número natural.

1.4. Números Imaginarios

A pesar de los brillantes trabajos de *Bombelli*, sobre el empleo de los números complejos en la resolución de la cúbica, los matemáticos de entonces se negaban aceptarlos. Estos eran considerados aún como fantasmas de otro mundo, por carecer de representación real, y fueron llamados *números imposibles* o *imaginarios*. Durante el siglo XVII, debido quizás a la aparición del cálculo infinitesimal y la geometría analítica, los números complejos fueron relegados al olvido por los matemáticos. Algunos genios como *Newton*, *Leibnitz* y *Descartes* nunca los comprendieron.

En 1673 el matemático inglés ***J.Wallis*** dio la primera interpretación geométrica de los complejos. Su modelo sigue los siguientes pasos:

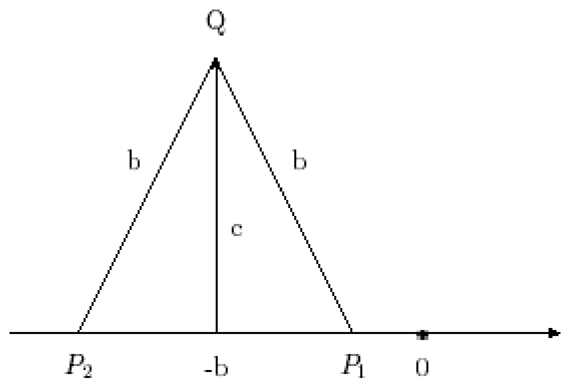
1) Sea la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2bx + c^2 = 0$$

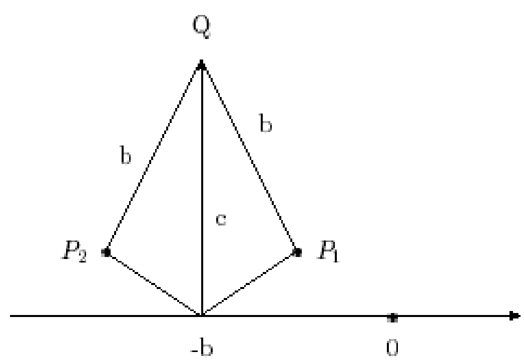
luego las raíces vienen dadas por:

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$$

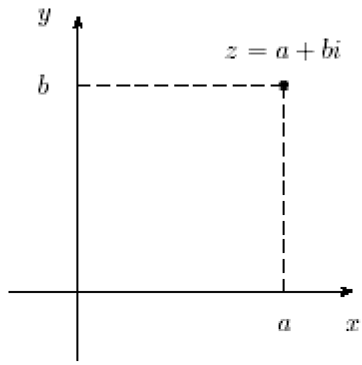
2) Si $b \geq c$, las raíces son reales y pueden ser representadas por un par de puntos P_1 y P_2 sobre los números reales, de acuerdo a la construcción siguiente:



3) Si $b<c$, entonces las soluciones son números complejos. ¿Cómo razonaba *Wallis* en este caso? Pues bien, siguiendo el mismo plan, los puntos P_1 y P_2 se hallan en el extremo de el segmento b, y como éste es más corto que c, los extremos no pueden tocar la recta real. Por lo tanto se ha llegado a una gran idea: los puntos P_1 y P_2 están por encima de la recta real. Ver la figura:



Como vemos, la representación de *Wallis* no es igual a la representación moderna, pero fue una buena aproximación, sin duda alguna. La idea correcta de la representación geométrica de un número complejo $z = a + bi$ en el *plano cartesiano*, fue descubierta por dos matemáticos aficionados, en forma independiente: el danés ***C. Wessel*** y posteriormente el suizo ***J. Argand***, en una obra publicada en 1806. A partir de entonces dicha representación se conoce con el nombre de *Diagrama de Argand*, y se muestra en la siguiente figura:



Con esta representación a la mano, los números complejos dejaron de ser algo misterioso e imposible, pero por razones de tipo histórico, se les sigue llamando *imaginarios*. En 1831 el matemático alemán *Carl F. Gauss* publica un trabajo en donde expone con toda claridad las propiedades de los números de la forma $a + bi$, llamados ahora *Números de Gauss*, y la representación geométrica de los mismos. Gracias a la autoridad indiscutible de *Gauss*, entraron por la puerta grande del templo de las matemáticas y ya nadie los podrá sacar del lugar preponderante que ocupan dentro del álgebra. Desde ese momento se inicia un desarrollo sostenido de la teoría de las funciones complejas, de la mano de grandes matemáticos como *Hamilton* y *Cayley*, quienes crearon los sistemas hipercomplejos, *Cauchy*, quien sienta las bases del cálculo diferencial e integral de las funciones complejas y finalmente el matemático alemán *B. Riemann*, quien demostró todo el poder que encierran los números complejos en el estudio de la geometría y amplió los horizontes de la matemática, creando una nueva ciencia llamada la topología.

2. Álgebra de los Números Complejos

En esta segunda parte estudiaremos el *Sistema de los Números Complejos*, desde el punto de vista del álgebra. Nos interesan las propiedades más importantes de las operaciones de suma y producto. Veremos la representación geométrica de los números complejos, así como también la forma polar o trigonométrica de los mismos. Usando la calculadora se pueden realizar operaciones con estos números en forma rápida y eficiente. Por lo tanto tenemos otra oportunidad para introducir la calculadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

2.1 Definición de número complejo

Un *número Complejo* es una expresión del tipo:

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e i es un símbolo, cuyo significado será aclarado más adelante.

Este tipo de números, algo misteriosos, por el momento, aparecen entre las soluciones de ecuaciones algebraicas con una incógnita. Por ejemplo la ecuación:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales. Al tratar de aplicar la formula que da la solución de una ecuación de segundo grado, nos encontramos con la expresión:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

la cual no tiene sentido en los números reales. No se puede tener una raíz cuadrada de un número negativo. Sin embargo, si usamos propiedades de los radicales se obtiene:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

Luego la solución de este problema es un número algo misterioso de la forma:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

¿Que significado se le puede dar a una raíz cuadrada de un número negativo? ¿Porque no dejar de lado esta dificultad y aceptar que este tipo de ecuación no tiene solución? La necesidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, incluyendo estas cuyas soluciones nos dan este tipo extraño de números, nos motiva a crear sistema numérico ampliado, con propiedades similares a las de los números reales. Dentro de este contexto se acepta el símbolo $\sqrt{-1}$ como una entidad matemática nueva. Veamos a continuación como se construyen estos nuevos números.

Comenzaremos por introducir un nuevo número o símbolo, denotado por i, el cual será llamado la unidad imaginaria y que cumple con la condición

$$i^2 = -1$$

O bien

$$i = \sqrt{-1}$$

Una vez hecho esto, construimos un conjunto **C** llamado *Números Complejos* cuyos elementos son combinaciones de la forma:

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales.

Vemos entonces que todo número complejo consta de dos partes, o componentes, llamadas: ***parte real*** y ***parte imaginaria***, dadas por a y b respectivamente.

Así pues, tenemos $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$.

Ejemplo: El siguiente es un número complejo:

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{3i}$$

Su parte real es $\sqrt{2}$ y su parte imaginaria es $\sqrt{3}$.

Ejemplo: El siguiente es un número complejo:

$$z = 8$$

Cuando no hay parte imaginaria, como en este caso, se dice que el complejo es real. Entonces los Números Reales (**R**) forman parte del conjunto de los Números Complejos.

Ejemplo: El siguiente es un número complejo:

$$z = 12i$$

Cuando un número complejo no tiene parte real, como en el presente caso, se dice que es un ***imaginario puro***.

¿Cuando dos números complejos son iguales?

Dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales si y solo sí $a = c$ y $b = d$. En otras palabras, dos números complejos son iguales cuando sus componentes respectivas, reales e imaginarias, son iguales.

2.2 Suma de números Complejos

Ahora nos dedicaremos al estudio de las propiedades de los números complejos relacionadas con la suma de ellos.

La operación **suma de números complejos** esta basada en la suma de números reales. Cada complejo tiene una parte real y una parte imaginaria. Para sumar complejos hay que sumar las partes reales por un lado y las partes imaginarias por otro lado, como números reales. Al hacer esto nos encontramos de nuevo con otro número complejo. Más precisamente:

Sean $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ dos números complejos. Entonces la suma de z_1 con z_2, denotada por $z_1 + z_2$ es el número complejo:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

Es decir, para sumar números complejos simplemente se suman sus componentes correspondientes.

<u>*Ejemplo*</u>: Para sumar $z_1 = 3 + 2i$ con $z_2 = -8 + 4i$ hacemos:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (-8 + 4i) = (3 - 8) + (2 + 4)i$$
$$z_1 + z_2 = -5 + 6i$$

Resta de números complejos: La resta o diferencia de dos números complejos se realiza restando cada parte por separado. Más precisamente: Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ dos números complejos, entonces la diferencia o resta entre z y w viene dada por:

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

Es decir, para restar dos números complejos se restan sus componentes correspondientes.

<u>*Ejemplo*</u>: Sean $z = 4 + 7i$ y $w = 2 + 3i$. Entonces:

$$z - w = (4 - 2) + (7 - 3)i = 2 + 4i$$

Estas operaciones de suma y resta satisfacen las siguientes propiedades generales:

1. **Propiedad de Cerradura para la suma**. Si z y w son dos números complejos entonces tanto $z + w$ como $z - w$ son números complejos.

2. **Propiedad asociativa**. Si z, w y u son números complejos, entonces se tiene:

$$z + (w + u) = (z + w) + u$$

3. **Propiedad Conmutativa**. Si z y u son números complejos, se tiene:

$$z + u = u + z$$

4. **Propiedad del elemento neutro**. El número complejo $0 = 0 + 0i$, es el elemento neutro para la suma. En efecto, si $z = a + bi$ es cualquier número complejo se tiene:

$$z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z$$

de la misma forma, se puede probar que $0 + z = z$.

5. **Propiedad del opuesto**. Si $z = a + bi$ es un número complejo, el opuesto de este es $-z = -a - bi$, el cual es otro número complejo. Nótese que el opuesto satisface:

$$z + (-z) = (-z) + z = 0$$

Usando todas estas propiedades, es posible calcular expresiones complicadas en donde aparezcan sumas y restas de números complejos

Ejemplo: Calcule el valor de z donde:

$$z = (5 + 12i) + [(10 - 8i) + [(6 + 3i) - (7 + 2i)]]$$

Para simplificar esta expresión usamos las propiedades estudiadas. Así pues:

$$\begin{aligned} z &= (5 + 12i) + [(10 - 8i) + (-1 + i)] \\ &= (5 + 12i) + (9 - 7i) \\ &= 14 + 5i \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Efectuar las siguientes sumas y restas de números complejos:

a) $(5 + 15i) + (20-2i)$
b) $(10 + 10i) + (2 + 8i)$
c) $(\sqrt{3} + 2i) + (2 + \sqrt{3}\,i)$
d) $\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}i\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i\right)$
e) $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{5i}{\sqrt{2}}\right)$
f) $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{3}i\right)$
g) $5 + (2 - \sqrt{3i}\ )$
h) $6i + (5 + 16i)$
i) $5i + (0 + 9i)$
j) $6i - 87i$
k) $(-10 -8i) + (-1 - i)$

2. Hallar el resultado de las siguientes operaciones:

a) $(3 + 2i) + [(4 - 5i) - (5 + i)]$
b) $[(1 - 9i) + (7 - 2i)] = (4 + 6i)$
c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{13}{5}i\right)+\left[\left(\frac{1}{20}+\frac{8}{5}i\right)+\left(\frac{10}{20}+\frac{6}{5}i\right)\right]$
d) $[(16 - i) + (1 - 8i)] - (17 - 9i)$

3. En cada caso, hallar un número complejo Z con la condición dada:

a) $z + (3 + 2i) = 5 + 20i$
b) $i + (3 +4i) = z$
c) $z + (1 +i) = 18 + 6i$
d) $z+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=i$

2.3 Producto de números complejos

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ definimos su producto, mediante la formula:

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Aunque parezca un poco complicada, esta expresión para el producto es consecuencia de las reglas de multiplicación para los números reales. En efecto, haciendo la multiplicación de z por w como si se tratara de expresiones algebraicas se obtiene:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bdi^2$$
$$= ac - bd + (ad + bc)i$$

Hemos usado la propiedad distributiva para la multiplicación, la relación $i^2 = -1$ y un reagrupamiento de los términos. La multiplicación puede hacerse de dos maneras; o bien se aplica directamente la formula, o bien se multiplican los complejos como expresiones algebraicas, teniendo cuidado de hacer al final la sustitución $i^2 = -1$.

Ejemplo: Sean $z = 6 + 2i$ y $w = 3 + 5i$. Para hallar $z \cdot w$ hacemos:

$$z \cdot w = (6 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (6 \cdot 5 + 2 \cdot 3)\, i = 8 + 36i$$

Ejemplo: Sean $z = 8$ y $w = 3+2i$. Entonces para hallar el producto de ambos hacemos:

$$z \cdot w = 8(3 + 2i) = 24 + 16i$$

Vemos entonces, que para multiplicar un número real por un número complejo, se multiplica cada componente de este último por el número real.

Propiedades de la multiplicación. La multiplicación de números complejos satisface las siguientes propiedades.

1. **Propiedad de Cerradura para el producto**. Si z y w son dos números complejos entonces $z \cdot w$ es un número complejo.

2. **Propiedad asociativa**. Si z, w y u son números complejos, entonces se tiene:

$$z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$$

3. **Propiedad Conmutativa**. Si z y u son números complejos, se tiene:

$$z \cdot u = u \cdot z$$

4. **Propiedad del elemento neutro**. El número complejo 1, es el elemento neutro para el producto. En efecto, si $z = a + bi$ es cualquier número complejo se tiene:

$$z \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = (a \cdot 1) + (b \cdot 1)i = a + bi = z$$

de la misma forma, se puede probar que $1 \cdot z = z$

5. **Propiedad del inverso**. Si $z = a + bi$ es un número complejo, distinto de cero, el inverso de z es otro número complejo, denotado por z^{-1}, el cual satisface:

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

Mas adelante veremos como se calcula z^{-1}.

6. **Propiedad distributiva**. Si z, w y u son números complejos se tienen las relaciones:

$$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$$
$$(z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u$$

El conjugado de z:

***Definición**:* Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces el Conjugado de z, denotado por $\bar{z}$, es otro número complejo definido por:

$$\bar{z} = a - bi$$

Ejemplo: Si $z = 2 + 9i$, su conjugado es $\bar{z} = 2 - 9i$

Ejemplo: Si $z = 7 - 9i$, su conjugado es $\bar{z} = 7 + 9i$.

El Módulo de z:

Definición: Si $z = a + bi$ es un número complejo, el módulo de z es el número real:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observación: Se puede expresar el modulo de z en función de el mismo y de su conjugado, usando la relación:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Se puede probar que dicha relación se verifica para todo z. En efecto, pongamos $z = a + bi$. Luego:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ba)i = a^2 + b^2$$

de donde:

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

<u>Ejemplo</u>: Sea $z = 3 + 4i$, para hallar su modulo hacemos:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Algunas propiedades muy importantes del módulo se dan a continuación. Supondremos que z, w y u son números complejos:

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0$ si y solo sí $z = 0$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

2.4 División de números complejos

¿Cómo se dividen dos números complejos? El caso más sencillo se presenta al dividir un complejo cualquiera entre un número real. Por ejemplo:

$$\frac{1+i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$$

Si z y w son dos números complejos, y $w \neq 0$, podemos hacer la división de z entre w de la forma siguiente:

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Tenemos entonces la regla para dividir números complejos:

<u>Para hacer la división de dos números complejos z y w, primero se multiplica z por el conjugado de w y este resultado se divide entre el módulo al cuadrado de w, el cual es un número real.</u>

Si hacemos $z = a + bi$ y $w = c + di$, tendremos:

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{a^2+b^2}$$

<u>Ejemplo</u>: Sea $z = 3 + 4i$ y $w = 2 + 3i$. Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{3+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}\\ &= \frac{(6+12)+(-9+8)i}{2^2+3^2}\\ &= \frac{18-i}{11} = \frac{18}{11}-\frac{1}{11}i\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Sean los números complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 + 3i$ y $z_3 = 4 + i$. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $z_1 \cdot z_2$
b) $z_2 \cdot z_3$
c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
d) z_1 / z_2
d) $(z_1 + z_2) = (z_3 - z_2)$
e) $5z_2 - 6z_3$

2. Calcular:

a) $(3 + 2i)^2 - (4 + 2i)$
b) $[(5 + 2i) + (4 - i)] = (6 + 5i)$
c) $\overline{(5+2i)+6}$
d)$(6 + 2i)(1 - 5i) / (7 + 4i)2$
e)$5(1 - i) + 6(7 + 1/2i)$
f) $(-3 - i) + (4 - 8i)\ [(5 + 3i) - (6 + 7i)]$
g) $(5 + 4i)^2 - (1 - 5i)^2$
h) $5\left(\overline{(3+2i)}+(3+2i)(1+5i)\right)$

3. Verifique la relación $|zw| = |z||w|$ para los números complejos $z = 5 + i$ y $w = 3 - 2i$.

4. Verifique la relación:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

para los números complejos $z = 1 - 5i$ y $z = 2 + 4i$

5. Hallar un número complejo z, tal que:

$$(7 + 2i)z + (2 + 3i) = 18 + 10i$$

6. Demuestre que si z es un número complejo tal que $z = \bar{z}$, entonces z debe ser real.

7. Demuestre que si $z= a+bi$, entonces se tiene $a = (z + \bar{z})/2$ y $b = (z - \bar{z})/2i$.

8. Hallar un número complejo cuyo módulo es igual a 5 y su parte real es igual a 3.

9. Hallar un número complejo z tal que su parte real es el doble de la parte imaginaria y que además cumple $z^2 = -7 + 24i$

2.5 Representación geométrica

Así como los números reales se representan geométricamente por medio de una recta, es posible dar una representación geométrica de los números complejos usando un sistema de coordenadas cartesianas. En un sistema de tales coordenadas, se tiene un par de ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado el origen. El eje en posición horizontal se llama eje x y el eje en posición vertical, llamado eje y. Si P es un punto cualquiera, entonces le asociamos las coordenadas x e y, donde x, llamada la *abscisa*, es la distancia desde el punto hasta el eje y e y, llamado la *ordenada*, es la distancia desde el punto hasta el eje x. De esta manera, denotamos al punto por $P(x, y)$.

Haremos ahora una identificación entre los números complejos y los puntos del plano. A cada número complejo $z = a+bi$, se le asocia el punto del plano, *P(a, b)*. De esta forma, se obtiene una representación geométrica o *Diagrama de Argand* de z, ver la figura 2.1:

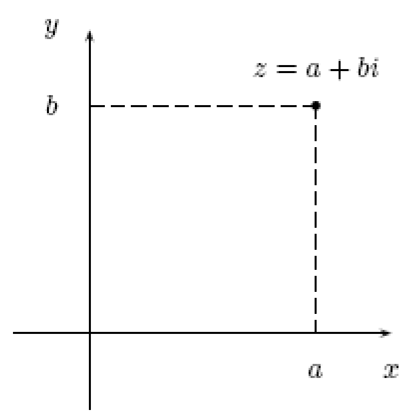


Fig. 2.1 Representación geométrica de un número complejo o Diagrama de Argand.

En esta representación, la componente real de z se copia sobre el eje x, que será llamado eje real y la componente imaginaria sobre el eje y, que será llamado eje imaginario. El conjunto de todos estos puntos, será llamado *Plano Complejo.*

Ejemplo: El complejo $z = 4 + 5i$ se puede representar en el plano complejo, para lo cual ubicamos primero al punto de coordenadas $(4, 5)$. Una vez hecho esto se tendrá la representación de z, como podemos ver en la figura 2.2.

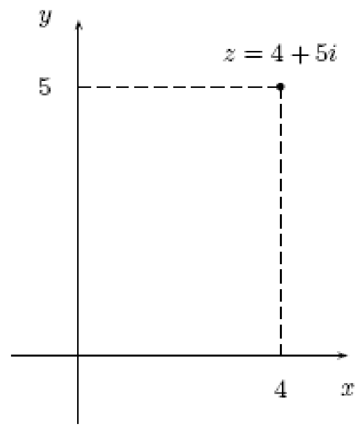


Figura 2.2 Representación geométrica del complejo z = 4 + 5i.

Ejemplo: El complejo $w = -6+2i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P\ (-6,2)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el segundo cuadrante. Ver la figura 2.3.

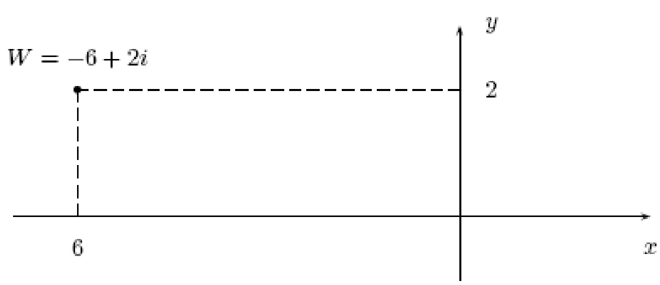


Figura 2.3 Representación geométrica del complejo z =-6 + 2i.

Ejemplo: El complejo $z = -2 + 3i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P\ (-2,-3)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará ubicado en el tercer cuadrante. Ver la figura 2.4.

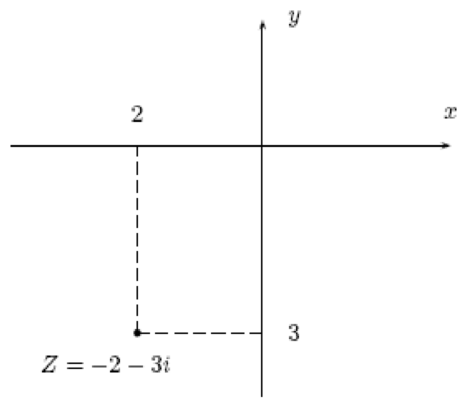


Figura 2.4 Representación geométrica del complejo z = -2 -3i..

Ejemplo: El complejo $w = 2 - 4i$ lo podemos representar, ubicando al punto de coordenadas $P\ (2, -4)$ sobre el plano. En este caso el complejo estará en el cuarto cuadrante. Ver la figura 2.5.

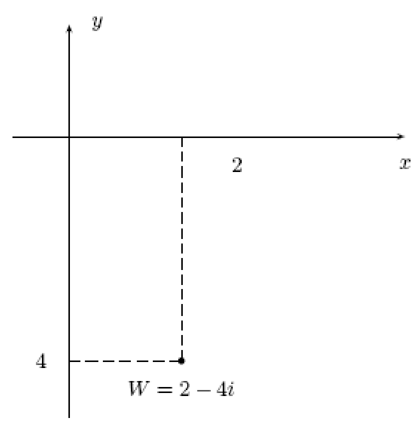


Figura 2.5 Representación geométrica del complejo z = 2 -4i.

Interpretación geométrica del módulo y el conjugado

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Entonces nos interesa calcular la longitud del segmento c que une al origen con el punto correspondiente a z en el plano complejo (ver la figura 2.6).

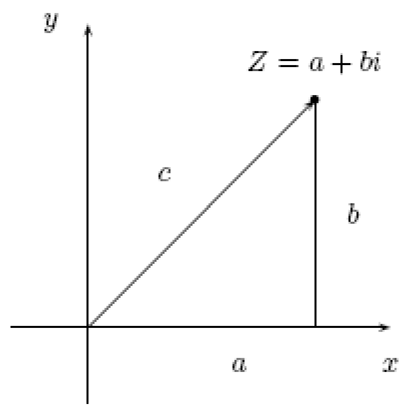


Figura 2.6 Representación geométrica del módulo y conjugado de un número complejo z.

De acuerdo a la disposición de los ejes y el segmento dado, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b, e hipotenusa dada por c. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este segmento c, es igual a $\sqrt{a^2+b^2}$ y por lo tanto, igual al módulo del complejo z.

Esto es:

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

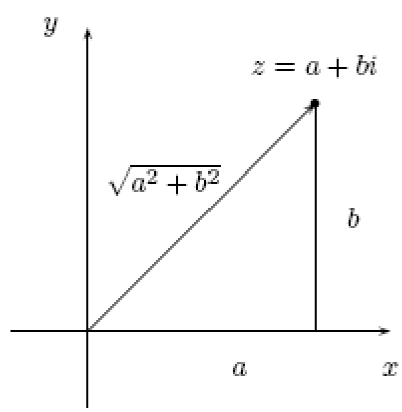


Figura 2.7 Representación geométrica del módulo de un número complejo z.

Tenemos entonces una interpretación geométrica del módulo de un complejo:

<u>*El módulo de un número complejo z es igual a la distancia desde el punto z hasta el origen.*</u>

Por otro lado, si $z = a + bi$ es un número complejo, su conjugado viene dado por $\bar{z} = a - bi$. Luego el conjugado en forma geométrica se obtiene al reflejar el punto correspondiente a z, alrededor del eje real (ver la figura 2.8).

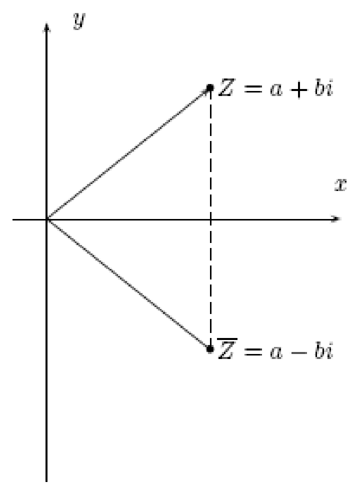


Figura 2.8 Representación geométrica del conjugado de un número complejo z.

Tenemos luego la interpretación geométrica del conjugado de un complejo z:

El conjugado de un número complejo z se obtiene como una imagen especular de z alrededor del eje real.

Suma geométrica de complejos

Podemos sumar dos números complejos en forma geométrica, mediante un algoritmo muy sencillo, llamado Regla del paralelogramo. Si se tienen dos complejos, digamos z_1 y z_2, entonces $z_1 + z_2$ se halla de la siguiente forma: a partir del punto representando a z_1 se traslada el segmento que une al punto z_2 con el origen. Al final de dicho segmento, se hallará el complejo $z_1 + z_2$, ver la figura 2.9.

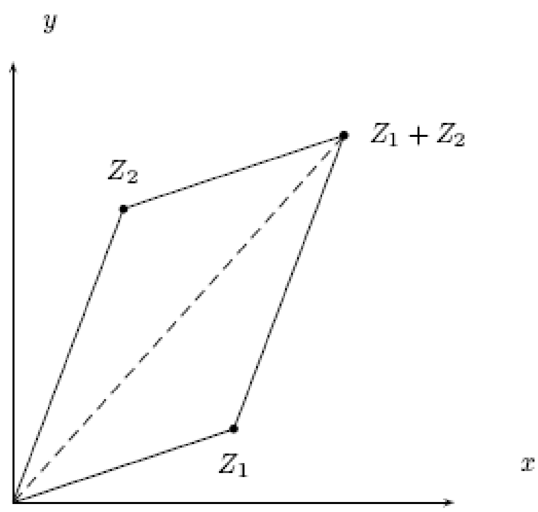


Figura 2.9 Suma geométrica de dos números complejos z_1 y z_2.

Vemos entonces que el complejo suma se halla en el extremo de la diagonal del paralelogramo con lados $|z_1|$ y $|z_2|$. Podemos resumir entonces:

La suma de dos números complejos, de manera geométrica, se efectúa usando la Ley del Paralelogramo.

Como la longitud de un lado en un triangulo es siempre menor que la suma de los otros dos lados, se obtiene la siguiente desigualdad para los módulos:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Para hallar el opuesto o negativo de un número complejo, en forma geométrica, procedemos de la manera siguiente: Si $z = a + bi$, entonces $-z = -a - bi$ y se ubica en el extremo del segmento de dirección opuesta a la de z (ver la figura 2.10).

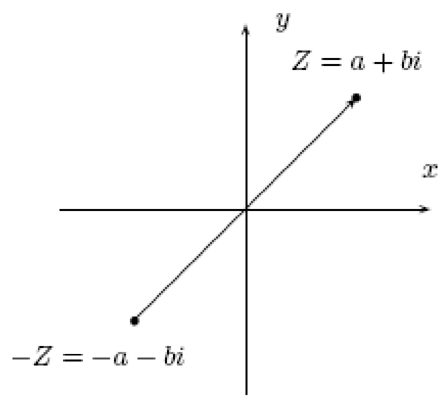


Figura 2.10 Representación geométrica del opuesto o negativo de un número complejos z.

Para restar dos números complejos en forma geométrica, digamos $z_1 - z_2$, se ubica el primer complejo en el plano, z_1 y a continuación se coloca el segmento del opuesto de z_2 en el punto correspondiente a z_1. El complejo resultante $z_1 - z_2$ se ubica en el extremo final de z_2 (ver la figura 2.11).

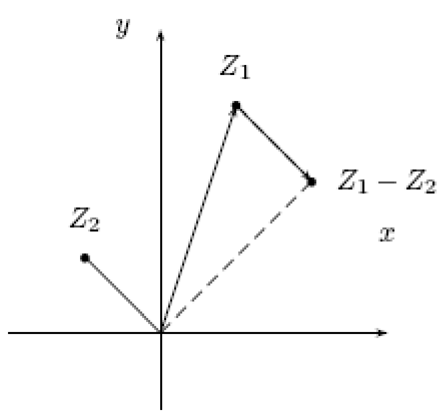


Figura 2.11 Resta geométrica de dos números complejos z_1 y z_2.

2.5 La Forma Polar

Como el lector habrá observado, en la sección anterior no dimos una interpretación geométrica para el producto de números complejos, ni tampoco para la división. En el caso del producto tenemos la fórmula para la multiplicación:

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i$$

El lado derecho de esta expresión, resulta difícil de interpretar usando el sistema de coordenadas cartesianas. Para resolver este problema, requerimos de otro sistema de coordenadas. Veremos como la trigonometría nos sirve de herramienta para solucionar este problema. Podemos asignarle a cada número complejo $z = a + bi$ en el plano, un radio vector, que conecta al punto con el origen. Este radio vector forma un ángulo con el eje real o de las x, que será denotado por θ. Ver la figura 2.12:

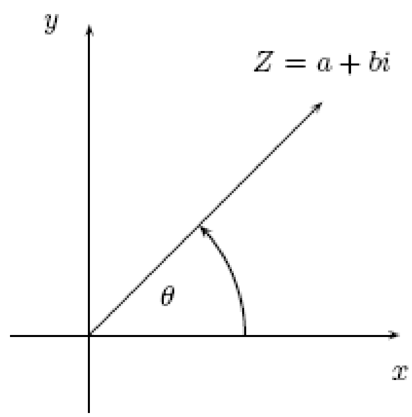


Figura 2.12 Forma Polar de un número complejo z.

Nota: El ángulo θ se mide a partir del eje real x y en sentido contrario a las agujas del reloj. El mismo puede venir expresado en unidades de grados o radianes. De acuerdo a la disposición de los ejes y el radio vector, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b, e hipotenusa dada por el radio vector. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este radio vector es $\sqrt{a^2 + b^2}$, igual al módulo del complejo z. Esto es:

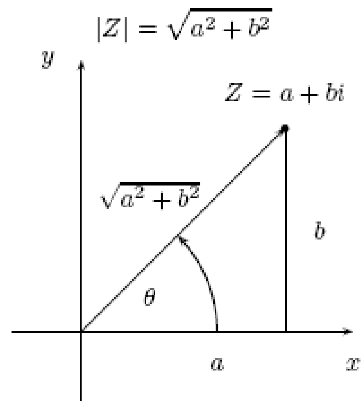


Figura 2.13 Representación geométrica del radio vector o módulo de un número complejo z.

Usando conocimientos de trigonometría en el triangulo anterior, se demuestran las relaciones:

$$a = |Z| \cos\theta \qquad (2.1)$$
$$b = |Z| \operatorname{sen}\theta \qquad (2.2)$$

Conocidas como fórmulas de cambio de coordenadas polares a cartesianas. Cualquier ángulo α, tal que $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \theta$ y $\cos \alpha = \cos \theta$, se llama amplitud o argumento para el complejo z. Sabemos por trigonometría, que dos argumentos cualesquiera de z difieren en 2π. El argumento θ, tal que $-\pi \leq \theta \leq \pi$, se llama amplitud o argumento principal de z. Esta claro que si conocemos el argumento principal de z y su módulo, entonces lo podemos representar geométricamente sin ambigüedad y además podremos obtener sus coordenadas cartesianas, de acuerdo a las formulas anteriores.

Se tiene entonces la representación de z en Forma Polar:

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad (2.3)$$

Recíprocamente, si se conocen las coordenadas cartesianas de $z = a + bi$, entonces $|z|$ y θ se calculan de acuerdo a las relaciones:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2.4)$$
$$\theta = arctag\,\frac{b}{a} \qquad (2.5)$$

Llamadas fórmulas de cambio de coordenadas cartesianas a polares.

<u>Ejemplo</u>: Un número complejo en el primer cuadrante. Hallar la forma polar del complejo $z = 2 + 2i$, y dar su representación geométrica en el plano.

<u>Solución</u>: En primer lugar, debemos calcular el módulo y el ángulo del complejo, para lo cual usamos las fórmulas 2.4 y 2.5. Luego:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para calcular el ángulo, podemos usar la calculadora:

$$\theta = arctg\ 2/2 = arctg\ 1 = 45^o$$

Luego la representación polar de z es:

$$z = 2\sqrt{2}\ (cos45^o + i\ sen45^o)$$

La representación de este número en el plano complejo aparece en la figura 2.14 mostrada a continuación:

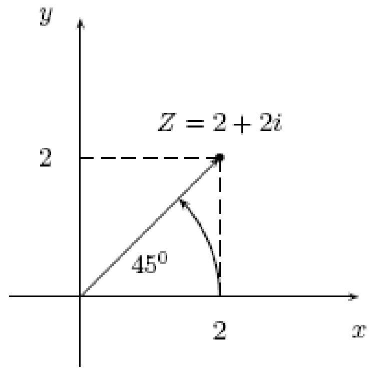


Figura 2.14 La gráfica muestra el argumento de un número complejo z en el primer cuadrante.

Ejemplo: Un número complejo en el segundo cuadrante. Hallar la forma polar de $w = -3 + 4i$.

Solución: Calculamos el módulo y el ángulo usando las relaciones anteriores:

$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Ahora calculamos el ángulo usando la calculadora, pero teniendo mucho cuidado, pues la calculadora solo nos da ángulos θ en el intervalo $-90^o \leq \theta \leq 90^o$, al usar la tecla arctg. El ángulo dado por la calculadora es:

$$\theta' = arctg\ 4/(-3) = -53.13^o$$

El argumento principal de w será:

$$\theta = 180^o + \theta' = 126.87^o$$

La razón para hacer este cambio es que ambos ángulos tienen la misma tangente, ver la figura 2.15:

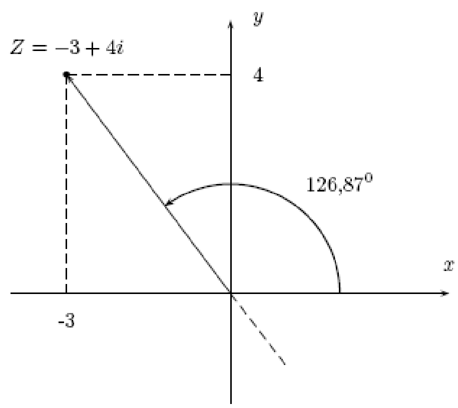


Figura 2.15 La gráfica muestra el argumento de un número complejo z en el segundo cuadrante.

Luego la forma polar de w es:

$$w = 5(\cos 126.87^o + i \operatorname{sen} 126.87^o)$$

<u>Ejemplo</u>: Un número complejo en el tercer cuadrante. Hallar la forma polar de $z = -3 -4i$.

<u>Solución</u>: Al igual que antes, calculamos su módulo y ángulo asociado:

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Al tratar de buscar el ángulo, usando la calculadora, nuevamente se presenta el mismo inconveniente. Tenemos entonces:

$$\theta' = arctg(-4)/(-3) = 53.13^o$$

Sabemos que este es un ángulo correspondiente al primer cuadrante, pero como la componente real de z es negativa, al igual que su componente compleja, cualquier argumento de z debe estar en el tercer cuadrante. Al ángulo hallado le sumamos 180^o para obtener un argumento positivo, luego

$$\theta = 180^o + \theta' = 233.13^o$$

Por lo tanto, la forma polar de z es

$$z = 5(\cos 233.13^o + i \operatorname{sen} 233.13^o)$$

Ver la gráfica 2.16 mostrada a continuación:

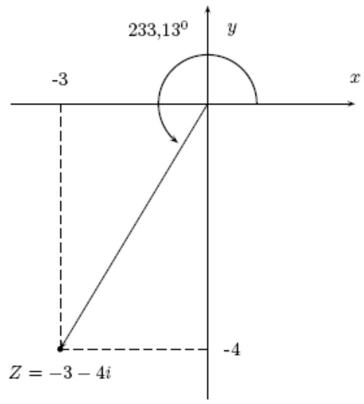


Figura 2.16 La gráfica muestra el argumento de un número complejo z en el tercer cuadrante.

Ejemplo: Un número complejo en el cuarto cuadrante. Hallar la forma polar de $w = 1 -2i$.

Solución: En primer lugar, calculamos su módulo y su ángulo:

$$|w| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Al buscar el ángulo la calculadora nos da un argumento negativo, en el cuarto cuadrante (esta vez no se presentan problemas de conversión), y para llevarlo a la forma positiva le sumamos 360^o. Luego

$$\theta' = arctg(-2)/1 = -63.43^o$$

El argumento buscado es:

$$\theta = 360^o + \theta' = 296.55^o$$

Por lo tanto, la forma polar de w es:

$$w = \sqrt{5}\,(cos296.55^o + i\ sen296.55^o)$$

Ver la figura 2.17:

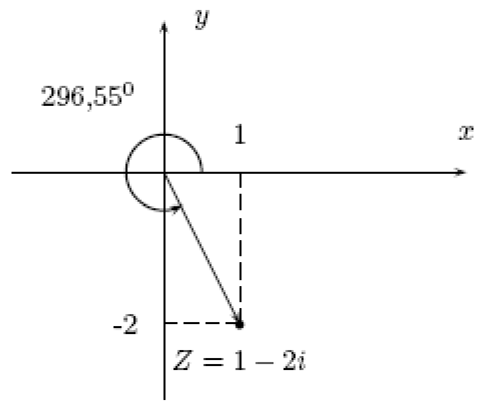


Figura 2.17 La gráfica muestra el argumento de un número complejo z en el cuarto cuadrante.

Multiplicación y división en la forma polar

Supóngase que tenemos dos complejos en forma polar y queremos hallar el producto y el cociente de ellos. Sean $z = |z|\ (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)$ y $w = |w|\ (\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi)$ Podemos realizar la multiplicación de estos números complejos en forma polar:

$$z \cdot w = |z|(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)\cdot|w|\ (\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi)$$

$$= |z||w|[(\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\ \theta)\cdot(\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi)]$$

$$= |z||w|[(\cos\theta\cdot \cos\varphi - \mathrm{sen}\ \theta\cdot \mathrm{sen}\ \varphi) + (\cos\theta\cdot \mathrm{sen}\ \varphi + \mathrm{sen}\ \theta\cdot\cos\varphi)]$$

después de usar un par de identidades trigonométricas muy conocidas, tenemos la formula siguiente:

$$z \cdot w = |z||w|\ (\cos(\theta + \varphi) + i\ \mathrm{sen}(\theta + \varphi)) \qquad (2.6)$$

También se puede obtener una formula similar para la división en forma polar. Dicha formula viene dada por

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos(\theta - \varphi) + i\mathrm{sen}(\theta - \varphi)\right) \qquad (2.7)$$

Observación: Podemos dar ahora una interpretación geométrica del producto y la división de números complejos, basándonos en las fórmulas anteriores. Por lo tanto, podemos resumir:

“Cuando se multiplican dos complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos y cuya amplitud es igual a la suma de las amplitudes”.

“Cuando se dividen dos números complejos, el resultado es un número complejo cuyo módulo es igual al cociente de los módulos y cuya amplitud es igual a la diferencia de las amplitudes”.

Ejemplo: Sean $z = 2(cos95º + i\ sen95º)$ y $w = 3(cos26º + i\ sen26º)$. Entonces podemos calcular su producto, usando la fórmula 2.6. Luego se tiene:

$$z \cdot w = 2\cdot 3(cos(95º + 26º) + i\ sen(95º + 26º))$$

$$z \cdot w = 6(cos121º + i\ sen121º)$$

Si queremos hallar el cociente de z entre w, hacemos:

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}\ (cos(95º - 26º) - i\ sen(95º - 26º))$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2}{3}\ (cos69º + i\ sen69º)$$

2.6. Potencias y raíces de números complejos.

La fórmula 2.6 puede ser utilizada para hallar la potencia n-ésima de un número complejo. Supongamos que $z = |z|(cos\theta + i\ sen\theta)$, y n es un entero positivo, entonces se obtiene:

$$z^n = |z|^n(cos(n\cdot\theta) + i\ sen(n\cdot\theta)) \qquad (2.8)$$

Esta relación, que se conoce con el nombre de ***Fórmula de De Moivre***, nos da un algoritmo bastante eficiente para hallar la potencia n-ésima de cualquier número complejo en forma polar.

Ejemplo: Sea $z = 2(cos30º + i\ sen30º)$. Calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, z^5.

Solución. Usando la relación *(2.8):*

$$z^5 = 2^5(cos(5\cdot 30º) + i\ sen(5\cdot 30º))$$

$$z^5 = 32(cos150º + i\ sen150º)$$

Ejemplo. Calcular z^6, donde $z = 3 + 4\ i$.

Solución. En primer lugar, llevamos z a la forma polar. Para hallar el módulo hacemos:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Por otro lado, el ángulo viene dado por:

$$\theta = arctg\ 4/3 = 53.13^o$$

Por lo tanto, tenemos a z en forma polar:

$$z = 5(cos53.13^o + i\ sen53.13^o)$$

Calculamos ahora z^6 empleando la relación *(2.8):*

$$z^6 = 56(cos(6\cdot 53.13^o) + i\ sen(6\cdot 53.13^o))$$

$$z^6 = 15625(cos318.78^o + i\ sen318.78^o)$$

Finalmente, llevamos este resultado a la forma cartesiana:

$$z^6 = 15625(0.7522 - i\ 0.6590)$$

$$z^6 = 11753.12 – 10296.12\ i$$

En este ejemplo se ha cometido un error de redondeo, al usar la calculadora de mano. El valor exacto de esta operación es $z^6 = 11753 – 10296i$.

Si z es un número complejo tal que para algún n entero positivo se tenga

$$z = w^n$$

donde w es otro número complejo, entonces se dice que w es una raíz enésima de z. Esto lo denotamos por $w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$. En los números reales, todo número posee una raíz de orden impar y dos raíces de orden par. En los complejos hay una mayor abundancia de raíces. Concretamente, se tiene la siguiente propiedad.

Propiedad*: Todo número complejo tiene exactamente n raíces n-ésimas.*

Así, por ejemplo, si $z = 1$ entonces existen 4 raíces cuartas, pues

$$1^4 = i^4 = (-i)^4 = (-1)^4 = 1$$

de donde 1, -1, i, y $-i$ son las *4 raíces cuartas de la unidad*.

A continuación damos una fórmula para hallar las raíces de un número complejo.

Sea $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, entonces

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = |z|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right) \qquad (2.9)$$

Ejemplo: Hallar todas las raíces cúbicas de $z = 8(\cos 30^o + isen30^o)$

Solución: Si usamos la relación *(2.9)* se tiene:

$$z^{1/3} = 8^{1/3}\left(\cos\frac{30^o + 2k\pi}{3} + isen\frac{30^o + 2k\pi}{3}\right)$$

con $k = 0, 1, 2$. Sustituyendo estos valores de k en la expresión de arriba nos da las tres raíces cúbicas:

$w_1 = 2(\cos 10^o + i\, sen10^o) \quad k = 0$
$w_2 = 2(\cos 130^o + i\, sen130^o) \quad k = 1$
$w_3 = 2(\cos 250^o + i\, sen250^o) \quad k = 2$

Si representamos gráficamente estas tres raíces, veremos que se hallan sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 2. Además todas ellas están a la misma distancia de las otras: forman los vértices de un triángulo equilátero. Ver la figura 2.18.

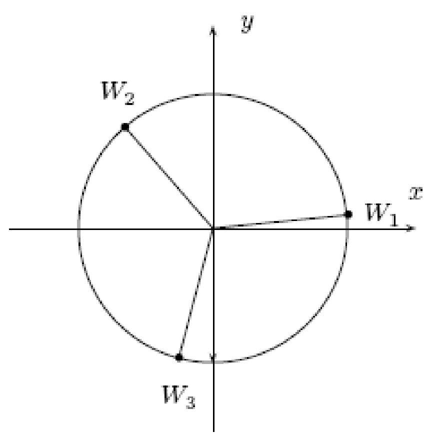


Figura 2.18 La gráfica muestra las tres raíces cúbicas del complejo z = 8 (cos 30º + i sen 30º).

Ejemplo: Hallar las seis raíces sextas de la unidad.

Solución: Tomamos la representación en forma polar de 1, la cual viene dada por

$$1 = 1\cdot(\cos 0^o + i\, sen\, 0^o)$$

Luego hallamos las raíces sextas por intermedio de 2.9

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{0º+2k\Pi}{6}\right) + isen\left(\frac{0º+2k\Pi}{6}\right)\right)$$

Con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.

Estos valores de k nos dan las seis raíces:

$w_1 = 1(\cos 0º + i\ sen\ 0º)$ $\quad k = 0$

$w_2 = 1(\cos 60º + i\ sen\ 60º)$ $\quad k = 1$

$w_3 = 1(\cos 120º + i\ sen\ 120º)$ $\quad k = 2$

$w_4 = 1(\cos 180º + i\ sen\ 180º)$ $\quad k = 3$

$w_5 = 1(\cos 240º + i\ sen\ 240º)$ $\quad k = 4$

$w_6 = 1(\cos 300º + i\ sen\ 300º)$ $\quad k = 5$

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1, como se muestra en la figura 2.20.

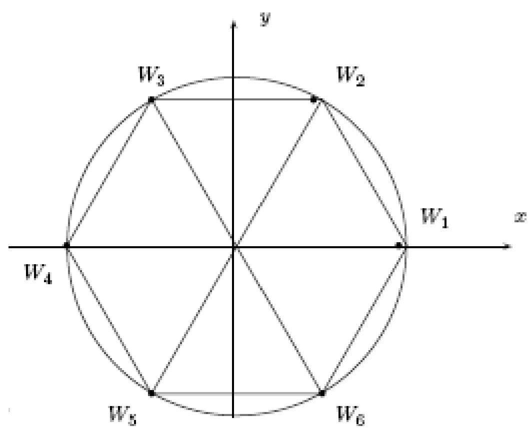


Figura 2.20 Muestra las seis raíces sextas de la unidad.

Ejercicios

1. Representar gráficamente en el plano complejo los siguientes números:

a) $z = 2(\cos 60º + i\ sen 60º)$
b) $z = 1{=}5(\cos 45º + i\ sen 45º)$
c) $z = 16(\cos 120º + i\ sen 120º)$
d) $z = 7(\cos 100º + i\ sen 100º)$
e) $z = 4(\cos 400º + i\ sen 400º)$
f) $z = 6(\cos 312º + i\ sen 312º)$

g) z = (1 + $\sqrt{2}$ *)(cos (– 60)º + i sen (– 60)º)*

2. Expresar los siguientes números complejos en forma polar:

a) z = 3 + 4i

b) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

c) $z = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

d) $z = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$

e) z = 1 - i
f) z = $\sqrt{3}$ *p3 + i*
g) z = (6 + i)(2 - i)
h) z = -7 - 7i
i) z = 5

3. Usando la forma polar, efectúe las siguientes operaciones:

a) (1 + i)($\sqrt{3}$ *+ i)*

b) $\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$

c) $\frac{4i}{2+i}$

d) $(1 + i)^4$

e) $(\sqrt{3} + i)^7$

f) $(1 + i)^{-3}$

g) $\frac{(\sqrt{2}+i)(1-i)}{5i}$

4. Calcular las *cuatro* raíces cuartas del complejo *z = 2 + i*. Representarlas gráficamente.

5. Calcular las *tres* raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) z = 1 - i
b) z = -1 - i
c) z = $\sqrt{3}$ *+ i*

d) $z = 1 - \sqrt{3}\, i$
e) $z = 8$

6. Resuelva las ecuaciones en números complejos:

a) $z^3 + 4 = 5 + i$
b) $z^4 + 2i = 6 + 3i$
c) $z^5 + 16 = 0$

7. Dibujar en el plano complejo la región delimitada por:

a) $|z| \leq 3$
b) $|z - 5| < 4$
c) $Re(z) < 1=2$
d) $Im(z) \geq 4$

3. La fórmula de Euler

3.1 El Número e

Una de las constantes más usadas en matemáticas es el número e o Número de Euler, cuyo valor aproximado de 11 cifras decimales es:

$$e \approx 2.71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación maravillosa

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\theta \qquad (3.1)$$

Donde el lado derecho representa un número complejo en el círculo unitario de ángulo θ. Dicha fórmula se conoce con el nombre de Fórmula de Euler en honor a Leonhard Euler, quien la descubrió cerca de 1740.

Muchos textos de bachillerato y aún universitarios tienen un tratamiento inadecuado, carente de toda pedagogía y rigor matemático, de la formula de Euler. Para éstos autores el lado izquierdo no posee ningún significado y cometen el gran error de dar la formula (3.1) como una definición de $e^{i\theta}$. Para poder convencer al estudiante que la relación (3.1) es una verdad matemática y no un simple acto de fe, debemos entonces tratar de entender primero qué cosa es la expresión $e^{i\theta}$ y luego demostrar que dicha relación se cumple para todo ángulo θ.

Comenzaremos entonces por considerar la función exponencial $f(x) = e^x$

¿Cómo se define e^x, si x es un número real?

La propiedad que define a la exponencial es una función $f(x)$, tal que:

$$\begin{aligned} &i)\ \frac{df}{dx} = f \\ &ii)\ f(0) = 1 \end{aligned} \qquad (3.2)$$

De manera análoga, si k es cualesquier constante, entonces:

$$g(x) = e^{kx}$$

Es la función $g(x)$ que satisface:

$$i\ )\ \frac{dg}{dx} = kg$$

$$ii\ )\ g(0) = 1 \qquad\qquad (3.3)$$

Comenzaremos por suponer que e^x se puede desarrollar en una serie de potencia:

$$f(x) = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$$

Este tipo de series se llaman **Series Formales de Potencia.** La palabra formal nos indica que dicho desarrollo es sólo una relación entre símbolos y que puede ser, o no, un número real para algunos valores de x.

Derivando en ambos miembros de la serie de potencias nos queda:

$$\frac{d\ f(x)}{dx} = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$$

Igualando ambas expresiones y comparando los coeficientes del mismo grado nos da:

$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 2a_2 \\ a_2 & = & 3a_3 \\ \vdots & & \\ a_n & = & (n+1)a_{n+1} \end{array}$$

Usando *(3.2) ii)* se tiene que *f(0) = 1* y por lo tanto a_0 *= 1*. Luego tendremos los valores de los términos restantes definidos por recurrencia:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= a_1 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= \frac{1}{2} \\
a_3 &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Luego la serie de potencias de e^x es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (3.4)$$

Por lo que deduce que la serie de potencias de e^{kx} es:

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \cdots + \frac{(kx)^n}{n!} + \cdots$$

Por el momento no nos preocupamos por los problemas de la convergencia de estas series de potencia. Sólo haremos un cálculo formal en una primera etapa, para descubrir relaciones entre las funciones de manera heurística, como lo hacían los matemáticos en el pasado.

Las series de potencia $sen\,\theta$ y $\cos\theta$, se pueden obtener por medio del Teorema de Taylor del cálculo diferencial. Tenemos también la posibilidad de calcular estas series, trabajando de manera formal. Sobre las funciones seno y coseno, apenas conocemos los valores para $\theta = 0$. Así pues:

$$
\begin{aligned}
sen(0) &= 0 \\
\cos(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Luego las series de potencias respectivas serán:

$$
\begin{aligned}
sen\theta &= a_1\theta + a_2\theta^2 + \cdots + a_n\theta^n + \cdots && (3.5) \\
\cos\theta &= 1 + b_1\theta + b_2\theta^2 + \cdots + b_n\theta^n + \cdots && (3.6)
\end{aligned}
$$

Recordemos que la función seno es impar, es decir $sen(-\theta) = -\,sen\,\theta$, luego podemos igualar sus series respectivas y comparar los coeficientes para obtener:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= -a_2 \\ a_3 &= a_3 \\ a_4 &= -a_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De aquí se deduce que todos los coeficientes de las potencias pares son cero. Luego *(3.5)* se puede escribir:

$$sen\theta = a_1 + a_3\theta^3 + a_5\theta^5 + \cdots + a_{2n+1}\theta^{2n+1} + \cdots \qquad (3.7)$$

Por otra parte, la función coseno es par, es decir $\cos\theta = \cos(-\theta)$ y por lo tanto los coeficientes de las potencias impares son todas nulas. Luego se tiene el desarrollo en serie para el coseno:

$$\cos\theta = 1 + b_2\theta^2 + b_4\theta^4 + \cdots + b_{2n}\theta^{2n} + \cdots \qquad (3.8)$$

Para calcular el valor de los coeficientes a_i en *(3.7)*, derivamos la serie del seno y la igualamos a la del coseno pues $\frac{d}{d\theta} sen\theta = \cos\theta$.

De aquí obtenemos que $a_1 = 1$.

Una segunda derivación de la serie *(3.7)* produce:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} sen\theta = -sen\theta$$

Luego:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} sen\theta = 2\cdot 3a_3\theta + 5.4a_5\theta^3 + \cdots + (2k+1)2ka_{2k+1}\theta^{k-1} + \cdots$$

$$= -a_1 - a_3\theta^3 - \cdots - a_{2k-1}\theta^{k-1} - \cdots$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo orden nos da:

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{-a_1}{2\cdot 3} \\
a_5 &= \frac{-a_3}{5\cdot 4} \\
&\vdots \\
a_{2k+1} &= \frac{-a_{2k-1}}{(2k+1)\cdot 2k} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Esta sucesión de recurrencia nos da los valores:

$$a_3 = \frac{-1}{3!}, \quad a_5 = \frac{1}{5!}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\cdots$$

Luego la serie del seno de θ es:

$$sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \qquad (3.9)$$

Haciendo el mismo tipo de análisis para la serie del coseno obtenemos:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots$$

Volviendo al desarrollo en serie de potencias de e^{kx}, y suponiendo que $k = i, x = \theta$, entonces nos queda:

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Por el momento no vamos a probar la *convergencia* de esta serie, hacemos ahora un reordenamiento de esta última serie para obtener:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right) = \cos\theta + i\ sen\theta$$

Al menos heurísticamente hemos probado la Fórmula de Euler. Para dar más rigurosidad a estos resultados tendríamos que probar la convergencia de ambas series para cualquier θ real, lo cual no está al alcance de nuestro curso. La fórmula de Euler permite usar una notación más corta para expresar los números complejos. Si z es cualquier complejo, se tiene la representación polar:

$$z = |z| \left(\cos\theta + isen\theta\right)$$

que podemos escribir como:

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

Sean $z_1 = |z_1|\, e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|\, e^{-i\theta_2}$ dos números complejos, entonces su producto y su cociente serían:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, |z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

Si $n > 0$ es un número entero, la potencia *n-ésima* de $z = |z|\, e^{i\theta}$ está dada por:

$$z^n = |z|^n\, e^{in\theta}$$

y la raíz *n-ésima* será:

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$.

3.2 Aplicaciones de la Trigonometría

Partiendo de la fórmula de Euler podemos derivar una gran cantidad de identidades trigonométricas. Veamos entonces como el seno y el coseno se definen a partir de la función exponencial.

Tenemos la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$$

De aquí que:

$$e^{-i\theta} = cos(-\theta) + isen(-\theta) = cos\theta - i\,sen\,\theta$$

Combinando las expresiones algebraicas obtenemos las conocidas fórmulas que relacionan seno y coseno con la exponencial:

$$\cos\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad (3.10)$$

$$sen\,\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i} \qquad (3.11)$$

Como una primera muestra del poder de los números complejos en el estudio de la trigonometría, derivamos las identidades para: $sen\,(\theta+\alpha)\;y\;\cos\,(\theta+\alpha)$.

Esto es:

$$\begin{aligned}\cos\,(\theta+\alpha) + isen\,(\theta+\alpha) &= e^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\theta}e^{i\alpha}\\ &= (\cos\theta + isen\theta)(\cos\alpha + i\,sen\alpha)\\ &= (\cos\theta\cos\alpha - sen\theta\,sen\alpha) + i(sen\theta\cos\alpha + \cos\theta\,sen\alpha)\end{aligned}$$

Igualando componentes en ambos lados nos quedan el par de fórmulas:

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) &= \cos\theta\cos\alpha - sen\theta\,sen\alpha\\ sen(\theta+\alpha) &= sen\theta\cos\alpha + \cos\theta\,sen\alpha\end{aligned}$$

La ventaja de usar la fórmula de Euler, aparte de su perfección y simplicidad, es que siempre aparecen dos nuevas fórmulas.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $sen3\theta\;y\;\cos3\theta$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\, sen 3\theta = e^{i3\theta} &= \left(e^{i\theta}\right)^3 = \left(\cos\theta + i sen\theta\right)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\; i\, sen\theta + 3\cos\theta\, i^2 sen^2\theta + i^3 sen^3\theta \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\;\; sen^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\, sen\theta - sen^3\theta\right)\end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias nos quedan las fórmulas:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\; sen^2\theta$$
$$sen\, 3\theta = 3\cos^2\theta\; sen\theta - sen^3\theta$$

Podemos también derivar fórmulas para las potencias del sen θ (o del cos θ) en función de sen θ y cos θ. Por ejemplo, si queremos una identidad para $sen^4\theta$ hacemos uso de la identidad $2i\; sen\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$.

Elevando a la potencia cuarta ambos miembros nos dará:

$$\begin{aligned}\left(2\; isen\theta\right)^4 &= \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^4 \\ 16 sen^4\theta &= e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{i4\theta} \\ &= e^{i4\theta} + e^{-i4\theta} - 4\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) + 6 \\ &= 2\cos 4\theta - 8\cos 2\theta + 6\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$sen^4\theta = \frac{\cos 4\theta - 4\cos\theta + 3}{8}$$

3.3 Aplicaciones en la Geometría

Teniendo a los números complejos a la mano podemos pasearnos por algunos teoremas de la geometría y redescubrir algunas demostraciones, de una manera sencilla y fácil. Dentro de los complejos se esconde un potencial tremendo de cálculo de ángulos y longitudes en el plano, como veremos en los siguientes ejemplos. Comenzaremos por uno de los teoremas más importantes de la geometría:

3.3.1 El Teorema de Pitágoras

Sea el triángulo AOB un triángulo rectángulo, el cual ubicamos en el plano complejo, con el vértice O en el origen, de acuerdo al diagrama:

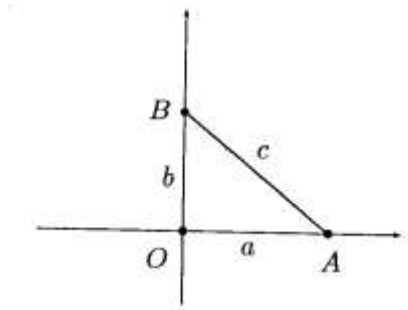


Fig. 3.1 Diagrama utilizado para probar el Teorema de Pitágoras.

El teorema afirma que se satisface la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Basándonos en la figura, podemos definir tres números complejos $z_1 = a,\ z_2 = bi,\ y\ \ z_3 = z_2 - z_3$:

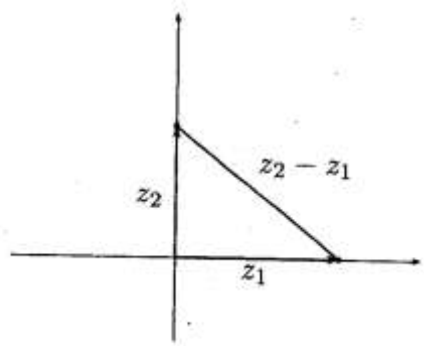


Fig. 3.2 Representación geométrica de los valores a, b y c para probar el Teorema de Pitágoras.

Calculemos el módulo al cuadrado de z_3:

$$\begin{aligned} c^2 = |z_3|^2 &= z_3 \cdot \overline{z_3} = (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) \\ &= (bi - a)(-bi - a) = b^2 - abi + abi + a^2 \end{aligned}$$

Entonces obtenemos la relación entre los lados:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

3.3.2. La Ley de los Cosenos

Consideremos un triangulo de lados *a, b, c* y supóngase que se conoce uno de sus ángulos, digamos α :

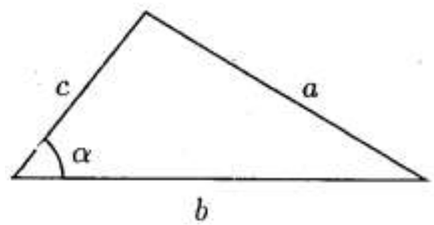


Fig. 3.3 Diagrama utilizado para probar la Ley de los cosenos.

La ley de los cosenos establece entonces:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

Ubicamos entonces el triángulo dentro del plano complejo:

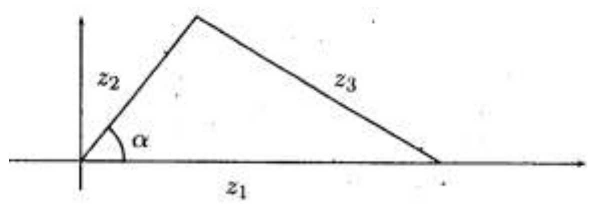


Fig. 3.4 Ubicación de un triángulo en el plano complejo.

Luego consideremos los números complejos: $z_1 = b,\ z_2 = ce^{i\theta},\quad z_3 = z_2 - z_1$, de esta manera podemos establecer la relación entre los módulos:

$$a^2 = |z_3|^2 = |z_2 - z_1|^2$$

de donde:

$$\begin{aligned} a^2 &= (z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = \left(ce^{i\alpha} - b\right)\left(ce^{-i\alpha} - b\right) \\ &= c^2 - bc\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) + b^2 \end{aligned}$$

y, usando la relación:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

obtenemos la fórmula del coseno:

$$a^2 = c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2$$

Otro resultado muy usado en geometría es el inverso del Teorema de Pitágoras, el cual establece que todo triángulo con lados a, b, c que cumplen la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

es un triángulo rectángulo.

Esto se deduce fácilmente de la *ley de los cosenos*. En efecto si se tiene la relación:

$$a^2 = c^2 + b^2 \qquad (3.13)$$

en un triángulo como el mostrado a continuación.

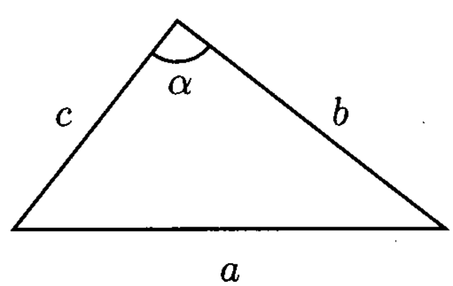


Fig. 3.5 Diagrama utilizado para probar el inverso del Teorema de Pitágoras.

Entonces usando la ley de los cosenos tendremos:

$$a^2 = c^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \qquad (3.14)$$

Igualando *(3.13)* y (*3.14)* obtenemos la relación:

$$c^2 + b^2 = c^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

de donde se concluye que $\cos\alpha = 0$ y por lo tanto $\alpha = 90°$. Es decir, el triángulo es rectángulo.

3.3.3 Teorema del Triángulo Inscrito en un Semicírculo

Un famoso teorema de geometría, dice que todo triángulo inscrito en un semicírculo debe ser rectángulo. Probaremos este resultado usando números complejos. Supongamos que tenemos un semicírculo de radio a y un triángulo ΔABC inscrito en él (ver la figura)

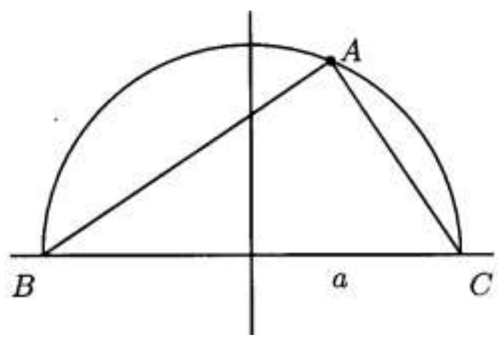


Fig. 3.6 Diagrama utilizado para probar el Teorema del triángulo inscrito en un semicírculo.

De acuerdo a la observación sobre la ley de los cosenos, debemos probar que:

$$|BA|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 = 4a^2$$

Para probar esto, tomaremos tres números complejos: $z_1 = a,\ z_2 = ae^{i\alpha},\ z_3 = -a,$ y tomamos el ángulo α de manera tal que el radio vector de z_1 intersecte al círculo en el punto A.

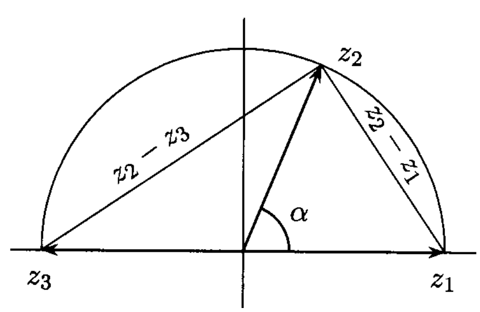


Fig. 3.7 Diagrama utilizado para probar el Teorema del triángulo inscrito en un semicírculo, en el plano complejo.

Es claro que $|BA| = |z_2 - z_3|$ y $|AC| = |z_2 - z_1|$. Luego se tiene:

$$\begin{aligned}
|z_2 - z_3|^2 + |z_2 - z_1|^2 &= \left(a\, e^{i\alpha} + a\right) + \left(a\, e^{-i\alpha} + a\right) + \left(a\, e^{i\alpha} - a\right)\left(a\, e^{-i\alpha} - a\right) \\
&= a^2\left(1 + e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} + 1\right) + a^2\left(1 - e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} + 1\right) \\
&= 4a^2
\end{aligned}$$

Luego se ha probado que:

$$|BA|^2 + |AC|^2 = 4a^2$$

y con esto termina la demostración.

3.3.4 El área del círculo

Supongamos que tenemos un círculo de centro O y radio a. Hallaremos el área del mismo mediante un proceso de límites. Podemos aproximar el círculo por medio de un polígono regular de n lados.

El área de dicho círculo se expresa (ver problema 3):

$$A_n = \frac{na^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

A medida que n aumenta, el área de A_n se aproxima cada vez más al área del círculo, y cuando $n \to \infty$, entonces $A_n \to A$, donde A es el área buscada. Luego podemos hacer:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{na^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Aquí se presenta un problema serio, pues el límite es una indeterminación de la forma $\infty \cdot 0$. Afortunadamente, podemos remediar este inconveniente, considerando la serie de potencias del seno, estudiada en este capítulo. Luego:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{na^2}{2} = \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^5}{5!} - \cdots \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a^2 = \left(\pi - \frac{(2\pi)^3}{2n^2 3!} + \frac{(2\pi)^5}{2n^4 5!} - \cdots \right) = a^2\pi$$

pues a partir del segundo término de la serie, los términos restantes convergen a cero. Luego el área del círculo de radio a es $a^2\pi$.

Ejercicios

1. Si $z_1 = c_1 e^{i\theta}$ y $z_2 = c_2 e^{i\varphi}$ son dos números complejos cualesquiera, probar que el triángulo de vértices z_1, O y z_2 tiene área A, dada por:

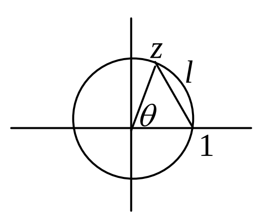
$$A = \frac{c_1 \circ c_2 \; sen(\theta - \varphi)}{2}$$

2. Demuestre que un polígono regular de n lados, inscrito en un círculo de radio a tiene área dada por

$$A_n = \frac{na^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

3. Utilizando el ejercicio anterior calcule el área de un pentágono inscrito en un círculo de radio 1.

4. Sea $z = e^{i\theta}$ un número complejo en el círculo unitario.



Probar que la distancia de l desde z hasta 1 es igual a:

$$l = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}$$

5. Usando el ejercicio anterior calcule el perímetro de un pentágono inscrito en un círculo de radio 1

6. Halle un par de identidades trigonométricas para $sen\,4\theta$ y $\cos 4\theta$ en función de $sen\,\theta$ y $\cos\theta$.

7. Demuestre que la serie

$$e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

   converge a un número real para todo x real.

8. Usando la serie anterior, calcule un valor aproximado de e con cinco cifras decimales.

9. Calcule el valor de las sumas

$$A = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 89^\circ$$

   y

$$B = sen\,1^\circ + sen 2^\circ + sen\,3^\circ + \cdots + sen\,89^\circ$$

   Tip : sea $z = e^{i\theta}$ $con\ \alpha = 1°$ *y calcule el valor de la suma de una progresión geométrica:*

$$S = \sum_{n=1}^{89} \left(e^{i\alpha}\right)^n$$

10. Probar que el conjunto de las rotaciones en el plano con eje de rotación en un punto a es un grupo.

11. Hallar la transformación que lleva el triángulo A de vértices $0, 2, i$, en el triángulo A' de vértices $z_1 = 5 - 5i,\quad z_2 = 5 - 3i\ \ y\ \ z_3 = 4 - 5i$.

Bibliografía:

1. Paul K. Rees, Fred W. Sparks. *Álgebra*. Reverté Ed. Edición 2005.

2. Paul K. Rees, Fred W. Sparks, Charles Sparks Rees. *Álgebra*. Ed. Mc Graw Hill. Décima Edición.

3. Louis Leithod. *Álgebra*. Ed. Harla. Edición 1995.

4. Stanley A. Smith, (et. Al.). *Álgebra*. Ed. Addison-Wesley. Edición 1992.

5. http://www.portalplanetasedna.com.ar/disputas_matematicas.htm

6. http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Libros/complejos.pdf

7. http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Los_numeros_complejos/complejos1.htm