INTRODUCCIÓN

El contenido de este trabajo es una continuación de un primer módulo titulado *Números Complejos: una Presentación Gráfica* [1], publicado en esta misma serie. Se desarrolla aquí el tema de *polinomios y raíces*, mediante un acercamiento poco convencional. Al igual que en el primer módulo, las representaciones gráficas se mantienen en un primer plano, pero el material presenta algunas características distintivas que merecen ser comentadas.

1. Todas las gráficas en [1] pueden construirse con lápiz y papel, mientras que en el presente trabajo se utilizan gráficas, tanto estáticas como dinámicas, hechas con computadora. Los paquetes computacionales empleados para construirlas son *Cabri Géomètre II* [2] y *Maple* [3].

2. A pesar de que la lectura del presente trabajo exige solamente conocimientos elementales de los softwares utilizados, a diferencia de [1], las actividades que integran este módulo están pensadas para realizarse en un salón de clase dotado de computadoras que cuenten con los softwares mencionados, así como los archivos a los que se refiere cada actividad.

El contenido matemático que se discute en este módulo gira alrededor de la pregunta: ¿Cuántas y de qué naturaleza son las raíces de un polinomio de grado n?, cuya respuesta aparece resumida en lo que se conoce como el Teorema Fundamental del Álgebra.

En las primeras dos secciones se dan algunas definiciones básicas y se aborda el problema de construir un polinomio cuyas raíces son conocidas. Cada vez que es posible se toman las gráficas con lápiz y papel como punto de partida.

En la sección 3 se pretende explorar y establecer la relación existente entre el número de raíces reales de un polinomio con coeficientes reales y las variaciones de signo de sus coeficientes. Las actividades que integran esta sección han sido diseñadas con *Cabri Géomètre II* y están pensadas para llevarse a cabo en una sala de cómputo.

En la sección 4 y última se analiza la gráfica de las raíces de un polinomio en el plano complejo. El propósito aquí es enunciar con precisón el Teorema Fundamental del Álgebra a partir de observar el número y naturaleza de las raíces de un polinomio (incluido el caso en el que los coeficientes son números complejos), representadas gráficamente.

1. POLINOMIOS Y RAÍCES

Nos proponemos estudiar aquí el comportamiento general de expresiones como la siguiente:

$$x^2-x+1$$

para todos los posibles valores de x, ya sean reales o complejos. De manera particular nos interesaremos en la búsqueda de aquellos valores de x que anulan esta expresión. Llamaremos entonces a la expresión $p(x)=x^2-x+1$ un *polinomio* de grado dos en la indeterminada x, y al caso particular en el que $p(x)=0$ lo llamaremos la *ecuación* $x^2-x+1=0$.

En el Ejemplo *7.1* de [l], veíamos que los valores de x que satisfacen la ecuación $x^2-x+1=0$, eran los números $x_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $x_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; estos números se conocen como *soluciones* de esta ecuación. Denotaremos con $p(x_1)$ y $p(x_2)$ la evaluación del polinomio en x_1 y x_2 respectivamente y como al evaluar $p(x)$ en x_1 y en x_2, se tiene $x_1^2-x_1+1=0$ y $x_2^2-x_2+1=0$, llamaremos *raíces* del polinomio a los números x_1 y x_2.

Como vimos antes, las soluciones de la ecuación $x^2-x+1=0$ no son números reales. Si consideramos todos los valores reales que puede tomar la indeterminada x y los graficamos en un sistema cartesiano contra los valores reales que toma el polinomio, obtendremos una gráfica como la siguiente:

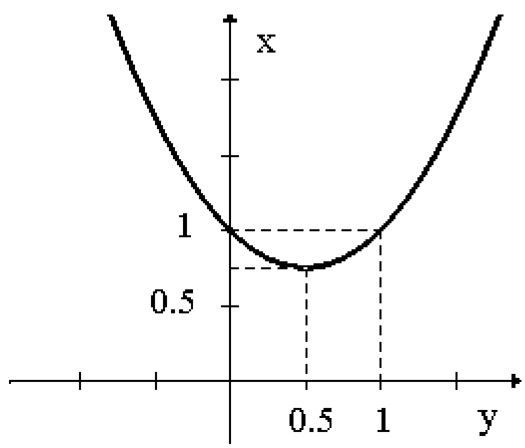

Figura 1

En la gráfica de la Figura 1 puede observarse que existen, por ejemplo, valores reales de x para los cuales $p(x)=1$, en este caso $x=0$ y $x=1$, sin embargo no existen valores reales de x para los que $p(x)=0$. puesto que si existieran, la gráfica cortaría al eje de las abscisas. Las raíces x_1 y x_2

encontradas para este polinomio son números complejos, pero la gráfica no proporciona información sobre ellos.

En la sección 9 de [1], vimos un procedimiento que permite calcular las raíces cúbicas de cualquier número complejo. Valiéndonos de este procedimiento podemos encontrar en particular las raíces cúbicas del número 1, o dicho de otra manera, encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación x^3-1=0. Estos valores son:

$$x_1=1,\ x_2=-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{y}\ x_3=-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2},$$

que son las raíces del polinomio $p(x)=x^3-1$. Si graficamos este polinomio como lo hicimos con el anterior, nos damos cuenta que la gráfica de $p(x)$ corta al eje de las abscisas en la raíz $x_1=1$ (ver Figura 2), pero de nuevo tenemos que la gráfica por sí misma no proporciona información sobre las raíces complejas.

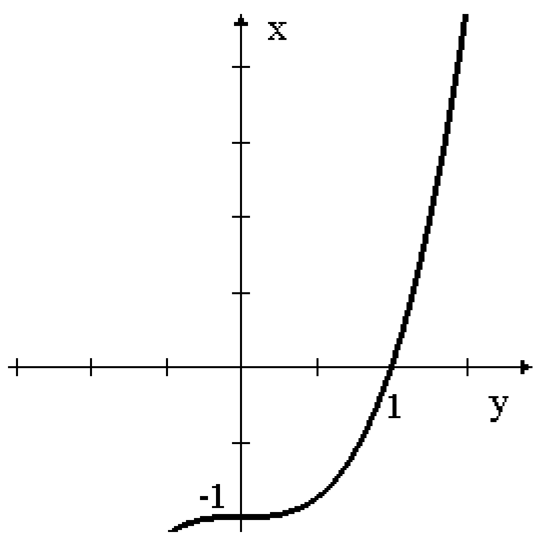

Figura 2

En general podemos describir un polinomio de grado n, como una suma de potencias no negativas de la indeterminada x multiplicadas por ciertos coeficientes numéricos, tal como se precisa en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. Un polinomio de grado n en la indeterminada x es una expresión de la forma $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, en donde n es un número natural cualquiera, todos los coeficientes a_i son números complejos y a_n es diferente de cero.

Aunque la definición anterior se refiere a coeficientes complejos, aquí estaremos interesados principalmente en polinomios con coeficientes reales. De acuerdo con esta definición no resultan polinomios aquellas expresiones que contengan la indeterminada x elevada a un exponente negativo o fraccionario. Si en la expresión $p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ sustituimos la indeterminada x por un número c real o complejo, obtenemos la igualdad:

$$p(c)=a_n c^n+a_{n-1}c^{n-1}+...+a_1c+a_0$$

En particular si $p(c)=0$, es decir si el polinomio se anula en c, decimos que c es una *raíz* del polinomio.

Para calcular las raíces de un polinomio de grado n, se requiere resolver la ecuación:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0,$$

y esta tarea no siempre resulta sencilla.

En el caso en que $n=2$, la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas proporciona una respuesta general al problema. Los algebristas italianos del siglo XVI[1] descubrieron la existencia de procedimientos similares para los casos en los que $n=3$ y $n=4$, pero no pudieron hacerlo para el caso $n=5$. Actualmente sabemos que tal método no existe, es decir, que es imposible calcular las raíces de un polinomio arbitrario de grado mayor o igual a cinco operando algebraicamente con los coeficientes como se hace con la fórmula general para el caso en el que $n=2$.

2. CONSTRUCCIÓN DE POLINOMIOS.

Hemos dicho que el problema de calcular las raíces de un polinomio dado no es un problema trivial. Sin embargo, el problema recíproco es relativamente sencillo: dado un conjunto de números reales o complejos, encontrar un polinomio con coeficientes reales para el cual estos números resulten raíces.

EJEMPLO 2.1. Construya un polinomio con coeficientes reales que tenga por raíces los números $1+i$, 1 y 3.

Si queremos que el polinomio se anule en $x=1+i$, $x=1$ y $x=3$, simplemente multiplicamos los términos lineales $x-(1+i)$, $x-1$ y $x-3$, para obtener:

$$p(x)=[x-(1+i)](x-1)(x-3)$$

[1] Si el lector tiene interés en la historia tejida alrededor de estos problemas durante el siglo XVI, puede consultar ([4], pp. 133-154) y si desea revisar con detalle las fórmulas que resuelven las ecuaciones de grado tres y cuatro, puede ir a ([5], pp. 237-245).

El polinomio obtenido se anulará en los valores pedidos en el ejemplo, veamos cuál es su expresión desarrollada:

$$\begin{aligned} p(x) &= [x-(1+i)](x^2-4x+3) \\ &= x^3-4x^2+3x-x^2+4x-3-ix^2+4ix-3i \\ &= x^3+(-5-i)x^2+(7+4i)x+(-3-3i) \end{aligned}$$

Hemos obtenido un polinomio de grado tres pero algunos de sus coeficientes son complejos. Al multiplicar los tres factores de grado uno para construir el polinomio, se ha supuesto implícitamente que el polinomio es de grado tres. Pero si hubiera un polinomio con las raíces pedidas y que tuviera coeficientes reales, al tener en particular la raíz $1+i$ tendría también la raíz $1-i$ (véase la sección 7 de [1]). Si agregamos el factor lineal $x-(1-i)$, entonces el polinomio construido resulta:

$$p(x) = [x-(1-i)][x-(1+i)](x-1)(x-3)],$$

y al desarrollar los productos se tiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2-2x+2)(x^2-4x+3) \\ &= x^4-6x^3+13x^2-14x+6, \end{aligned}$$

que efectivamente es un polinomio con coeficientes reales con las raíces pedidas, aunque ha resultado de grado cuatro.

En general si tenemos un conjunto finito de números, la construcción de un polinomio con coeficientes reales, del cual estos números sean raíces, no parece muy complicado, siempre y cuando tomemos en cuenta que la existencia de números complejos en el conjunto implica que los conjugados de estos números también deben ser raíces.

EJERCICIO 2.1. ¿Se puede construir un polinomio con coeficientes reales, de grado tres, y tal que sus tres raíces sean números no-reales? Justifique su respuesta.

EJEMPLO 2.2. Construya y grafique un polinomio de grado tres que tenga tres raíces reales.

Sean por ejemplo $x_1=-1$, $x_2=1$ y $x_3=2$ las raíces reales. Multipliquemos los factores lineales $x+1$, $x-1$ y $x-2$ y llamemos $p(x)$ al producto:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)(x-1)(x-2) \\ &= x^3-2x^2-x+2. \end{aligned}$$

Por la manera como se ha construido, es claro que $p(-1)=0$, $p(1)=0$ y $p(2)=0$. También es claro que si k es cualquier número real distinto de cero, entonces el polinomio $q(x)=k(x+1)(x-1)(x-2)$ también cumple con las condiciones pedidas. En la Figura 3, puede observarse que la gráfica de $p(x)$ corta al eje de las abscisas justamente en las raíces dadas.

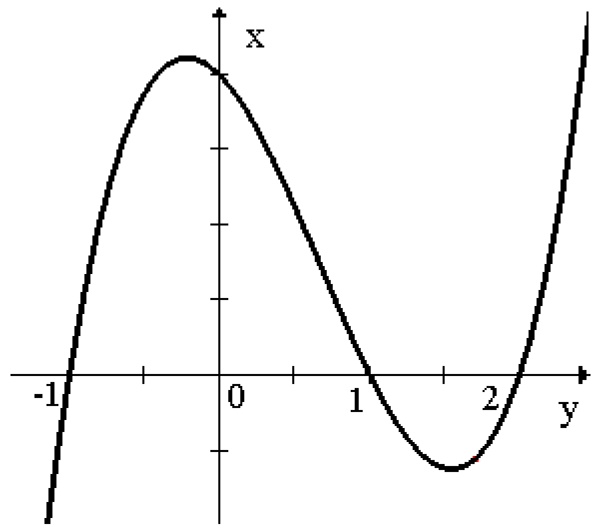

Figura 3

En el ejemplo anterior hemos construido el polinomio con tres raíces reales distintas. Esta restricción no se especificaba y evidentemente podríamos haber tomado tres raíces iguales. Por ejemplo si $x_1=x_2=x_3=5$, al multiplicar el término lineal $(x-5)$ tres veces por sí mismo tendríamos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-5)(x-5)(x-5) \\ &= x^3-15x^2+75x-125. \end{aligned}$$

Este polinomio tiene al número cinco como su única raíz. Otros polinomios como $p_1(x)=(x-5)$, $p_2(x)=(x-5)(x-5)$ o $p_3(x)=(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)$, distintos a $p(x)$ tienen también al 5 como su única raíz. La diferencia entre estos polinomios estriba en el número de veces que contienen al factor $(x-5)$. Si queremos distinguir estos polinomios por el número de raíces que tienen, vamos a decir que el número máximo de veces que aparece el factor $(x-5)$ es el número de veces que la raíz se repite. Llamaremos a éste número máximo de veces la *multiplicidad* de la raíz. Así por ejemplo, el polinomio $p_1(x)$ tiene una raíz de multiplicidad 1, pero el polinomio $p(x)$ tiene una raíz de multiplicidad 3. Formalizaremos la noción de multiplicidad en la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.1. Si x_0 es una raíz del polinomio $p(x)$ y la factorización de este polinomio contiene el factor $(x-x_0)^m$, pero no contiene el factor $(x-x_0)^{m+1}$, diremos que x_0 es una raíz de multiplicidad m del polinomio $p(x)$. En el caso particular en el que $m=1$ se dice que x_0 es una raíz *simple*.

EJERCICIO 2.2. Construya un polinomio con coeficientes reales que tenga una raíz real de multiplicidad 2 y una raíz no real de multiplicidad 2. ¿De qué grado resultó el polinomio construido?

EJERCICIO 2.3. Grafique por separado los polinomios $p(x)=(x\text{-}3)^2$ y $q(x)=(x\text{-}3)^4$. Si solamente contara con las gráficas de estos dos polinomios, ¿podría usted distinguir que el número 3 es una raíz de multiplicidad 2 para $p(x)$, pero es de multiplicidad 4 para $q(x)$?

Tanto el Ejercicio 2.1 como los Ejemplos 2.1 y 2.2, ilustran el hecho de que dados tres números cualesquiera, no siempre se puede construir un polinomio de grado tres con coeficientes reales, del cual sean raíces. La tabla siguiente muestra un resumen de estos resultados, llene la casilla en blanco con el resultado del Ejercicio 2.1.

Casos en los que se puede construir un polinomio de grado tres con coeficientes reales		
Número de raíces propuestas		Caso
Reales	No reales	
3	0	Posible
2	1	Imposible
1	2	Posible
0	3	

EJERCICIO 2.4. Complete las dos tablas siguientes en las que se resumen los casos posibles para polinomios de grados cuatro y cinco.

Casos en los que se puede construir un polinomio de grado cuatro con coeficientes reales		
Número de raíces propuestas		Caso
Reales	No reales	
4	0	
3	1	
2	2	
3	1	
0	4	

Casos en los que se puede construir un polinomio de grado cinco con coeficientes reales		
Número de raíces propuestas		Caso
Reales	No reales	
5	0	
4	1	
3	2	
2	3	
1	4	

0	5	

EJERCICIO 2.5. Observe los casos posibles en las tres tablas anteriores y conteste las siguientes preguntas:

a) Si tenemos un polinomio de grado *n* con coeficientes reales. ¿Cómo considera usted que debe ser *n*, para garantizar que el polinomio tiene por lo menos una raíz real? Justifique su respuesta.

b) ¿Puede construirse un polinomio de grado par con coeficientes reales que tenga un número impar de raíces reales? Justifique su respuesta.

c) ¿Puede construirse un polinomio de grado impar con coeficientes reales que tenga un número par de raíces reales? Justifique su respuesta.

3. ESTUDIANDO RAÍCES DE POLINOMIOS CON CABRI.

En la presente sección se desarrollan una serie de actividades a través de las cuales se pretenden estudiar algunos tópicos relacionados con raíces de polinomios. Estas actividades están basadas principalmente en la representación gráfica dinámica de un polinomio, construida con el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II.

3.1 MULTIPLICIDAD DE LAS RAÍCES REALES.

Como se ha visto en la primera sección, las raíces reales de un polinomio se representan como puntos de intersección del eje de las abscisas con la gráfica del polinomio. Pero, como lo ilustra el Ejemplo 2.3, no siempre es posible distinguir en la gráfica la multiplicidad de estas raíces. En este apartado discutiremos la noción de multiplicidad de las raíces de un polinomio desde el punto de vista gráfico.

ACTIVIDAD 3.1.

Instrucciones: Abra el archivo llamado “poly3” y grábelo con el nombre “poly31” en su carpeta de trabajo. La gráfica de este archivo es similar a la que aparece en la Figura 4.

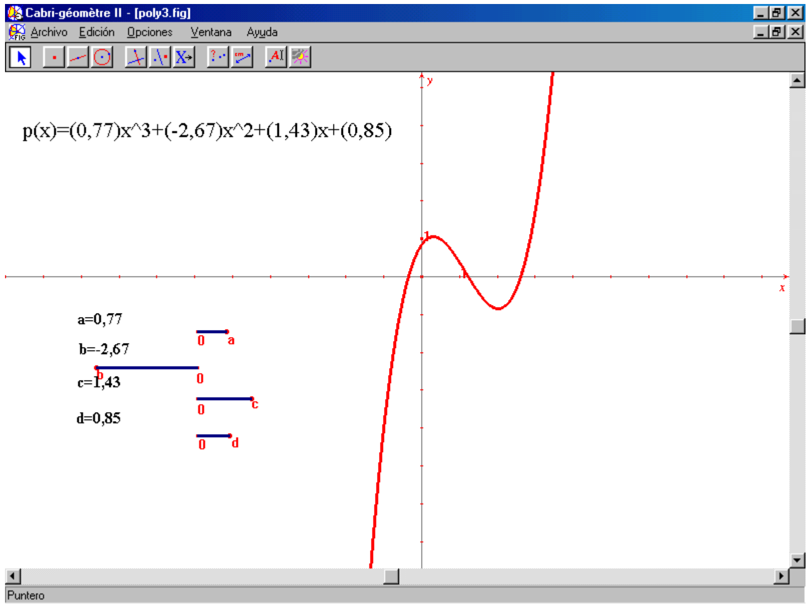

Figura 4

a) Observe la gráfica de la Figura 4 para contestar las preguntas siguientes:

1) ¿Cuántas raíces reales tiene en total este polinomio?

2) ¿Cuántas de éstas raíces son positivas?

b) "Arrastre" *c* hacia la derecha hasta que el polinomio ya no interseque la parte positiva del eje de las abscisas. Responda la pregunta:

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales tendrá el nuevo polinomio?

c) "Arrastre" *c* de regreso hacia la izquierda hasta obtener la gráfica de un polinomio que conserve una raíz negativa, y que su gráfica sea tangente a la parte positiva del eje de las abscisas. Conteste las preguntas:

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales tendrá el nuevo polinomio?

2) ¿Qué multiplicidad tendrá la raíz positiva del nuevo polinomio? Justifique sus respuestas.

ACTIVIDAD 3.2.

Instrucciones. Abra de nuevo el archivo "poly3" y grábelo en su carpeta de trabajo con el nombre "poly32".

a) "Arrastre" el punto *d* hasta que tome el valor cero y luego conteste.

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales, tendrá el nuevo polinomio?

2) Justifique algebraicamente por qué el nuevo polinomio debe tener una raíz igual a cero.

b) "Arrastre" ahora el punto c hasta que tome el valor cero y luego conteste:

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales tiene el polinomio así obtenido? Justifique algebraicamente su respuesta.

2) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de las raíces reales? Justifique algebraicamente su respuesta.

c) "Arrastre" el punto *b* hasta que tome el valor cero y luego conteste las preguntas.

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales tiene el polinomio obtenido? Justifique algebraicamente su respuesta.

2) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de las raíces reales? Justifique algebraicamente su respuesta.

En las dos actividades anteriores puede verse que la representación gráfica de un polinomio muestra con claridad la existencia de raíces reales, pero no es igualmente clara cuando se trata de establecer la multiplicidad de tales raíces.

Para discutir este problema, vamos a introducir una nueva herramienta, que usualmente es objeto de estudio del cálculo diferencial, pero que será definida aquí en términos algebraicos.

DEFINICIÓN 3.1 Si $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, entonces llamaremos la *derivada* de $p(x)$, al polinomio de grado n-1 definido como:

$$p'(x)= na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+\ldots+2a_2x+a_1.$$

Con esta definición pueden demostrarse, también en términos algebraicos, las conocidas fórmulas de derivación:

$$(p(x)+q(x))'= p'(x)+q'(x),$$

$$(p(x)q(x))'= p(x)q'(x)+q(x)p'(x).$$

No se van a demostrar aquí, pero quizá se requieran en algunas de las actividades siguientes.

ACTIVIDAD 3.3.

Instrucciones. Abra el archivo "poly3derivada" y grábelo con el nombre "poly3derivada1". Este archivo contiene una gráfica similar a la que se muestra en la Figura 5, en ella se muestra la representación algebraica y gráfica de los polinomios $p(x)$ y $p´(x)$, el primero es un polinomio de grado tres, el segundo es el polinomio que resulta al derivar $p(x)$. Realice con este archivo las actividades siguientes.

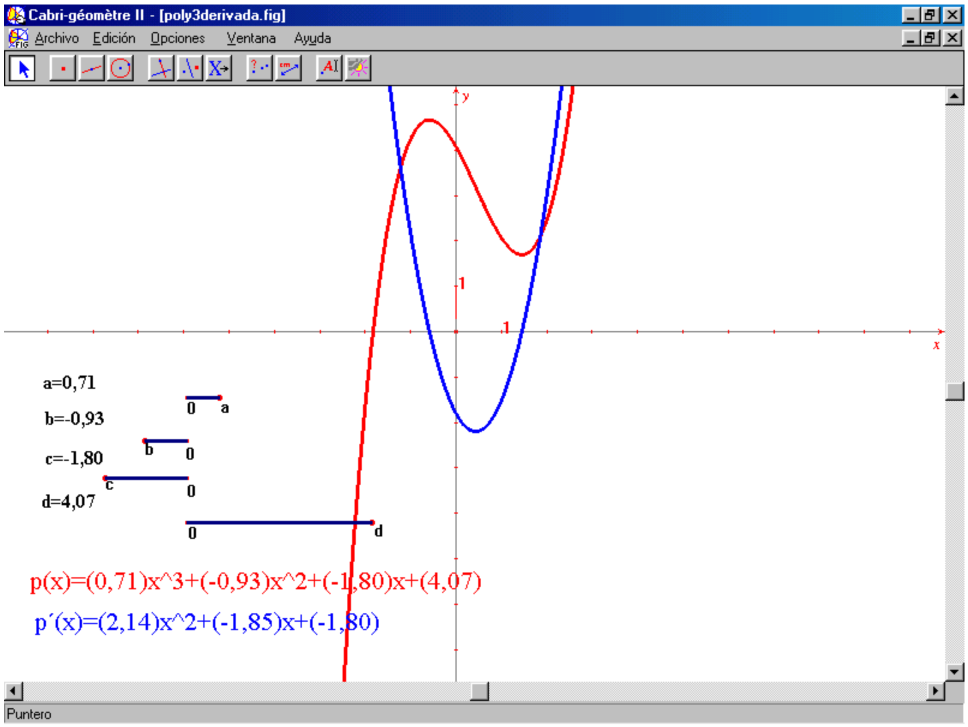

Figura 5

a) "Arrastre" el punto d hacia la izquierda (sin que d llegue a ser cero) hasta que el polinomio $p(x)$ sea tangente en algún punto a la parte positiva del eje de las abscisas. Si llamamos x_0 al número real negativo donde el nuevo polinomio se anula y x_1 al número real positivo donde el nuevo polinomio se anula, conteste las preguntas siguientes:

1) ¿Por qué la gráfica del polinomio $p´(x)$ no se alteró al mover d?

2) ¿Cuál es el valor del polinomio $p´(x)$ en x_0 y x_1?

b) Deje la computadora por un momento y escriba en su hoja de respuestas el polinomio $r(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, donde a, b y c son números reales todos diferentes entre sí.

1) Verifique algebraicamente que ninguno de los números a, b y c puede ser raíz de la derivada de $r(x)$.

2) Explique por qué mientras que el polinomio $r(x)$ y su derivada, obtenidos aquí, no tienen raíces comunes, el polinomio y la derivada obtenidos en el inciso (a) de esta actividad, tienen una raíz común.

ACTIVIDAD 3.4.

Instrucciones. Abra el archivo “poly3derivada” y grábelo con el nombre “poly3derivada2”. Realice con este archivo la actividad siguiente y conteste las preguntas correspondientes.

a) “Arrastre” d hacia la izquierda (lo suficiente para que d sea negativo) hasta que el polinomio $p(x)$ sea tangente en algún punto a la parte negativa del eje de las abscisas. Si llamamos x_0 al número real negativo donde el nuevo polinomio se anula y x_1 al número real positivo donde el nuevo polinomio se anula, conteste las preguntas siguientes:

1) ¿Por qué la gráfica del polinomio $p'(x)$ no se alteró al “Arrastrar” el punto d?

2) ¿Cuál es el valor del polinomio $p'(x)$ en x_0 y x_1?

3) ¿Qué información nos proporciona la gráfica de $p'(x)$, sobre la multiplicidad de las raíces reales del nuevo polinomio $p(x)$ obtenido?

ACTIVIDAD 3.5.

Instrucciones. El polinomio $p(x)$, del archivo “poly3derivada”, también puede transformarse modificando otros coeficientes. Abra este archivo y grábelo en su carpeta de trabajo con el nombre “poly3derivada3”. Realice la actividad siguiente:

a) Mueva por ejemplo c hacia la izquierda hasta que la gráfica de $p(x)$ sea tangente en algún punto a la parte positiva del eje de las abscisas. El polinomio $p'(x)$ se transformará también como consecuencia de este cambio. Si llamamos x_0 al número real negativo para el que el nuevo polinomio $p(x)$ se anula y x_1 al número real positivo para el cual el nuevo polinomio $p(x)$ se anula, conteste las preguntas siguientes.

1) Explique por qué, con el movimiento de c, a diferencia de lo que sucede en las actividades *3.3* y *3.4,* el polinomio $p'(x)$ se altera.

2) ¿Cuál es el valor del nuevo polinomio $p'(x)$ en x_0 y x_1?

3) ¿Qué información nos proporciona la gráfica del nuevo $p'(x)$ sobre la multiplicidad de las raíces reales del nuevo polinomio $p(x)$?

ACTIVIDAD 3.6.

Instrucciones. Abra el archivo “poly3derivada” y grábelo con el nombre “poly3derivada4”. Realice en este archivo las actividades siguientes.

a) “Arrastre” d hasta que tome el valor cero y luego c hasta que tome también el valor cero. Observe los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$, para contestar las preguntas siguientes:

1) ¿Por qué el nuevo polinomio $p(x)$ tiene una raíz en x=0? Justifique algebraicamente su respuesta.

2) ¿Cuál es la multiplicidad de la raíz que tiene el nuevo polinomio $p(x)$ en x=0?

b) A partir de las expresiones algebraicas de los nuevos $p(x)$ y $p´(x)$, conteste:

1) ¿Cuántas veces el factor x está contenido en la factorización del nuevo polinomio $p(x)$?

2) ¿Cuántas veces el factor x está contenido en la factorización del nuevo polinomio $p´(x)$?

ACTIVIDAD 3.7.

Instrucciones. Abra el archivo “poly3derivada” y grábelo con el nombre “poly3derivada5”. Realice en este archivo las actividades siguientes.

a) “Arrastre” el punto d hasta que tome el valor cero y luego haga lo mismo con los puntos c y b. Ahora tendrá en pantalla los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$. Conteste las preguntas siguientes:

1) ¿Por qué el nuevo polinomio $p(x)$ tiene una raíz en x=0? Justifique algebraicamente su respuesta.

2) ¿Cuál es la multiplicidad de la raíz que tiene el nuevo polinomio $p(x)$ en x=0?

b) A partir de las expresiones algebraicas de los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$ obtenidos en el inciso (a) anterior, conteste:

1) ¿Cuántas veces aparece el factor x en el nuevo polinomio $p(x)$?

2) ¿Cuántas veces aparece el factor x en el nuevo polinomio $p´(x)$?

3) ¿Cuál es la multiplicidad de la raíz x=0, del nuevo polinomio $p´(x)$?

c) Deje un momento la computadora. Si se tiene la gráfica de un polinomio $p(x)$ cualquiera, pero no se cuenta con la gráfica de la derivada $p´(x)$, conteste la pregunta:

1) ¿Cómo podría identificar las raíces múltiples de $p(x)$ con criterios estrictamente gráficos?

d) Olvide de momento las gráficas que tiene en pantalla. En general si $p(x)$ es un polinomio cualquiera de grado n, que tiene una raíz de multiplicidad m en x=0.

1) ¿Cuál será la multiplicidad de esta raíz para el polinomio $p'(x)$?

ACTIVIDAD 3.8.

Instrucciones. Esta actividad no exige usar la computadora, solamente pide recordar que de acuerdo con la definición de raíz múltiple dada en la sección 2, si un polinomio $p(x)$ tiene una raíz x_0 de multiplicidad m, entonces puede escribirse como $p(x)=(x-x_0)^m s(x)$, donde $s(x)$ es otro polinomio con coeficientes reales.

a) Utilice la fórmula de la derivada de un producto de polinomios para calcular $p'(x)$ como la derivada del producto de $(x-x_0)^m$ y $s(x)$. Factorice la expresión de $p'(x)$ obtenida. Observe la factorización de $p'(x)$ para contestar las preguntas siguientes.

1) ¿Cuántas veces aparece el factor $(x-x_0)$ en la factorización de $p'(x)$?

2) Si $p(x)$ tiene una raíz x_0 de multiplicidad m, ¿de qué multiplicidad es la raíz x_0 del polinomio $p'(x)$?

3.2 NÚMERO DE RAÍCES DE UN POLINOMIO Y VARIACIONES DE SIGNO.

Sea un polinomio $p(x)$ de grado n, cuyos coeficientes son números reales y que ha sido ordenado según el orden decreciente de sus potencias, es decir:

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,\ \ a_i\neq 0.$$

Consideremos la secuencia formada por sus coeficientes, esto es:

$$a_n\ \ a_{n-1}\ \ a_{n-2}\ \ \ldots\ \ a_2\ \ \ a_1\ \ a_0.$$

Cada vez que en esta secuencia los términos consecutivos a_i y a_{i-1} tienen signos opuestos diremos que la secuencia tiene una *variación de signo* y al número de veces que esto sucede le llamaremos el *número de variaciones de signo* de los coeficientes del polinomio. Si alguno de los coeficientes a_k del polinomio fuera cero, entonces para calcular el número de variaciones que presentan sus coeficientes, el término a_k simplemente se omite de la secuencia.

Por ejemplo, los coeficientes del polinomio

$$p(x)=5x^4-3x^3+2x^2-2x-6,$$

presentan tres variaciones de signo, puesto que en la secuencia

$$5,\ \ -3,\ \ 2,\ \ -2,\ \ -6,$$

hay tres pares de números consecutivos que tienes signos opuestos. En cambio los coeficientes del polinomio:

$$q(x)=7x^5-x^3+2x+1,$$

tienen dos variaciones de signo, puesto que en la secuencia

$$7,\ -1,\ 2,\ 1,$$

solamente existen dos parejas de números consecutivos que tienen signos opuestos.

En una secuencia de coeficientes

$$a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2}\ \ldots\ a_2\ \ a_1\ a_0,$$

el número de variaciones de signo no se altera si un coeficiente a_i se hace variar sin cambiar su signo. En cambio si el signo de uno de sus coeficientes se altera, entonces el número de variaciones pudiera modificarse.

ACTIVIDAD 3.9.

Instrucciones. Abra el archivo “poly3derivada” y grábelo con el nombre “poly3derivada6”. Realice en este archivo las actividades siguientes y conteste las preguntas correspondientes.

a) “Arrastre” el punto *a* hasta que tome el valor cero y luego haga lo mismo con el punto *b*. Se tienen ahora en pantalla los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$, conteste las preguntas siguientes:

1) ¿De qué grado son los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$?

2) ¿Podrá el nuevo polinomio $p(x)$ tener raíces múltiples?

3) ¿Cuál es el número de variaciones de signo del nuevo polinomio $p(x)$? y ¿Cuántas raíces positivas tiene el polinomio $p(x)$?

b) “Arrastre” los puntos *c* y *d* manteniendo fijo el número de variaciones de signo de $p(x)$ (que en este caso es igual a 1).

1) ¿Cuántas raíces positivas se observan en cada uno de los nuevos polinomios así generados?

c) Deje un momento la computadora para responder la pregunta siguiente:

1) Si un polinomio de grado uno presenta una variación de signo. ¿Cuántas raíces positivas posee? Justifique algebraicamente su respuesta.

d) "Arrastre" ahora los puntos *c* y *d* de manera tal que se mantenga fijo e igual a 0 el número de variaciones de signo de $p(x)$.

1) ¿Cuántas raíces positivas se observan en los nuevos polinomios $p(x)$?

e) Olvide las gráficas de la computadora por un momento para responder la pregunta siguiente:

1) Si un polinomio de grado 1 presenta 0 variaciones de signo. ¿Cuántas raíces positivas posee? Justifique algebraicamente su respuesta.

ACTIVIDAD 3.10.

Instrucciones. Abra el archivo "poly3derivada" y grábelo con el nombre "poly3derivada7".

a) "Arrastre" el punto *a* hasta que tome el valor 0. Se tienen ahora en pantalla los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$, conteste las preguntas siguientes:

1) ¿De qué grado son los nuevos polinomios $p(x)$ y $p´(x)$?

2) ¿Podrá el nuevo polinomio $p(x)$ tener raíces múltiples?

3) ¿Cuál es el número de variaciones de signo del nuevo polinomio $p(x)$? y ¿Cuántas raíces positivas posee?

b) "Arrastre" los puntos *b*, *c* y *d* manteniendo fijo el número de variaciones de signo de $p(x)$ (que en este caso es igual a 1).

1) ¿Cuántas raíces positivas se observan en los nuevos polinomios $p(x)$ así generados?

c) Deje por un momento la computadora para responder la pregunta siguiente:

1) Si un polinomio de grado 2 presenta una variación de signo. ¿Cuántas raíces positivas posee? Justifique algebraicamente su respuesta.

d) Vuelva a la computadora y "Arrastre" ahora los puntos *b*, *c* y *d* de tal manera que mantenga fijo e igual a cero, el número de variaciones de signo de los polinomios $p(x)$ generados.

1) ¿Cuántas raíces positivas se observan en los nuevos polinomios $p(x)$?

e) Deje la computadora por un momento para contestar la pregunta siguiente.

1) Si un polinomio de grado dos presenta cero variaciones de signo. ¿Cuántas raíces positivas posee? Justifique algebraicamente su respuesta.

f) "Arrastre" ahora los puntos *b*, *c* y *d* de tal manera que mantenga fijo e igual a 2 el número de variaciones de signo de los polinomios $p(x)$ generados.

1) ¿Cuántas raíces positivas se observan en los nuevos polinomios $p(x)$? (Si entre los polinomios $p(x)$ generados apareciera alguno con una raíz positiva de multiplicidad 2, cuente esta raíz dos veces).

g) Deje la computadora por un momento para contestar la pregunta siguiente.

1) Si un polinomio de grado dos presenta dos variaciones de signo. ¿Cuántas raíces positivas posee, tomando en cuenta sus multiplicidades? Justifique algebraicamente su respuesta.

ACTIVIDAD 3.11.

Instrucciones. Abra el archivo "poly3derivada" y grábelo con el nombre "poly3derivada8". Realice en este archivo las actividades que se indican.

a) En la tabla siguiente aparecen todos las posibles combinaciones de signos que pudieran tener los coeficientes de un polinomio $p(x)$ de grado 3. Para cada caso "Arrastre" a, b, c y d respetando la combinación de signos indicada y llene las casillas que aparecen en blanco en la tabla. Recuerde que si encuentre alguna raíz positiva múltiple, el conteo deberá tomar en cuenta la multiplicidad.

	a	b	c	d	Número de variaciones de signo	Número de raíces positivas
1	+	+	+	+		
2	+	+	+	-		
3	+	+	-	+		
4	+	+	-	-		
5	+	-	+	+		
6	+	-	+	-		
7	+	-	-	+		
8	+	-	-	-		
9	-	+	+	+		
10	-	+	+	-		
11	-	+	-	+		
12	-	+	-	-		
13	-	-	+	+		
14	-	-	+	-		
15	-	-	-	+		
16	-	-	-	-		

b) Revise en la tabla anterior cuántas raíces positivas le corresponden a cada número distinto de variaciones de signo y llene la tabla siguiente para resumir sus resultados.

Número de variaciones de signo	Número de raíces positivas encontradas
0	
1	
2	
3	

ACTIVIDAD 3.12.

Instrucciones. Abra el archivo "poly4" y grábelo con el nombre "poly41". Realice en este archivo las actividades que se indican.

a) En la tabla siguiente aparecen todos las posibles combinaciones de signo que pudieran tener los coeficientes de un polinomio $p(x)$ de grado cuatro. Para cada caso "Arrastre" a, b, c, d y e respetando la combinación de signos indicada y llene las casillas que aparecen en blanco en la tabla. Recuerde que si encuentra alguna raíz positiva múltiple, el conteo deberá tomar en cuenta la multiplicidad.

	b	*c*	*d*	*e*	*f*	Número de variaciones de signo	Número de raíces positivas
1	+	+	+	+	+		
2	+	+	+	+	-		
3	+	+	+	-	+		
4	+	+	+	-	-		
5	+	+	-	+	+		
6	+	+	-	+	-		
7	+	+	-	-	+		
8	+	+	-	-	-		
9	+	-	+	+	+		
10	+	-	+	+	-		
11	+	-	+	-	+		
12	+	-	+	-	-		
13	+	-	-	+	+		
14	+	-	-	+	-		
15	+	-	-	-	+		
16	+	-	-	-	-		

17	-	+	+	+	+		
18	-	+	+	+	-		
19	-	+	+	-	+		
20	-	+	+	-	-		
21	-	+	-	+	+		
22	-	+	-	+	-		
23	-	+	-	-	+		
24	-	+	-	-	-		
25	-	-	+	+	+		
26	-	-	+	+	-		
27	-	-	+	-	+		
28	-	-	+	-	-		
29	-	-	-	+	+		
30	-	-	-	+	-		
31	-	-	-	-	+		
32	-	-	-	-	-		

b) Revise en la tabla anterior cuántas raíces positivas le corresponden a cada número distinto de variaciones de signo y llene la tabla siguiente para resumir sus resultados.

Número de variaciones de signo	Número de raíces positivas encontradas
0	
1	
2	
3	
4	

c) Tome en cuenta los resultados obtenidos en las tablas de las actividades anteriores para contestar la pregunta siguiente.

1) En general si $p(x)$ es un polinomio de grado n con k variaciones de signo. ¿Cuántas raíces positivas pudiera tener?

La relación existente entre las variaciones de signo y el número de raíces positivas puede aplicarse a cualquier polinomio con coeficientes reales. En particular al polinomio $n(x)=p(-x)$ construido a partir de $p(x)$. Es claro que si x_0 es un número real negativo para el cual $p(x_0)=0$, entonces $0=p(x_0)=n(-x_0)$ y por lo tanto x_0 es una raíz negativa para $p(x)$ y $-x_0$ una raíz positiva de

$n(x)$. De aquí se desprende que el número de raíces positivas de $n(x)$ es el mismo que el número de raíces negativas de $p(x)$.

Por otro lado, el polinomio $n(x)$ difiere de $p(x)$ sólo en el signo de algunos de sus coeficientes, por ejemplo, en el polinomio $p(x)=3x^3-5x^2-4x+3$ la secuencia de coeficientes es 3, -5, -4, 3, mientras que $n(x)=p(-x)=3(-x)^3-5(-x)^2-4(-x)+3=-3x^3-5x^2+4x+3$ tiene como secuencia de coeficientes -3, -5, 4, 3. Obsérvese entonces que la secuencia de coeficientes de $n(x)$ puede obtenerse directamente de la correspondiente a $p(x)$, simplemente cambiando los signos que tienen los coeficientes de las potencias impares de $p(x)$.

La Figura 6, muestra la gráfica de los polinomios $p(x)$ y $n(x)$, para el caso particular en el que ambos son de grado cinco.

ACTIVIDAD 3.13.

Instrucciones. Abra el archivo "poly5simétrico", que corresponde a la gráfica de la Figura 6 y grábelo con el nombre "poly5simétrico1". Realice en este archivo las actividades siguientes y responda las preguntas que se indican.

a) Compare los polinomios $p(x)$ y $n(x)$ de la Figura 6 y responda las preguntas:

1) ¿Cuántas raíces reales tiene $p(x)$ y cuántas $n(x)$?

2) ¿Cómo están relacionadas las raíces de $p(x)$ y $n(x)$?

3) ¿Cómo es la gráfica de $p(x)$ con respecto a la gráfica de $n(x)$?

b) A partir del polinomio $p(x)$ que aparece en la Figura 6, calcule el polinomio $n(x)= p(-x)$. Responda luego las preguntas.

1) ¿Cuántas variaciones de signo presenta el polinomio $n(x)$?

2) ¿Cuántas raíces positivas tiene el polinomio $n(x)$?

3) ¿Cuántas raíces negativas tiene el polinomio $p(x)$?

c) "Arrastre" los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*, para verificar que en todos los casos el número de raíces positivas de $n(x)$ es el mismo que el número de raíces negativas de $p(x)$.

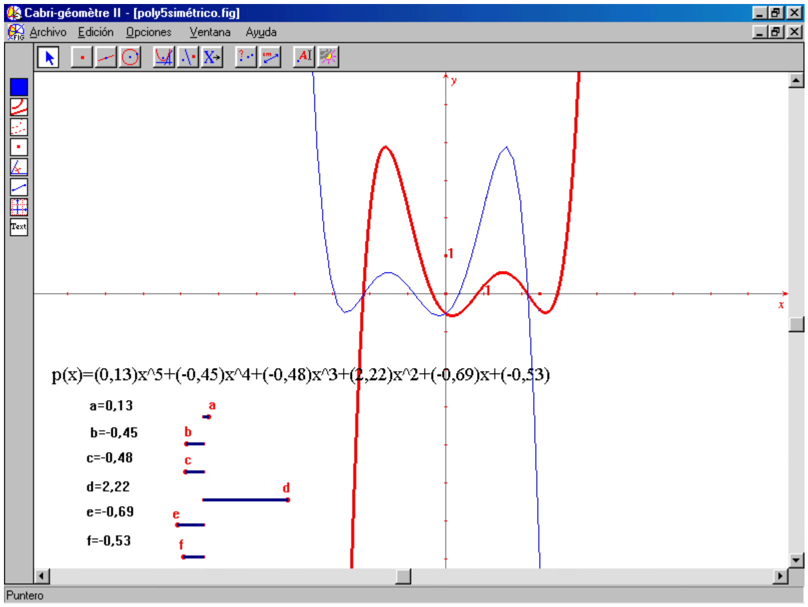

Figura 6

ACTIVIDAD 3.14.

Instrucciones. En cada uno de los siguientes polinomios $p(x)$, calcule sus variaciones de signo y las variaciones de signo de $n(x)=p(-x)$. A partir de las variaciones de signo calculadas establezca cuántas raíces positivas y cuántas negativas puede tener $p(x)$.

a) $p(x)=2x^5+3x^4-x^3+2x^2-8x+4$

b) $p(x)=x^6+x^5+x^4+2x^3-8x^2+3x+1$

c) $p(x)=5x^8-x^7+3x^6-2x^5+x^4-2x^3+7x^2-x+6$

4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO CON MAPLE.

En la sección 2 hemos podido construir polinomios a partir de conocer previamente sus raíces y cada vez que hemos utilizado n raíces para construir un polinomio, éste ha resultado ser de grado n. Vamos a plantear ahora el problema inverso en el que se tiene un polinomio arbitrario de grado n y se pretende investigar cuántas raíces tiene en total. Este problema podría resolverse si pudiéramos calcular todas sus raíces, pero como ya se ha señalado, no existen procedimientos algebraicos generales para hacer esto, cuando el polinomio es de grado mayor o igual a cinco. Por otra parte, la representación gráfica de un polinomio como una función real de variable real, permite solamente la visualización directa de las raíces reales como los puntos donde la gráfica del polinomio se interseca con el eje de las abscisas. En esta gráfica no están representadas las raíces complejas y, como se ha visto en la sección 3, la multiplicidad de las raíces reales no puede establecerse fácilmente a partir de esta gráfica. En suma podemos decir que la gráfica de un polinomio proporciona una información limitada acerca del número total de sus raíces.

Trataremos ahora de construir una representación gráfica donde todas las raíces de un polinomio aparezcan representadas, independientemente de si son reales o nó. Por nuestro interés en todas las raíces del polinomio, consideraremos el polinomio $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0$ como una función compleja de variable compleja, es decir un polinomio definido en el sistema de los números complejos, que toma sus valores en el sistema de los números complejos. Si en un polinomio como el anterior sustituimos z por su expresión cartesiana, es decir por $z=x+iy$, vamos a obtener:

$$p(x+iy)=a_n(x+iy)^n+a_{n-1}(x+iy)^{n-1}+...+a_1(x+iy)+a_0,$$

y desarrollando esta nueva expresión de $p(z)$ y agrupando por un lado los términos que contienen el factor i y por otro los que no lo contienen, siempre vamos a poder expresar $p(z)$ como la suma de su parte real más su parte imaginaria, es decir:

$$p(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

donde $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son polinomios en las indeterminadas x e y. Los polinomios $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones cuyo dominio es $\mathbf{R}^2$ y cuyo contradominio es $\mathbf{R}$ y por lo tanto pueden graficarse como superficies en $\mathbf{R}^3$, pero no estamos interesados en su comportamiento general, nos interesa solamente el estudio de aquellas parejas (x,y) para las cuales $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$, porque si para el punto (x_0, y_0) se tiene $u(x_0, y_0)=v(x_0, y_0)=0$, entonces el polinomio $p(z)$ se anula en el complejo $z_0=x_0+ iy_0$, puesto que:

$$p(z_0)=u(x_0, y_0)+iv(x_0, y_0)=0+i0=0,$$

y entonces z_0 es una raíz de $p(z)$. Pero $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$ pueden representarse gráficamente como curvas en $\mathbf{R}^2$, y si las graficamos en el mismo plano, los puntos (x_0, y_0) que satisfacen ambas, aparecerán como los puntos de intersección de estas curvas. Ilustremos estas ideas con un ejemplo:

EJEMPLO 4.1. Dado el polinomio $p(z)=z^2+1$

a) Encuentre su parte real $u(x,y)$ y su parte imaginaria $v(x,y)$.

b) Grafique en el mismo plano cartesiano las dos curvas $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$.

c) Localice en la gráfica los puntos (x,y) donde se intersecan estas curvas y concluya a partir de ellos cuántas raíces tiene el polinomio $p(z)$ y cuáles son.

Para contestar el inciso (a), sustituimos $z=x+iy$ en el polinomio $p(z)$, obteniendo:

$$\begin{aligned} p(x+iy) &= (x+iy)^2+1 \\ &= x^2+i2xy-y^2+1 \\ &= x^2-y^2+1+i2xy \end{aligned}$$

De donde concluimos que:

$$u(x,y)=x^2-y^2+1$$

$$v(x,y)=2xy.$$

Para responder el inciso (b), hemos graficado $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$ en el mismo plano usando *Maple*, obteniendo la gráfica que aparece en la Figura 7.

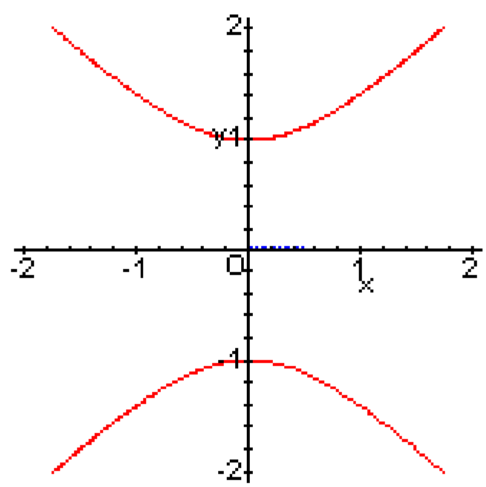

Figura 7

Para dar respuesta al inciso (c), obsérvese en la figura anterior que la gráfica de $u(x,y)= x^2-y^2+1=0$ ha resultado una hipérbola que interseca al eje de las ordenadas en los puntos (0,1) y (0,-1), mientras que la gráfica de $v(x,y) = 2xy = 0$ coincide con los ejes coordenados. Los puntos en los que $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$ se intersecan son entonces el (0,1) y el (0,-1). Por lo tanto $p(z)$ tiene dos raíces z_1 y z_2 cuyas parte real e imaginaria conocemos, estas raíces son entonces:

$$z_1 = 0+(1)i = i$$

$$z_2 = 0+(-1)i = -i.$$

La separación de la parte real y la parte imaginaria de $p(z)$, así como sus respectivas gráficas pueden hacerse en este caso sin ayuda computacional, pero si se pretende analizar polinomios de mayor grado, encontrar las expresiones de *u*(*x*,*y*) y *v*(*x*,*y*), y sobre todo graficarlas, pudiera resultar laborioso e impreciso si sólo se cuenta con lápiz y papel.

En la Figura 8 se muestra la lista de instrucciones en *Maple* que permiten calcular las expresiones algebraicas de *u*(*x*,*y*) y *v*(*x*,*y*), así como graficar ambas.

Estas mismas instrucciones pueden aplicarse, con algunas modificaciones menores, a otros polinomios. A continuación se explica el significado de esta lista de instrucciones y se dan las indicaciones para aplicarse a otros polinomios.

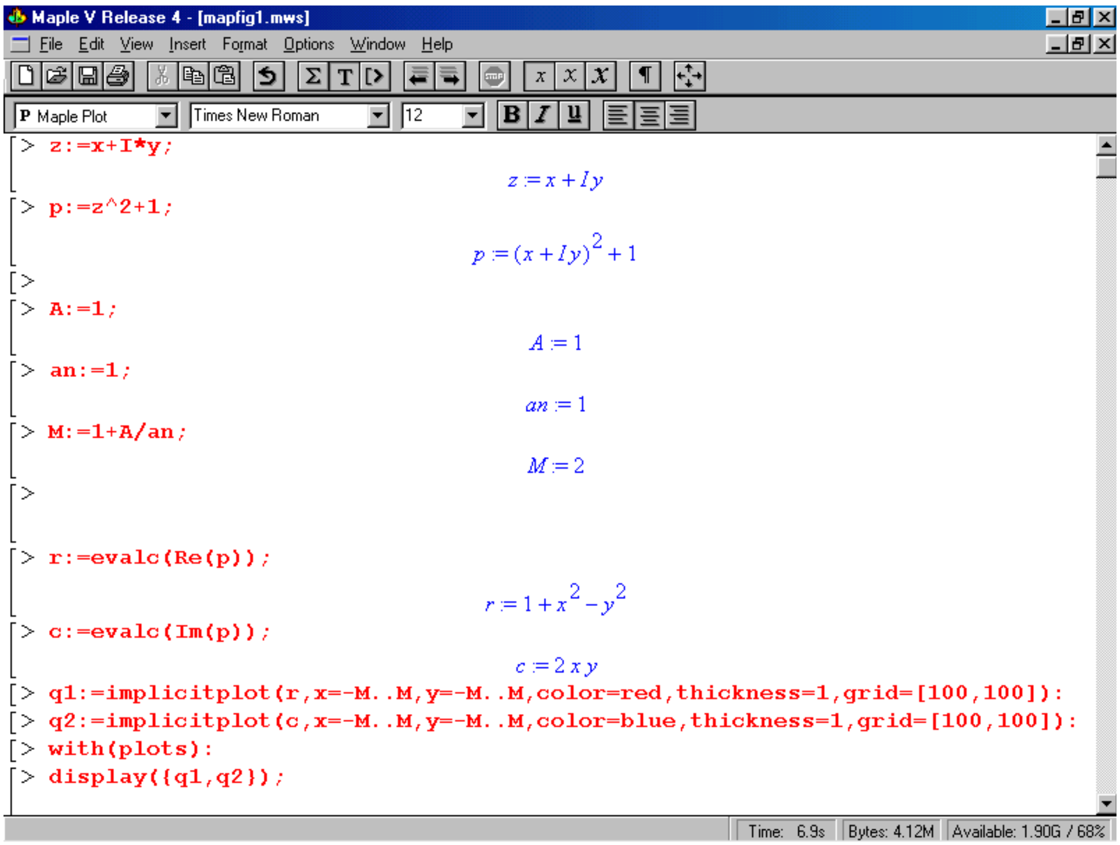

Figura 8

Para utilizar la lista de instrucciones que aparece en la Figura 8, siga las indicaciones que se dan a continuación.

1. Abra el paquete computacional *Maple*. Aparecerá en pantalla la hoja de trabajo de este software. Si al principio de la hoja aparece el caracter ">" entonces el modo de comandos está activado y puede iniciar el trabajo, si no sucede así, haga un "click" con el "mouse" en el botón  del menú para activar el modo de comandos.

2. En la lista de instrucciones que se proporciona (Figura 8), cada caracter ">" indica una línea de comando. Copie la lista de instrucciones y ejecute cada línea de comando manteniendo el cursor sobre la línea y presionando la tecla "enter". Al ejecutar las líneas de comando, *Maple* desplegará el resultado de la ejecución cuando la línea termine en punto y coma "`;`" y no desplegará el resultado cuando termine en dos puntos "`:`".

3. Si la lista de instrucciones ha sido copiada correctamente, al ejecutar la última línea de comando (> **`display({q1,q2});`**) deberá desplegarse la gráfica de la Figura 7.

Haremos ahora algunas observaciones al respecto de la lista de instrucciones a fin de aclarar lo que ésta significa en Maple:

En la primera instrucción, estamos pidiendo solamente que donde aparezca z, sea sustituida por $x+iy$, la letra **`I`** que se usa en la instrucción es una constante predefinida en *Maple* como $\sqrt{-1}$. En la segunda instrucción se está definiendo el polinomio bajo estudio (en este caso $p=z^2+1$). El símbolo "**`:=`**" es un operador de asignación, por ejemplo en la instrucción "**`z:=x+I*y;`**", se asigna a la variable **`z`** la expresión **`x+I*y`**.

Las tres instrucciones siguientes están destinadas a asegurar que en la gráfica aparezcan todas las raíces del polinomio. Puesto que el módulo de las raíces de un polinomio está siempre acotado por el número $M=1+A/a_n$, (véase, por ejemplo, [5] pp. 245-250) donde $A=\max\{|a_n|, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$, es decir el más grande de los módulos de los coeficientes del polinomio (para este caso A=1) y a_n es el módulo del coeficiente del término de mayor potencia (en este caso $a_n=1$). Esto significa que todas las raíces del polinomio se encuentran dentro del círculo centrado en el origen y de radio M y por lo tanto estarán también en el cuadrado que lo circunscribe. El número M se establece entonces con la intención de precisar en la instrucción **`implicitplot`** el producto cartesiano [-M,M]X[-M,M] como área de graficación; se garantiza así que todas las raíces del polinomio aparezcan representadas en la gráfica, puesto que el conjunto [-M,M]X[-M,M] contiene a todos los puntos cuya distancia al origen es menor o igual a M.

Las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ de las que hemos hablado antes son asignadas a **`r`** y **`c`** respectivamente mediante la función **`evalc`**, esta función es un evaluador simbólico que separa una expresión algebraica en su parte real y su parte imaginaria. Como la función **`(Re(p))`** selecciona la parte real del polinomio **`p,`** entonces **`evalc(Re(p))`** calcula la función que hemos llamado $u(x,y)$, y como **`Im(p)`** selecciona la parte imaginaria de **`p`**, entonces **`evalc(Im(p))`** calcula la función que hemos denotado $v(x,y)$.

A los términos **`q1`** y **`q2`** le han sido asignadas las gráficas de r=0 y c=0 respectivamente mediante el comando **`implicitplot`** que grafica estas curvas en un rango en x de -M a M y en el mismo rango en y (lo cual se indica en **`implicitplot`** como **`x=-M..M,y=-M..M`**). Con la opción **`color=red`** para **`q1`** y **`color=blue`** para **`q2`** se indica que queremos la gráfica de **`r`** en color rojo y la gráfica de **`c`** en color azul. La opción **`thickness=1`**, indica el grueso de línea que queremos para la gráfica (otros valores de **`thickness`** como 2 o 3, darían líneas más gruesas en la gráfica). Por último, la opción **`grid=[100,100]`** regula la suavidad de las curvas indicando el número de puntos a ser evaluados para su graficación, otros valores menores, como **`grid=[50,50]`** hacen que en la gráfica las curvas aparezcan menos "suaves".

Con **`with(plots)`** indicamos que estamos entrando al paquete gráfico de Maple, llamado **`plots`**, una de cuyas funciones es **`display`**, esta función permite desplegar dos o más gráficas simultáneamente en el mismo plano cartesiano, en este caso nos interesa que despliegue las gráficas **`q1`** y **`q2`**.

EJEMPLO 4.2. Dado el polinomio $p(z)= 4z^4+4z^3+z^2-6z+2$.

a) Si se toman en cuenta las variaciones de signo de $p(z)$ y de $n(z)=p(-z)$, ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

b) Calcule la parte real y la parte imaginaria de $p(z)$, es decir $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

c) Grafique en el mismo plano cartesiano las dos curvas $u(x,y)=0$ y $v(x,y)=0$.

d) Localice en la gráfica los puntos (x,y) donde se intersecan estas curvas y concluya a partir de ellos cuántas raíces tiene el polinomio $p(z)$ y cuál es la multiplicidad de cada una de ellas.

e) Encuentre el valor aproximado de las raíces de $p(z)$.

De acuerdo con los resultados obtenidos en la sección 3, para contestar el inciso (a), observamos que el número de variaciones de signo de los coeficientes de $p(z)$ es igual a dos y el de $n(z)=p(-z)= 4z^4-4z^3+z^2+6z+2$, también es igual a dos, entonces $p(z)$ puede tener dos o cero raíces positivas contando sus multiplicidades y dos o cero raíces negativas contando sus multiplicidades.

Para responder los incisos (b), (c) y (d), regresamos a la lista de instrucciones de *Maple* que aparece en la Figura 8, y hacemos en ella las siguientes sustituciones: `p:=z^2+1`, por `p:=4*z^4+4*z^3+z^2-6*z+2`; `A:=1` por `A:= 6` y `an:=1` por `an:=4`. La Figura 9 muestra cómo quedaría la lista de instrucciones después de hacer estas sustituciones y ejecutar de nuevo todas las líneas de comando en *Maple*.

Las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ solicitadas en el inciso (b), son desplegadas por *Maple* con los nombres de r y c respectivamente después de ejecutar las líneas de comando >**`r:=evalc(Re(p));`** y **`>c:= evalc(Im(p));`** (ver Figura 9).

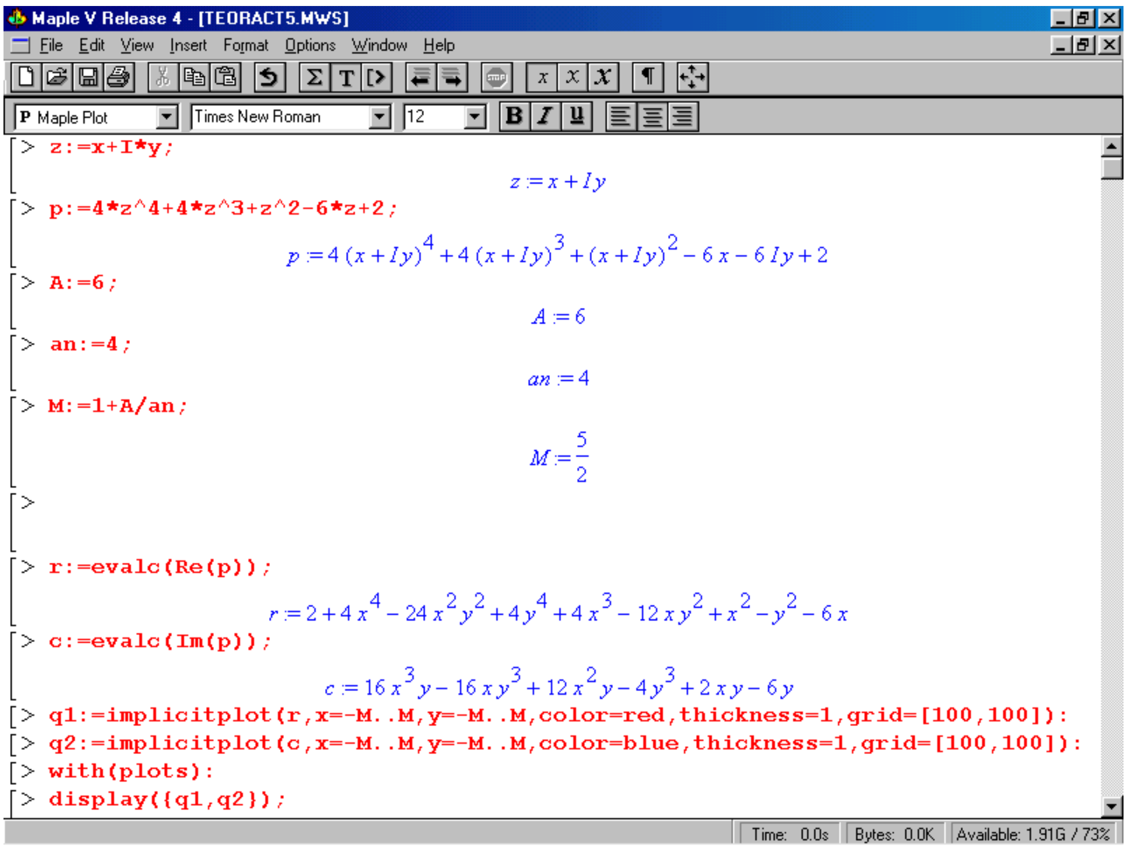

Figura 9

Las gráficas de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ pedidas en el inciso (c), son desplegadas por *Maple* después de ejecutar la última línea de comandos que aparece en la Figura 9, estas gráficas pueden observarse en la Figura 10, la de color rojo corresponde a $u(x,y)$ y la de color azul a $v(x,y)$.

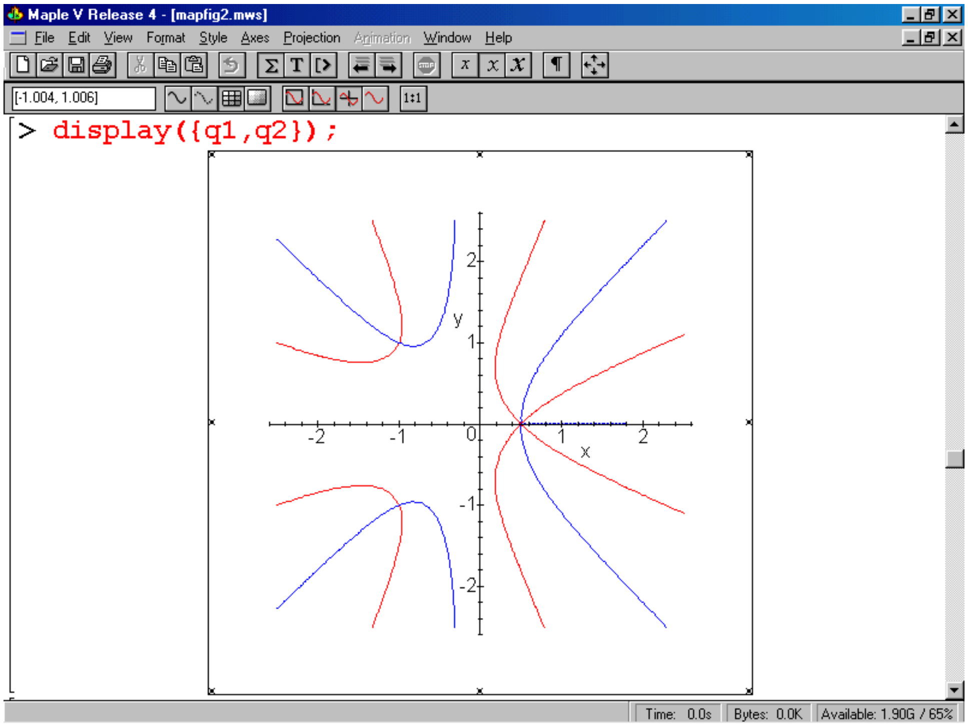

Figura 10

Para contestar el inciso (d), observe los puntos de intersección de las curvas *u*(*x*,*y*)=0 y *v*(*x*,*y*)=0 en la gráfica de la Figura 10. En el segundo cuadrante una rama de *u*(*x*,*y*)=0 se interseca con una rama de *v*(*x*,*y*)=0; como el punto de intersección está fuera del eje X, éste representa una raíz no real *simple*. Un razonamiento similar nos lleva a concluir que el punto de intersección que aparece en el tercer cuadrante, representa también una raíz no real simple. Observamos por último el punto de intersección que aparece sobre el eje X, en este punto coinciden dos ramas de la curva *u*(*x*,*y*)=0 y dos ramas de la curva *v*(*x*,*y*)=0, este punto denota por lo tanto la existencia de una raíz real de multiplicidad dos. En resumen el polinomio en cuestión tiene dos raíces no reales *simples* y una raíz real de multiplicidad dos.

Para encontrar el valor aproximado de las raíces al que se refiere el inciso (d), abra la ventana de Maple donde aparece desplegada la gráfica del polinomio. Haga un "click" sobre la gráfica para marcarla, Maple desplegará una barra de herramientas adicional que le presentará diferentes opciones para la gráfica, en la parte izquierda de esta barra aparecerá una pareja ordenada de números reales. Utilice el "mouse" para señalar con el puntero uno de los puntos de intersección de las gráficas, trate de hacerlo con la mayor precisión posible, luego haga un "click" sobre este punto. *Maple* sustituirá la pareja ordenada de números por las coordenadas del punto sobre el que ha hecho “clic”. Las coordenadas de este punto son una aproximación a la parte real e imaginaria respectivamente de una raíz del polinomio. En la Figura 10, por ejemplo, después de un “clic” sobre la raíz del segundo cuadrante, puede verse en la parte superior izquierda de la pantalla la pareja (-1.004, 1.006). Esto significa que la raíz del segundo cuadrante es aproximadamente -1.004+ (1.006)i, de manera similar pueden obtenerse aproximaciones para las otras dos raíces.

ACTIVIDAD 4.1

Abra el software *Maple*, luego abra el archivo titulado “graíces” que contiene la secuencia de instrucciones de la Figura 8, ejecútelas y verifique que se obtiene la gráfica[2] del ejemplo *4.1*.

ACTIVIDAD 4.2.

Indicaciones. En la secuencia de instrucciones de la Figura 8, sustituya el polinomio **`p:=z^2+1`**, por **`p:=45*z^5+48*z^4-205*z^3-180*z^2+20*z+112`**. Para obtener el valor de la nueva **`M`**, sustituya **`A:=1`**, por **`A:=205`**, y **`an:=1`**, por **`an:=45`**. Ejecute todas las instrucciones de nuevo haciendo un “enter” al final de cada línea de comando, hasta desplegar las gráficas de **`r`** y **`c`**. Realice luego las actividades siguientes y conteste las preguntas que se plantean en cada una.

a) Sin recurrir a la gráfica mostrada por la computadora, pero tomando en cuenta las variaciones de signo de $p(z)=45z^5+48z^4-205z^3-180z^2+20z+112$ y de $n(z)=p(-z)$, conteste la pregunta:

1) ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

b) Según la gráfica desplegada por *Maple*:

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales posee $p(z)$?

2) ¿Cuántas raíces tiene en total el polinomio $p(z)$? (si tiene alguna dificultad para visualizar todos los puntos de intersección, vea el pié de página que aparece en la Actividad 4.1)

3) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de estas raíces?

[2] Si hace un “clic” sobre la gráfica, esta se marcará y aparecerá una barra de herramientas adicional que le presentará diferentes opciones para la gráfica. En algunos casos (y éste es uno de ellos) alguna parte de la gráfica puede coincidir con los ejes coordenados y los ejes ocultarán esta parte. Siempre es conveniente verificar si esto está sucediendo o no mediante la opción que despliega la gráfica sin ejes.

c) Proceda como en el ejemplo 4.2 para obtener una aproximación numérica de cada una de estas raíces.

ACTIVIDAD 4.3.

Indicaciones. En la secuencia de instrucciones (Figura 8), sustituya el polinomio **`p:=z^2+1`**, por **`p:= -4*z^5-11*z^4-8*z^3+2*z^2+4*z+1`**. Para obtener el valor de la nueva **`M`**, sustituya **`A:=1`**, por **`A:=11`**, y **`An:=1`**, por **`An:=4`**. Ejecute todas las instrucciones de nuevo presionando "enter" al final de cada línea de comando, hasta desplegar las gráficas de **`r`** y **`c`**. Realice luego las actividades que se indican y conteste las preguntas.

a) Cuente las variaciones de signo de $p(z)=-4z^5-11z^4-8z^3+2z^2+4z+1$ y de $n(z)=p(-z)$.

1) ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

b) Cuente las variaciones de signo de $p(z)=-4z^5-11z^4-8z^3+2z^2+4z+1$ y de $n(z)=p(-z)$.

1) ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

a) Observe la gráfica desplegada por *Maple* para contestar:

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas complejas posee $p(z)$?

2) ¿Cuántas raíces tiene en total? (si tiene alguna dificultad para visualizar todos los puntos de intersección, vea el pié de página que aparece en la actividad 4.1)

3) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de estas raíces?

b) Proceda como en el ejemplo 4.2 para obtener una aproximación numérica de cada una de estas raíces.

ACTIVIDAD 4.4.

Indicaciones. En la secuencia de instrucciones de la Figura 8, sustituya ahora el polinomio **`p:=z^2+1`**, por **`p:=9*z^6-6*z^5+7*z^4+10*z^3-3*z^2+4*z+4`**, en base a los coeficientes de **`p`** haga los cambios pertinentes en **`A:=1`**, y **`an:=1`**. Ejecute todas las instrucciones presionando la tecla "enter" al final de cada instrucción, hasta desplegar las gráficas de **`r`** y **`c`**. Realice luego las actividades siguientes y conteste las preguntas.

a) Cuente las variaciones de signo de los coeficientes de los polinomios $p(z)=9z^6-6z^5+7z^4+10z^3-3z^2+4z+4$ y $n(z)=p(-z)$.

1) ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

2) ¿Cuántas raíces reales puede tener $p(z)$ en total?

3) Según la gráfica desplegada por *Maple*, ¿Cuántas raíces reales y cuántas no reales posee $p(z)$?

4) ¿Cuántas raíces tiene en total? (si tiene alguna dificultad para visualizar todos los puntos de intersección, vea el pié de página que aparece en la actividad 4.1)

5) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de estas raíces?

6) Proceda como en el Ejemplo 4.2 para obtener una aproximación numérica de cada una de estas raíces.

ACTIVIDAD 4.5.

Indicaciones. En la secuencia de instrucciones de la Figura 8, sustituya ahora el polinomio **`p:=z^2+1`**, por **`p:=z^6+2*z^5+2*z^4+4*z^2+8*z+8`**, en base a los coeficientes de **`p`** haga los cambios pertinentes en **`A:=1`**, y **`An:=1`**. Ejecute todas las instrucciones presionando la tecla "enter" al final de cada instrucción, hasta desplegar las gráficas de **`r`** y **`c`**. Realice luego las actividades siguientes y conteste las preguntas.

a) Cuente las variaciones de signo de los coeficientes de los polinomios $p(z)=z^6+2z^5+2z^4+4z^2+8z+8$ y de $n(z)=p(-z)$.

1) ¿Cuántas raíces reales positivas y cuántas negativas puede tener $p(z)$?

2) ¿Cuántas raíces reales puede tener $p(z)$ en total?

3) Según la gráfica desplegada por *Maple*, ¿cuántas raíces reales y cuántas no reales posee $p(z)$?

4) ¿Cuántas raíces tiene en total? (si tiene alguna dificultad para visualizar todos los puntos de intersección, vea el pié de página que aparece en la actividad 4.1).

5) ¿Cuál es la multiplicidad de cada una de estas raíces?

6) Proceda como en el Ejemplo 4.2 para obtener una aproximación numérica de cada una de estas raíces.

ACTIVIDAD 4.6.

Indicaciones. Invente un polinomio de grado 7, uno de grado 8 y otro de grado 9 con coeficientes reales, utilice la lista de instrucciones de la Figura 8 para graficarlos y para cada uno de ellos conteste las mismas preguntas hechas en las actividades 4.1-4.5.

ACTIVIDAD 4.7.

Con base en las actividades 4.1-4.6, conteste la pregunta siguiente:

Si se tiene un polinomio de grado n con coeficientes reales en la indeterminada w, ¿cuántas raíces tendrá en total exactamente?

ACTIVIDAD 4.8.

En la secuencia de instrucciones de la Figura 8, sustituya el polinomio **`p:=z^2+1`**, por **`p:=(1+2*I)*z^5+I*z^4+(1-I)*z^3+3*I*z^2+(1+I)*z+2*I`**. Para obtener el valor de la nueva **`M`**, sustituya **`A:=1`**, por **`A:=3`**, y **`An:=1`**, por **`an:= 5^.5`**. El polinomio $p(z)=(1+2i)z^5+iz^4+(1-i)z^3+3iz^2+(1+i)z+2i$ es ahora un polinomio de coeficientes complejos, la nueva **`A`** es el máximo de los módulos de los coeficientes y la nueva **`an`** es el módulo del coeficiente del término de la potencia mayor. Ejecute todas las instrucciones de nuevo haciendo un <enter> al final de cada línea de comando, hasta desplegar las gráficas de **`r`** y **`c`**. Realice ahora las actividades siguientes y conteste las preguntas.

a) Observe la gráfica desplegada por *Maple* y conteste las preguntas.

1) ¿Cuántas raíces reales y cuántas complejas posee $p(z)$?

2) ¿Cuántas raíces tiene en total $p(z)$? (si tiene alguna dificultad para visualizar todos los puntos de intersección, vea el pié de página que aparece en la actividad 12.1)

3) ¿Existen entre las raíces de $p(z)$ parejas conjugadas de números complejos? Justifique su respuesta.

ACTIVIDAD 4.9.

Invente otros polinomios con coeficientes complejos, tome la actividad 4.8 como referencia y grafiquelos utilizando la lista de instrucciones de la Figura 8. ¿Puede generalizar la respuesta dada a la actividad 4.7 a polinomios con coeficientes complejos? Justifique su respuesta.

BIBLIOGRAFÍA.

[1] Soto M., José Luis (2002). *Números Complejos: una presentación gráfica*. Material didáctico No. 1. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora.

[2] Laborde, J.-M., & Bellemain Y. (1994) *Cabri Géomètre II* (software), LSD-IMAG/Texas Instruments.

[3] Maple 9 (*software*). (2003). Ontario: Waterloo Maple Inc.

[4] Dunham, W. (1990). *Journey Through Genius: the great theorems of mathematics*. New York: Wiley.

[5] Kurosch, A. G. (1977). *Curso de Álgebra Superior* (tercera edición). Moscú: Mir.