# NÚMEROS COMPLEJOS: UNA PRESENTACIÓN GRÁFICA

**José Luis Soto Munguía**
**Departamento de Matemáticas**
**Universidad de Sonora**

## 1. INTRODUCCIÓN.

Desde los primeros años de la escuela, el estudiante se enfrenta en matemáticas con los diferentes sistemas de números, el primero de ellos, el sistema de números naturales (**N**) le sirve principalmente para resolver problemas de conteo. Cuando aparecen problemas que conducen a ecuaciones como $x+5=3$, los números naturales resultan insuficientes para resolverlas y entonces se ve la necesidad de introducir los números negativos, ampliando con ellos el sistema **N**, para completar uno nuevo: el de los números enteros. (**Z**)

Sin embargo, ecuaciones tan sencillas como $6x=3$ no pueden resolverse si sólo se cuenta con los números enteros, se requiere entonces otra ampliación del sistema de números, que incluya todos los cocientes de números enteros con denominador distinto de cero, se obtiene de esta manera un conjunto al que se denomina sistema de números racionales. (**Q**)

Las limitaciones de este conjunto **Q** quedan de manifiesto cuando se trata de resolver problemas como el de calcular la longitud que tiene la diagonal de un cuadrado cuyo lado es la unidad. Aparecen así, números como $\sqrt{2}$ que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros. A estos números se les llama irracionales (**~Q**) y al agregarlos a **Q** se cuenta ya con el sistema de números reales. (**R**)

Pues bien, existen problemas para cuya resolución el sistema de números reales no es suficiente. Uno de estos problemas, es el de encontrar las soluciones de la ecuación $x^2=-1$. La necesidad de resolver este tipo de problemas conduce a la ampliación del sistema de números reales hacia un sistema que permita resolverlos, esta ampliación es el sistema de los números complejos, a los que están dedicadas estas notas.

## 2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS REALES.

En los cursos pre-universitarios de matemáticas, se ha venido adquiriendo una cierta familiaridad con el conjunto de los números reales, tanto en lo que se refiere a sus operaciones y propiedades, como en lo referente a los sistemas de números que los conforman y de los que hemos hablado en la introducción. (**N, Z, Q, ~Q**) En esta sección se dará una presentación gráfica de estos números y de sus operaciones.

Empezaremos por repasar la representación gráfica que aparece en la matemática del nivel básico y que generalmente se da en los siguientes términos: Los números reales "llenan" la recta numérica, lo cuál significa que a cada punto de la recta le corresponde un número real y que a cada número real le corresponde un punto en la recta. Para localizar un número real $a$ en la recta se procede de la siguiente manera:

*i*) Se traza una recta horizontal dirigida de izquierda a derecha, a la que se llama usualmente eje X o eje de las *x*´s.

*ii*) Se escoge un punto P cualquiera sobre la recta, a este punto P se le llama origen y se le asocia el número cero. El origen P divide a la recta en dos partes; una a la derecha de P, llamada parte positiva del eje de las *x*'s y otra a la izquierda de P, llamada parte negativa del eje de las *x*'s.

*iii*) Se escoge, a la derecha de P, un punto Q cualquiera sobre la recta; el segmento PQ se tomará como unidad para medir la magnitud de $a$, al punto Q escogido se le asocia el número 1.

El signo de $a$ tiene una traducción gráfica muy simple: si el signo es positivo, $a$ se localiza a la derecha de P, si el signo es negativo, $a$ se localiza a la izquierda de P. Mientras que la distancia a la que se localiza el número $a$ se mide en términos del segmento PQ, considerado previamente como unidad; esta distancia se conoce como el valor absoluto de, y se denota usualmente como $|a|$. De esta manera el punto A correspondiente al número $a$, se ubica a una distancia $|a|$ del origen P. En la Figura 1 se muestra un caso en el que $a$ es positivo.


Figura 1

Haremos aquí una ligera modificación a la presentación anterior. En lugar de asociar al número *a* un punto A, le asociaremos el *segmento dirigido* PA, entendiendo como tal el segmento de recta que une el punto P con el punto A, en la dirección de P hacia A. En la gráfica esta dirección quedará indicada por una flecha cuyo *origen* es P y cuyo punto final o *extremo* es A. En lo sucesivo nos referiremos a estos segmentos dirigidos simplemente como segmentos y de las dos letras mayúsculas usadas para denotarlos, la primera indicará el origen y la segunda el extremo del segmento.

A la magnitud de PA, dada por el $|a|$, le llamaremos *módulo* de *a* y al ángulo que PA forma con la parte positiva del eje de las *x*'s, le llamaremos *argumento* de *a*.

El signo de *a* determinará el valor que tome el argumento de *a*; si el signo de *a* es positivo, entonces PA tendrá un argumento de 0° y si el signo de *a* es negativo, entonces PA tendrá un argumento de 180°. Esta variante en la representación gráfica permite visualizar más claramente las operaciones, como podrá verse a continuación.

La suma $a+b$ de dos números reales puede verse ahora gráficamente como una suma de dos segmentos dirigidos; para ello, localizamos el segmento PA y el PB, correspondientes a los números *a* y *b* respectivamente, trasladamos el segmento PB de tal modo que el origen de PB coincida con el extremo de PA y llamamos C al nuevo punto en el que se ha situado el extremo de PB. El nuevo segmento PC corresponderá a la suma $a+b$. (ver Figura 2)

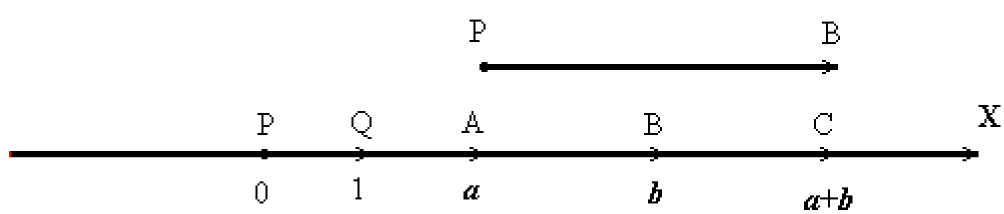



Figura 2

*EJEMPLO 2.1*. Sea $a$=-5 y $b$=2, encuentre gráficamente la suma $a+b$.

Graficamos el segmento PA correspondiente al número *a*, de magnitud $|a|$=5 y cuyo ángulo con la parte positiva del eje *x*'s (argumento de *a*) es de 180°, puesto que $a<0$. Similarmente, localizamos el segmento *PB* asociado al número *b*, de magnitud $|b|$=2 y que, al ser $b>0$, forma un ángulo de 0° con la parte positiva del eje *x*'s. (argumento de *b*) Tomamos ahora el segmento PB y hacemos que su origen coincida con el extremo de PA, llamamos C al nuevo punto donde se ha situado el extremo de PB. El extremo del segmento PC corresponde efectivamente al número $a+b=-3$. (ver Figura 3)

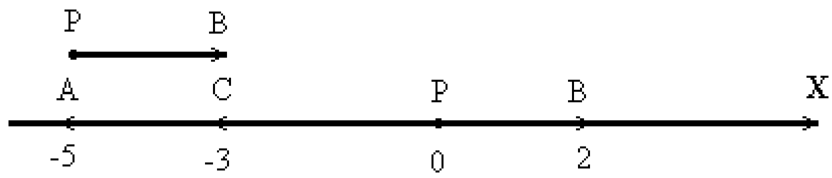



Figura 3

Por otra parte, la multiplicación de dos números $a$ y $b$ puede representarse de la siguiente manera: graficamos los segmentos PA y PB, que corresponden a los números $a$ y $b$ respectivamente y llamamos PC al segmento cuya magnitud es $|a||b|$ y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los segmentos PA y PB. Este segmento PC será la representación gráfica del número $ab$.

*EJEMPLO 2.2*. Sea $a=3$ y $b=-1.25$, encuentre gráficamente el producto $ab$.

Sean PA y PB los segmentos que corresponden a $a$ y $b$ respectivamente, llamemos $\alpha$ al argumento de PA y $\beta$ al de PB. Puesto que $a>0$ y $b<0$, entonces $\alpha=0°$ y $ß=180°$. Por esta razón el segmento PC que representa al producto $ab$, tendrá una magnitud $|a||b|=(3)(1.25)=3.75$ y formará con la parte positiva del eje de las $x$'s, un ángulo $a+ß = 0°+ 180° = 180°$. (ver Figura 4)

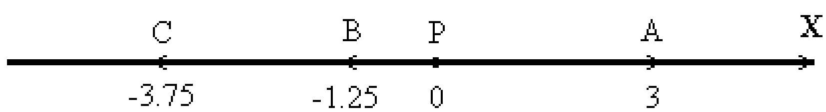



Figura 4

**3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.**

Todos los segmentos que se han utilizado hasta ahora para representar gráficamente los números reales se encuentran sobre el eje de las $x$´s, es decir están en una sola dimensión. Trataremos ahora de resolver gráficamente el problema de encontrar un número real $x$ tal que $x^2=-1$. El número real -1, es gráficamente un segmento de módulo 1 y cuyo argumento es un ángulo de 180°. (ver Figura 5)

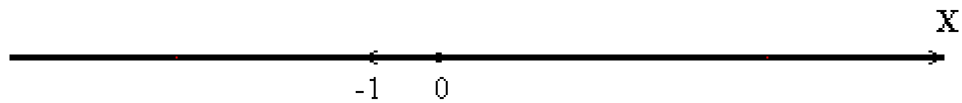



Figura 5

Gráficamente el número -1 presenta dos características:

a) Su módulo es la unidad, puesto que se localiza a una unidad de distancia del origen.

b) Su argumento es un ángulo de 180°, puesto que su signo es negativo.

El número real $x$ que buscamos, debe ser tal que al elevarse al cuadrado, es decir al multiplicarse por sí mismo, se obtenga como resultado el número -1. Para que $x^2$ tenga la característica a) debe cumplir con que $|x| = 1$ y por lo tanto $x=1$ o $x=-1$. Para cualquier otro valor real de $x$, el módulo de $x^2$ será distinto de 1.

Para que alguno de los dos candidatos que tenemos satisfaga la ecuación $x^2=-1$, requerimos que $x^2$ satisfaga además la condición b). Si $x=1$ fuera una solución de esta ecuación, como el segmento que lo representa tiene un argumento de 0º, entonces el segmento correspondiente a $x^2$ sería 0°+ 0° = 0°. Pero un segmento con argumento de 0° no tiene la característica b). La otra posible solución es $x=-1$, pero un razonamiento análogo nos lleva a la conclusión de que el segmento correspondiente a $x^2$ tampoco tendría la característica b), pues su argumento sería de 180°+180°=360°.

Podemos concluir ahora que el segmento que representa al número real -1, no puede ser obtenido como resultado de multiplicar por sí mismo un segmento que esté sobre el eje X y por lo tanto no existe un número real que multiplicado por sí mismo arroje como resultado el número -1. Los números reales son entonces insuficientes para resolver la ecuación $x^2 = -1$.

Trataremos ahora de rescatar una parte de la discusión anterior. El segmento que buscamos debe tener módulo 1 y su argumento debe ser tal que al sumarse consigo mismo nos dé 180°. Luego, el segmento buscado debe tener módulo 1 y argumento igual a 90°. (ver Figura 6)

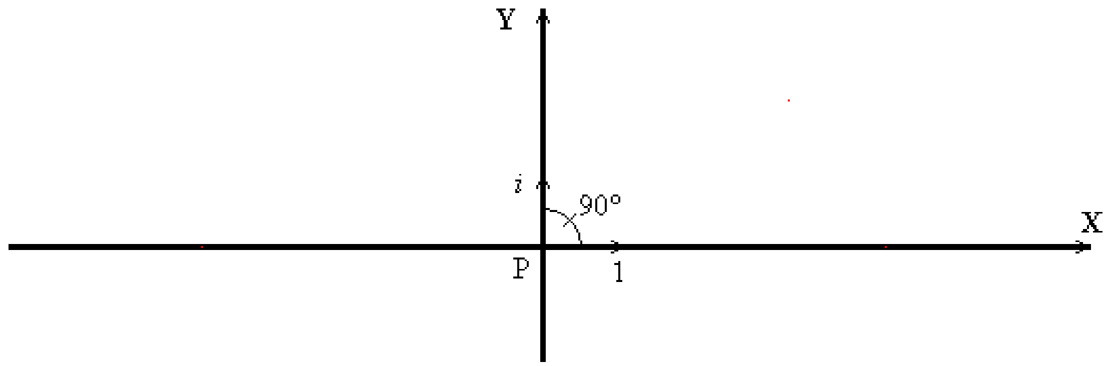



Figura 6

El segmento encontrado no puede corresponder a número real alguno y para su representación ha resultado insuficiente el eje de las *x*'s. Llamaremos *i* al nuevo número cuya representación gráfica hemos encontrado. En tanto que *i* satisface la condición de que al elevarlo al cuadrado nos da -1, diremos que $i = \sqrt{-1}$.

Atendiendo la forma gráfica como se ha definido la multiplicación, el número *i* puede ser multiplicado por cualquier número real. Por ejemplo el producto de 2 por *i*, que escribiremos como 2*i*, se traduce en un segmento de módulo (2)(1)=2 y argumento 0°+90°=90°. En la Figura 7 puede verse que el segmento encontrado tiene la misma dirección que *i*, pero su módulo es dos veces más grande.

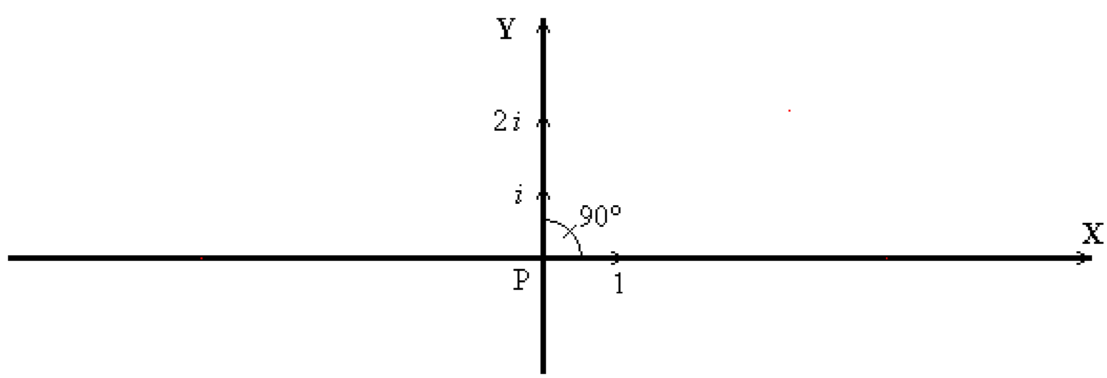



Figura 7

*EJERCICIO 3.1*. Grafique los números (1/2)*i*, 3*i*, -*i* y -3*i*.

En general, si *a* es un número real cualquiera, la gráfica de *ai*, será un segmento sobre el eje Y, de módulo |*a*| y cuya dirección será: la misma que *i*, si *a* es positivo y será contraria a *i* si *a* es negativo. (ver Figura 8)

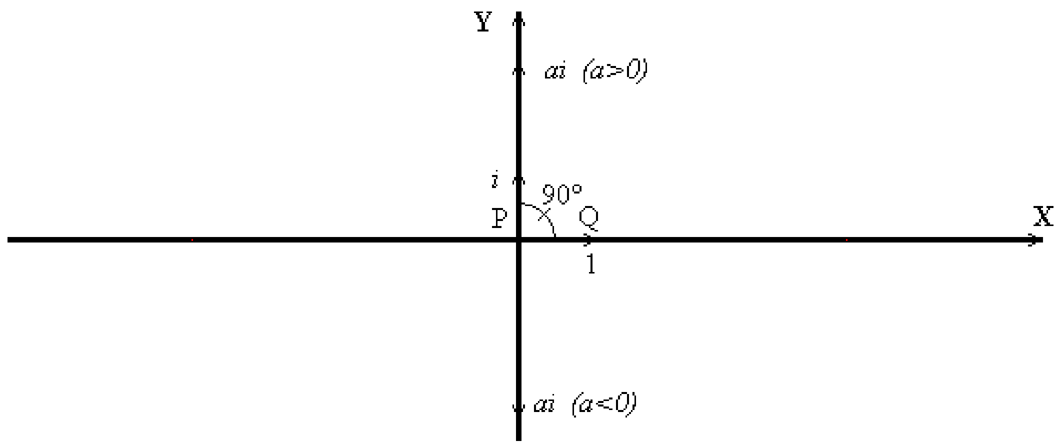



Figura 8

Todos los segmentos graficados hasta ahora están sobre alguno de los ejes de coordenadas. Tomemos ahora un segmento en cada eje, por ejemplo los correspondientes a los números 1 e *i*, y grafiquemos la suma 1+*i*, retomando el criterio gráfico con el que sumamos números reales, localizamos primeramente el extremo del segmento que representa al número 1, trasladamos el correspondiente al número *i* hasta que su origen coincida con el extremo del primero, y entonces el segmento correspondiente a 1+*i* irá del origen de coordenadas al extremo de la nueva posición gráfica de *i*, como lo muestra la Figura 9.

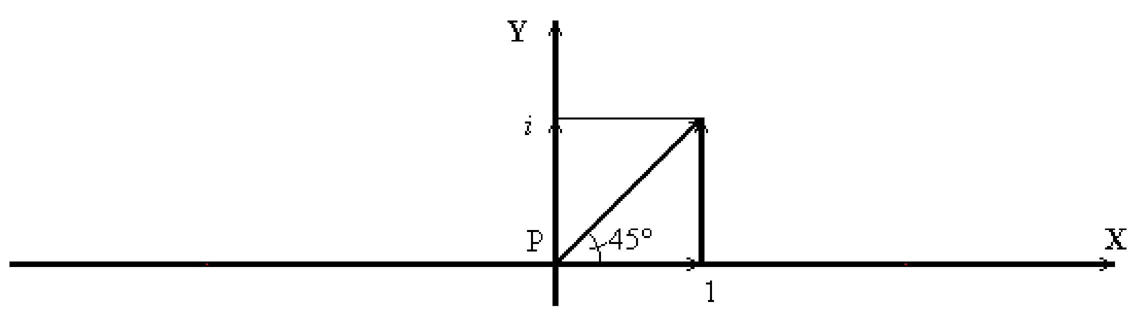



Figura 9

La representación gráfica de $1+i$ no está sobre ninguno de los dos ejes y como puede verificarse fácilmente, su módulo es $\sqrt{2}$ y su argumento es 45°. Si llamamos $x$ al número $1+i$, el producto de $x$ por sí mismo, es decir $x^2$, quedará representado gráficamente por un segmento con argumento de 45°+45°=90° y módulo ($\sqrt{2}$)($\sqrt{2}$)=2, como ya se ha visto antes, se trata del número $x^2=2i$. El producto de $x^2$ por sí mismo, es decir $x^4$, se traducirá entonces en un segmento de módulo (2)(2)=4 y argumento 90°+90°=180°. Como puede verse en la Figura 10, $x^4=-4$

Por razones análogas a las que se dieron en el caso de la ecuación $x^2=-1$, la ecuación $x^4=-4$ no tiene soluciones reales, hemos encontrado sin embargo que el número $1+i$, es una de las soluciones de esta ecuación.

En resumen podemos decir que el número $1+i$ es una solución de la ecuación $x^2-2i=0$ y también de la ecuación $x^4+4=0$. En el primer caso se trata de una ecuación cuyos coeficientes no son todos números reales. En la última ecuación, en cambio, todos los coeficientes son números reales, se le llama por ello *ecuación con coeficientes reales*.

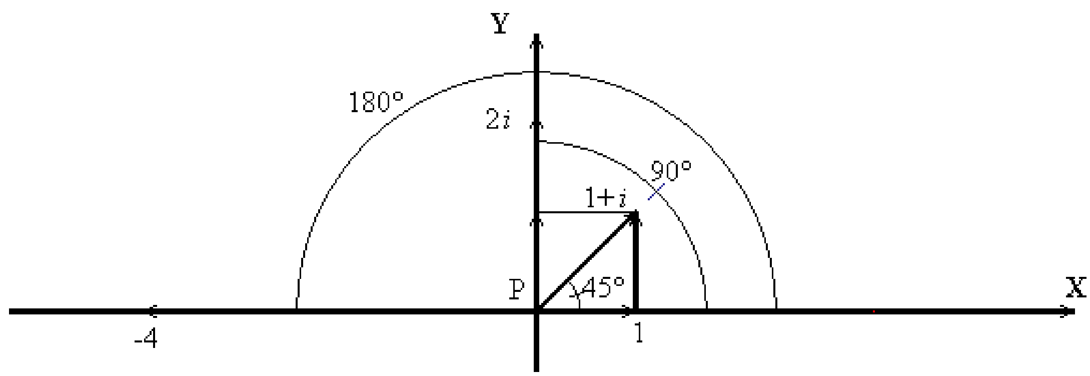



Figura 10

*EJERCICIO 3.2*. Como se ha visto, el número $1+i$ es una solución para la ecuación $x^4+4=0$ . Encuentre otras dos ecuaciones con coeficientes reales, para las cuales número $1+i$ sea una solución. ¿Cuántas de estas ecuaciones existen?.

*EJERCICIO 3.3*. Grafique el número $\sqrt{3}+i$ . Calcule su módulo y su argumento. Encuentre una ecuación con coeficientes reales para la cual este número sea una solución.

*EJERCICIO 3.4*. Repita el ejercicio anterior para los números complejos $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ , $1+i\sqrt{3}$ y $3+4i$.

En general, siempre podemos sumar un número real $a$, con otro de la forma $bi$; la suma $a+bi$, siempre puede ser graficada como el segmento que va del origen de coordenadas al punto $(a,b)$. E inversamente, todo segmento cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y cuyo extremo es el punto $(a,b)$, corresponde a la gráfica de un número de la forma $a+bi$. A estos números de la forma $a+bi$ donde $a,b\in\mathbf{R}$ e $i=\sqrt{-1}$, se les conoce como *números complejos*. La expresión $a+bi$, de un número complejo está íntimamente ligada a su representación gráfica en el plano cartesiano, por ello le llamaremos la *forma cartesiana* de este número, otra forma de expresar un número complejo se verá posteriormente. Si $z$ es un número complejo expresado en su forma cartesiana, esto es si $z=a+bi$, entonces al número real $a$ se le conoce como la *parte real* de $z$ (y se simboliza como $a=Re\ z$) y al número real $b$ se le llama la *parte imaginaria* de $z$. (y se simboliza como $b=Im\ z$)

## 4. SUMA DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Se ha dado hasta aquí un procedimiento gráfico para sumar complejos, este procedimiento es muy sencillo y está basado en la posibilidad de graficar los sumandos como segmentos dirigidos y después trasladar uno de ellos para localizar el segmento correspondiente a la suma. Como veremos ahora su traducción aritmética es igualmente sencilla. Veamos un ejemplo:

*EJEMPLO 4.1*. Encontrar la suma de los números complejos $3+i$ y $1+2i$.

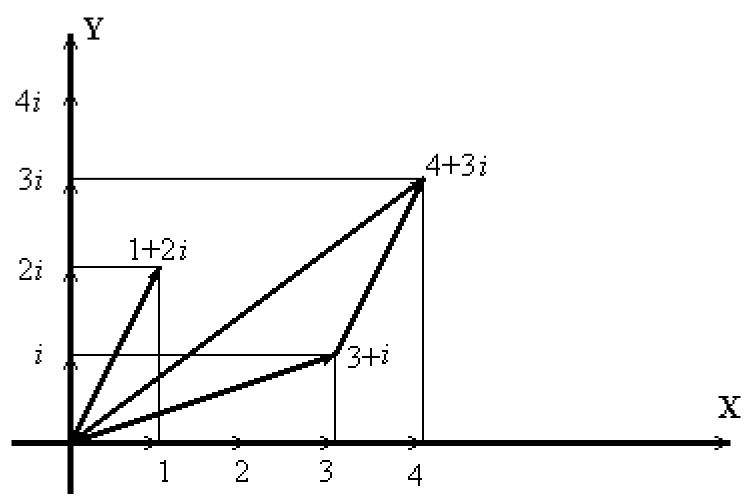



Figura 11

El procedimiento gráfico para encontrar la suma está ilustrado en la Figura 11. Lo que nos interesa ahora es encontrar la expresión aritmética de esta suma. Como esta expresión depende de las coordenadas del extremo del segmento que representa la suma, determinaremos primeramente estas coordenadas. En la siguiente gráfica (Figura 12), se ilustra la relación entre las coordenadas de los sumandos y las coordenadas de la suma. Puesto que la gráfica del número $1+2i$ solamente ha sido trasladada, sus coordenadas sumadas a las del número $3+i$, nos dan las coordenadas de la suma. La suma tiene entonces coordenadas (4,3), luego la suma es el número $4+3i$.

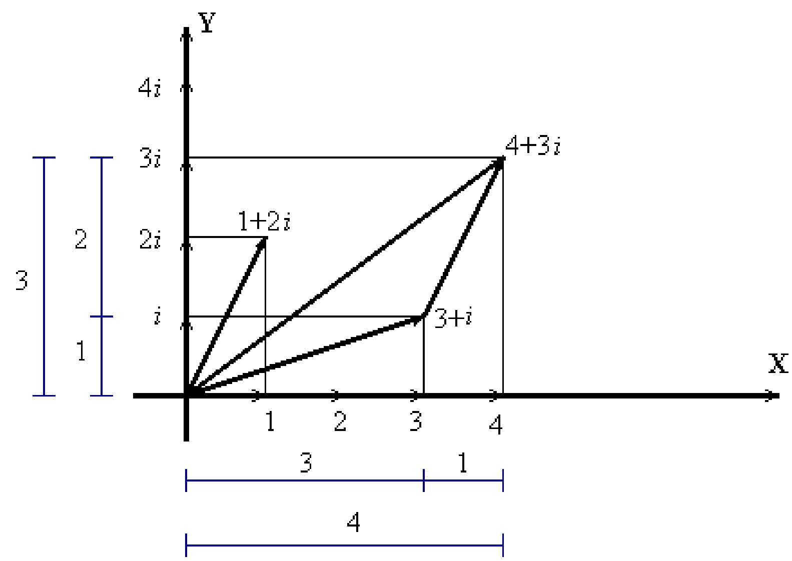


Figura 12

*EJERCICIO 4.1.* Sean los números complejos $z_1=6+2i$, $z_2=2+3i$, $z_2=-3+5i$.

a) Encuentre la expresión gráfica de cada uno de los números siguientes: $z_1+z_2$, $z_1+z_3$ y $z_2+z_3$.

b) Encuentre la expresión aritmética de cada uno de los números complejos siguientes: $z_1+z_2$, $z_1+z_3$ y $z_2+z_3$.

El ejemplo *4.1* ilustra la manera como pueden sumarse complejos gráficamente y después encontrar la traducción numérica de esta suma, pero la relación entre los sumandos y la suma es tan sencilla, que puede hacerse numéricamente en forma directa, sumando las partes reales y las partes imaginarias del complejo respectivamente, como lo establece la siguiente definición.

*DEFINICIÓN 4.1.* Si $z_1$ y $z_2$ son dos números complejos dados como $z_1=a+bi$ y $z=c+di$; definimos la suma de $z_1$ y $z_2$ como

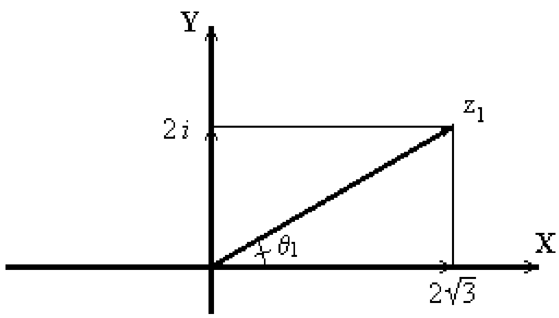
$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

## 5. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS.

Hasta ahora hemos podido multiplicar algunos números complejos utilizando criterios gráficos. Abordaremos ahora la generalización de estos criterios y su posible traducción numérica. Veamos el caso particular siguiente:

*EJEMPLO 5.1*. Sean $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ y $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$. Calcule $z_1 z_2$.

Tal como se ha definido, la multiplicación de $z_1$ por $z_2$ dependerá de los argumentos y los módulos de los factores. En la Figura 13 se sugiere cómo calcular, para este ejemplo el módulo y el argumento de cada factor utilizando el teorema de Pitágoras y la trigonometría elemental.



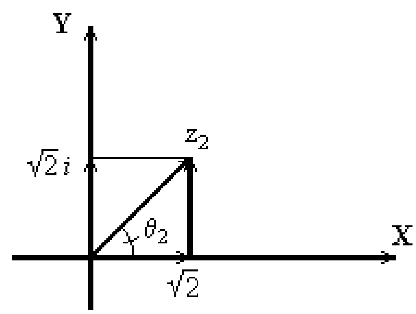




Figura 13

Los módulos son entonces.

$$|z_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{16} = 4\,;\ |z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Si llamamos $\theta_1$ y $\theta_2$ a los argumentos de $z_1$ y $z_2$ respectivamente, entonces conociendo los tres lados de ambos triángulos rectángulos, (ver Figura 13) $\theta_1$ y $\theta_2$ pueden ser calculados utilizando alguna función trigonométrica, por ejemplo la tangente:

$$tan\theta_1 = \tfrac{2}{2\sqrt{3}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\text{; luego } \theta_1 = arctan\,\tfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$$

$$tan\theta_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\text{; luego } \theta_2 = arctan(1) = 45°$$

Podemos asegurar ahora que el complejo $z_1 z_2$ es aquél cuyo módulo es $|z_1||z_2|=(4)(2)=8$ y cuyo argumento es $\theta_1+\theta_2=30°+45°=75°$. En la Figura 14 puede verse la representación gráfica del número $z_1 z_2$, aunque no se tiene hasta ahora su representación aritmética.

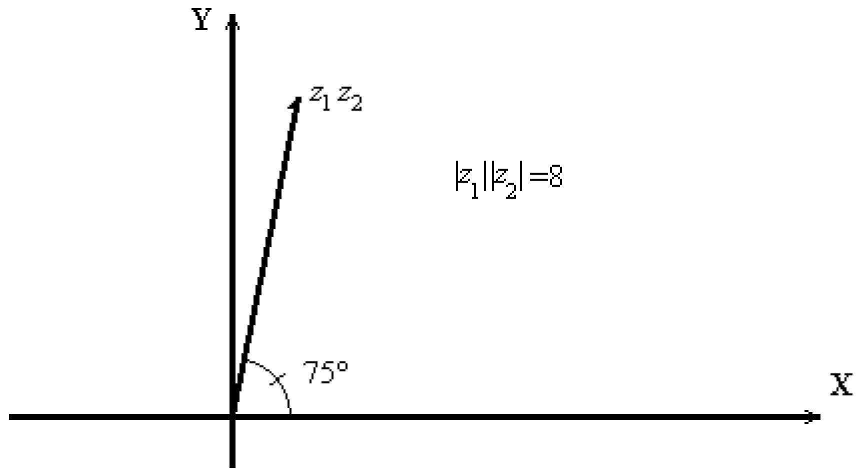



Figura 14

Pero la información gráfica que tenemos es suficiente para obtener su expresión aritmética; puesto que ésta última puede determinarse si calculamos los valores de $Re(z_1z_2)$ e $Im(z_1z_2)$, a los que hemos llamado $x$ e $y$ respectivamente. Este cálculo se logra fácilmente a partir de las siguientes relaciones trigonométricas.

$$\cos 75^0 = \tfrac{x}{8},\ \operatorname{sen} 75^0 = \tfrac{y}{8}$$

De las que de inmediato se obtiene:

$$x = 8\cos 75° = 8(0.259) = 2.071;\ \ y = 8\operatorname{sen} 75° = 8(0.966) = 7.727$$

Luego, la expresión buscada es:

$$z_1 z_2 = (2\sqrt{3} + 2i)(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = 2.071 + 7.727i$$

Esta manera de multiplicar complejos parece muy poco práctica, porque la multiplicación gráfica con la que contamos depende de dos parámetros (el módulo y el argumento) que no están presentes de manera explícita en la expresión cartesiana de los factores. Esto ocasiona que para cada multiplicación tengamos que calcular estos parámetros para cada factor, ejecutar la multiplicación y luego si es necesario, expresar el resultado en forma cartesiana. La dificultad principal estriba en que la definición de multiplicación con la que contamos no puede aplicarse directamente a números complejos escritos en forma cartesiana y al aplicarla a complejos expresados en forma polar, el resultado aparece en forma polar.

*EJERCICIO 5.1*. Dados los números complejos $z_1 = -3+2i$, $z_2 = \frac{1}{2}+5i$ y $z_3 = -6-3i$.

a) Represente $z_1$, $z_2$ y $z_3$ graficamente.

b) Calcule el módulo y el argumento de $z_1$, $z_2$ y $z_3$.

Necesitamos encontrar entonces una expresión aritmética para cualquier complejo que "muestre" el módulo y el argumento por una parte y por otra, establecer las reglas que permitan traducir esta expresión a la forma cartesiana. A esas dos tareas dedicaremos el resto de esta sección.

Si tenemos un complejo arbitrario escrito en forma cartesiana, digamos $z=x+yi$, tratemos primero de escribirlo en términos de su módulo y su argumento. (ver Figura 15)

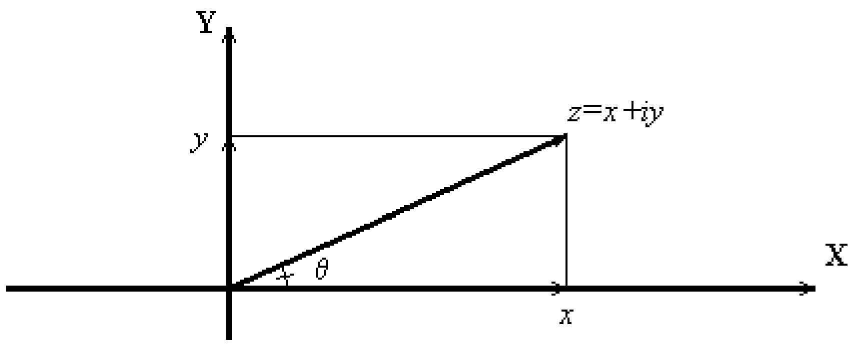



Figura 15

Llamemos $r$ al módulo y $\theta$ al argumento, entonces considerando la Figura 15 y aplicando las definiciones de las funciones $sen\theta$ y $cos\theta$ se tiene

$$cos\theta = \tfrac{x}{r}\,;\ sen\theta = \tfrac{y}{r}$$

Luego la parte real y la parte imaginaria de $z$ pueden escribirse como:

$$x = rcos\theta;\ \ y = rsen\theta \qquad (1)$$

Y sustituyendo (1) en la forma cartesiana de $z$, se tiene:

$$z = x + yi = rcos\theta + risen\theta = r(cos\theta + isen\theta) \qquad (2)$$

Como se ha visto en el caso particular del ejemplo 5.1 y como puede inferirse en general de la Figura 15, los valores de $r$ y $\theta$ pueden ser obtenidos a partir de la parte real y la parte imaginaria de $z$, mediante las relaciones:

$$\theta = arctan(\tfrac{y}{x})\,;\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (3)$$

*EJERCICIO 5.2*. Utilice su calculadora y las relaciones anteriores (3) para encontrar el módulo y el argumento de los complejos $z_1 = 3+4i$ y $z_2 = -3-4i$, luego conteste las preguntas siguientes:

a) ¿Son iguales los complejos $z_1$ y $z_2$?.

b) Grafique $z_1$ y $z_2$. ¿Qué relación existe entre $z_1$ y $z_2$?

c) ¿Cómo están relacionados los argumentos de $z_1$ y $z_2$?

La ambigüedad planteada en el ejercicio 5.2 tiene su origen en el hecho siguiente: Si $\theta_1$ y $\theta_2$ son los argumentos respectivos de los complejos $z_1=x+iy$ y $z_2=-x-iy$ entonces $tg\,\theta_1 = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x} = tg\,\theta_2$ y según la calculadora $\theta_1 = arctg(\frac{y}{x}) = arctg(\frac{-y}{-x}) = \theta_2$. Esta ambigüedad siempre puede ser eliminada graficando $z_1$ y $z_2$ para establecer cuáles son los verdaderos valores de $\theta_1$ y $\theta_2$. Al calcular el argumento del complejo $z_1=x+iy$ con una calculadora, no se sabrá si la calculadora nos está dando el argumento de $z_1=x+iy$ o el de $z_2=-x-iy$, pero siempre es posible averiguarlo simplemente graficando $z_1$.

La forma (2) de escribir el número $z$, se conoce como la *forma polar* del complejo. Las reglas gráficas que hemos seguido hasta aquí para multiplicar complejos pueden aplicarse directamente si los factores están dados en forma polar. Esto es, si $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2=r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$ entonces el producto $z_1z_2$ será un complejo de módulo $r_1r_2$ y argumento $\theta_1+\theta_2$ , que podría ser escrito directamente en su forma polar como:

$$z_1z_2 = r_1r_2(cos(\theta_1+\theta_2)+isen(\theta_1+\theta_2))$$

Esta forma polar del producto no resuelve de manera directa el problema de multiplicar complejos en forma cartesiana y expresar el resultado en forma cartesiana, pero ayuda a resolverlo. En otras palabras, si $z_1=x_1+iy_1$ y $z_2=x_2+iy_2$, nos interesa ahora obtener el producto $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$, pero en forma cartesiana. Como se ha visto, los complejos que nos interesa multiplicar pueden ser escritos en su forma polar, adquiriendo la forma:

$$z_1 = r_1\,(cos\theta_1 + isen\theta_1);\; z_2 = r_2\,(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

cuyo producto está dado como:

$$z_1z_2 = r_1r_2(cos(\theta_1+\theta_2)+isen(\theta_1+\theta_2)) \qquad (4)$$

Como se recordará, las identidades trigonométricas para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos, están dadas como:

$$cos(\theta_1+\theta_2) = cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)$$

$$sen(\theta_1+\theta_2) = cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2)$$

Sustituyendo estas expresiones en (4), tenemos,

$$z_1z_2 = r_1r_2 [cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2) + i(cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1) cos(\theta_2))]$$

Reordenando y aplicando las ecuaciones (1), se tiene,

$$z_1z_2=r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2)-r_1sen(\theta_1)r_2sen(\theta_2)+ i(r_1 cos(\theta_1)r_2sen(\theta_2) + r_1sen(\theta_1)r_2cos(\theta_2))$$

$$z_1z_2=x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i \qquad (5)$$

Obteniendo así una manera directa de multiplicar complejos en forma cartesiana.

*EJERCICIO 5.3*. Dados los números complejos $z_1=4(cos20°+isen20°)$, $z_2=2(cos270°+isen270°)$ y $z_3 =10(cos330°+ isen330°)$.

a) Grafique $z_1$, $z_2$ y $z_3$.

b) Escriba $z_1$, $z_2$ y $z_3$ en forma cartesiana.

*EJERCICIO 5.4*. Dados los números complejos $z_1 = -1-i$, $z_2 =1+7i$, $z_3 =-2+5i$ y $z_4 =9-3i$.

c) Grafique $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$.

d) Escriba $z_1$, $z_2$, $z_3$ y $z_4$ en forma polar.

*EJERCICIO 5.5*. Multiplique los complejos $z_1=12(cos120°+isen120°)$ y $z_2=(cos60°+isen60°)$ y exprese el resultado en forma polar.

*EJERCICIO 5.6*. Multiplique los complejos $z_1=2(cos225°+isen225°)$ y $z_2=5(cos45°+isen45°)$ y exprese el resultado en forma cartesiana.

*EJERCICIO 5.7*. Multiplique los complejos $z_1=-2+6i$ y $z_2=5-2i$ y exprese el resultado en forma cartesiana.

*EJERCICIO 5.8*. Encuentre dos números complejos cuya suma sea igual a dos y cuyo producto sea también igual a dos. Explique gráficamente el resultado encontrado.

*EJERCICIO 5.9*. Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos cualquiera diferentes de cero y sean $\theta_1$ y $\theta_2$ sus argumentos respectivos. Encuentre la relación que debe existir entre $\theta_1$ y $\theta_2$ para que el producto $z_1z_2$ sea un número real. Explique gráficamente el resultado encontrado.

## 6. DIVISIÓN DE COMPLEJOS

Al igual que en el caso de los números reales, la división de dos números complejos puede reducirse a una multiplicación. Si $z_1$ y $z_2$ son dos números complejos, la división de $z_1$ entre $z_2$ se define como la multiplicación de $z_1$ por el inverso de $z_2$, es decir:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_1}\right) = z_1 z_2^{-1}$$

Si podemos calcular la multiplicación entre dos números complejos y si dado un complejo podemos calcular su inverso, entonces no tendremos dificultad para efectuar la división. Como la multiplicación ya se ha discutido antes, veremos ahora cómo calcular el inverso de un complejo dado.

Abordemos primero el caso donde el complejo está expresado en forma polar. Sea $z=r(cos\theta+isen\theta)$ un complejo cualquiera, su inverso será entonces otro número que llamaremos $z^{-1}$ y con la propiedad de que $zz^{-1}=1$. Si $z^{-1}$ se escribe en su forma polar como $z^{-1}=R(cos\gamma+isen\gamma)$ entonces

$$zz^{-1}= [r(cos\theta+isen\theta)][R(cos\gamma +isen\gamma)]=1(cos0º+isen0º)$$

donde $R$ y $\gamma$ son respectivamente el módulo y el argumento de $z^{-1}$.

Según la manera que tenemos de multiplicar complejos, para que esta ecuación se satisfaga, debe cumplirse que:

$$rR=1 \quad y \quad \theta+\gamma=0º$$

De estas dos igualdades se sigue de inmediato que

$$R=\frac{1}{r} \quad y \quad \gamma=-\theta$$

y por lo tanto

$$z^{-1}=\frac{1}{r}\ (cos(-\theta)+isen(-\theta))$$

Volvamos ahora al problema de la división. Si tenemos dos complejos cualquiera

$z_1 = r_1(cos\theta_1+isen\theta_1)$

$z_2= r_2(cos\theta_2+isen\theta_2)$

Entonces, calculando el inverso de $z_2$ y aplicando la definición de multiplicación, tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}=[r_1(cos\theta_1+isen\theta_1)][\frac{1}{r_2}\ (cos(-\theta_2)+ isen(-\theta_2))]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(cos(\theta_1\text{-}\theta_2) + isen(\theta_1\text{-}\theta_2)) \qquad (6)$$

En resumen, el número que resulta de dividir dos complejos tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos, como se ilustra en la Figura siguiente:

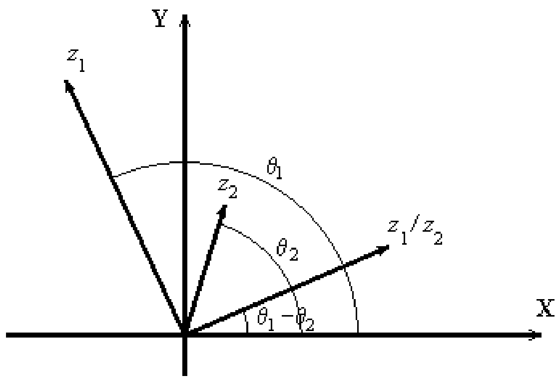



Figura 16

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ fuera la forma cartesiana de $z_1$ y $z_2$, el resultado de la división puede transformarse también a la forma cartesiana empleando las identidades trigonométricas

$$cos(\theta_1\text{-}\theta_2) = cos(\theta_1)cos(\theta_2) + sen(\theta_1)sen(\theta_2) \qquad (7)$$

$$sen(\theta_1\text{-}\theta_2) = sen(\theta_1)cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sen(\theta_2) \qquad (8)$$

y las ecuaciones (1) de la sección 5, que tomarían para estos casos la forma:

$$x_1 = r_1cos\theta_1;\ y_1 = r_1sen\theta_1;\ x_2 = r_2cos\theta_2;\ y_2 = r_2sen\theta_2 \qquad (9)$$

Tenemos entonces, de (6):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$$

$= \frac{r_1}{r_2}(cos(\theta_1\text{-}\theta_2) + isen(\theta_1\text{-}\theta_2))$ y de (7) y (8):

$$= \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1)cos(\theta_2)+sen(\theta_1)sen(\theta_2)+i(sen(\theta_1)cos(\theta_2)\text{-}cos(\theta_1)sen(\theta_2))]$$

Para aplicar directamente las fórmulas (9), multiplicamos por $\frac{r_2}{r_2}$ y distribuimos el producto, obteniendo:

$$= \frac{1}{r_2^2}[r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2)+r_1sen(\theta_1)r_2sen(\theta_2)+i(r_1sen(\theta_1)r_2cos(\theta_2)\text{-} r_1cos(\theta_1)r_2sen(\theta_2))]$$

$$= \frac{1}{r_2^2}[x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2\text{-}x_1y_2)]$$

$$= \frac{1}{x_2^2+y_2^2}\ [x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)] \qquad (10)$$

*EJERCICIO 6.1*. Sean $z_1=6(cos150º+isen150º)$ y $z_2=2(cos120º+isen120º)$.

a) Encuentre la forma polar de $\frac{z_1}{z_2}$ y grafique $z_1$, $z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$ en una misma Figura.

b) Cambie $z_1$, $z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$ de su forma polar a su forma cartesiana.

c) Utilice la expresión (10) y la forma cartesiana de $z_1$ y $z_2$ para calcular directamente $\frac{z_1}{z_2}$ en forma cartesiana.

*EJERCICIO 6.2*. Repita el ejercicio anterior para los complejos $z_1=2(cos225º+isen225º)$ y $z_2=4(cos45º+isen45º)$.

*EJERCICIO 6.3*. Sea el complejo $z=5(cos20º+isen20º)$. Encuentre tres números complejos $w$ tales que $\frac{z}{w}$ sea un número real. Explique gráficamente el resultado encontrado.

*EJERCICIO 6.4*. Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos cualquiera diferentes de cero, sean $\theta_1$ y $\theta_2$ sus argumentos y $r_1$, $r_2$ sus módulos respectivamente. Encuentre la relación que debe existir entre $\theta_1$ y $\theta_2$ y entre $r_1$ y $r_2$ para que el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ sea igual al producto $z_1z_2$. Ofrezca una explicación gráfica de sus resultados.

## 7. COMPLEJOS CONJUGADOS

Al resolver ecuaciones cuadráticas encontramos que algunas de ellas tienen dos soluciones complejas. Como puede verse en el ejemplo siguiente, estas soluciones no son completamente independientes entre sí, es más resultan siempre iguales excepto por el signo de la parte imaginaria.

*EJEMPLO. 7.1.* Resuelva la ecuación $x^2-x+1=0$ y grafique las soluciones encontradas.

Aplicando directamente la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, se obtienen como soluciones los dos números complejos siguientes:

$$x_1=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ x_2=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 17

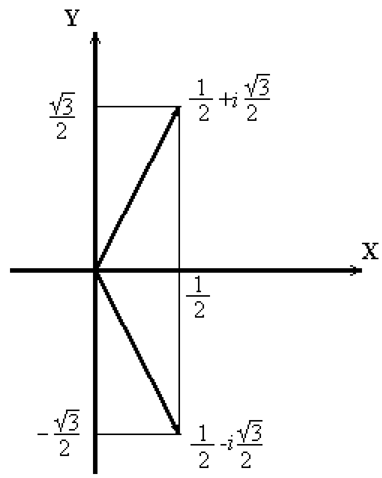



Figura 17

En la gráfica se observa que las soluciones complejas encontradas son simétricas con respecto al eje X, sus módulos son iguales y sus argumentos difieren sólo en el signo. La pareja de números encontrada en el ejemplo tiene algunas propiedades interesantes. Si sumamos los números que la conforman, por ejemplo, el resultado siempre es un número real. Numéricamente esta propiedad se puede observar directamente, puesto que al efectuar la suma, las partes imaginarias de los complejos se eliminan entre sí:

$$\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Y gráficamente puede verse que el resultado de la suma estará siempre sobre el eje X, puesto que la diagonal del paralelogramo formado por los segmentos dirigidos correspondientes, permanecerá sobre el eje X, como lo muestra la Figura 18.

El resultado de multiplicarlos también es un número real. Esto puede verse más claramente si convertimos $x_1$ y $x_2$ a su forma polar. Puesto que:

$$|x_1|=1,\ |x_2|=1 \text{ y}$$

$$\arg(x_1)=60^\circ,\ \arg(x_2)=-60^\circ$$

entonces

$$x_1=cos60^\circ+isen60^\circ$$

$$x_2=cos(-60^\circ)+isen(-60^\circ)$$

Luego, al multiplicar los módulos y sumar los argumentos, tenemos:

$$x_1x_2 \quad =cos(60^\circ-60^\circ)+isen(60^\circ-60^\circ)$$

$=cos(0º)+isen(0º)$

$=1$

La Figura 19 muestra este resultado.

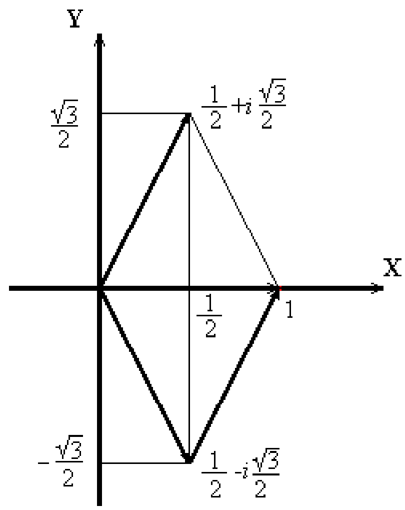



Figura 18

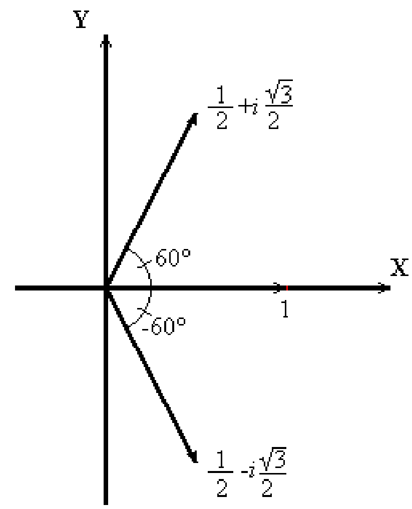



Figura 19

Cuando en álgebra elemental se plantea el problema de factorizar una expresión como $x^2$-$x$+1, el problema se resuelve encontrando los números *a* y *b* tales que $a+b=-1$ y $ab=1$ y sustituyéndolos en la expresión $(x+a)(x+b)$. En casos como éste los números *a* y *b* no existen entre los números reales, se dice entonces que la expresión $x^2$-$x$+1 no es factorizable en los números reales, pero los números $a=-x_1$ y $b=-x_2$ son dos números cuya suma es igual a –1 y cuyo producto es igual a 1. Se dice entonces que la expresión $x^2$-$x$+1 es factorizable en los complejos y su factorización es:

$$x^2-x+1=\left[x-\left(\tfrac{1}{2}+i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\tfrac{1}{2}-i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

Si tenemos dos complejos iguales excepto por el signo de la parte imaginaria, sabemos ahora que su producto es siempre un número real. Este resultado proporciona una manera equivalente, pero más práctica de dividir complejos escritos es forma cartesiana, como se describe en el ejemplo siguiente:

*EJEMPLO 7.2.* Sean $z_1=7+2i$ y $z_2=1+4i$. Calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

Tomamos un tercer complejo que difiera de $z_2$ sólo en el signo de la parte imaginaria, en este caso $z_3=1-4i$ y aprovechando que $z_2z_3$ es un número real, multiplicamos el cociente $\frac{z_1}{z_2}$ por $\frac{z_3}{z_3}$, obteniendo:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1}{z_2}\frac{z_3}{z_3}=\frac{1}{z_2z_3}z_1z_3=\frac{1}{17}(7+2i)(1-4i)$$

Convirtiendo así la división en un problema de multiplicación, luego aplicando la expresión (5) de la sección 5, tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{17}(7+8+i(-28+2))=\frac{15}{17}-\frac{26}{17}i$$

La pareja de complejos a la que nos hemos referido a partir del ejemplo *7.2* es un caso particular de lo que se conoce como números complejos conjugados, que en general pueden definirse como sigue.

*DEFINICIÓN 7.1* Sea $z=a+bi$ un número complejo cualquiera, entonces decimos que su *conjugado* es el número $a-bi$ y lo denotamos como $\bar{z}$. Decimos entonces que $\bar{z}$ y z son *conjugados* entre sí y que uno es el conjugado del otro.

Se desprende directamente de la definición que si $x$ es un número real, entonces $\bar{x}=x$, puesto que $x=x+0i=x-0i=\bar{x}$. Se dice entonces que todo número real es el conjugado de sí mismo.

*EJERCICIO 7. 1*. Factorice en los complejos la expresión $x^2+x+1$.

*EJERCICIO 7. 2*. Factorice en los complejos la expresión $x^2+6x+10$.

*EJERCICIO 7. 3*. Verifique gráfica y algebraicamente que en general para cualquier complejo $z=a+bi$, se cumple que $z+\bar{z}=2a$ y que $z\bar{z}=a^2+b^2$.

*EJERCICIO 7.4*. Demuestre gráficamente que el área del cuadrilátero cuyos vértices son los extremos de los complejos 0, $z$, $\bar{z}$ y $z+\bar{z}$, está dada por $\frac{1}{2}|z+\bar{z}||z-\bar{z}|$.

*EJERCICIO 7.5*. ¿Cuál es el lugar geométrico descrito por todos los complejos $z$ que satisfacen la ecuación $z\bar{z}=16$?.

*EJERCICIO 7.6*. Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos. ¿Es suficiente que la suma de ellos sea un número real para que $z_1$ y $z_2$ sean conjugados entre sí?. Justifique gráficamente su conclusión.

Discutiremos ahora algunas propiedades adicionales interesantes de los complejos conjugados. Sean $z_1$ y $z_2$ dos números complejos cualquiera, entonces:

*i*) El conjugado de la suma de dos números complejos es la suma de los conjugados, es decir $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ .

*ii*) El conjugado del producto dos números complejos es el producto de los conjugados, es decir $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$ .

En la Figura siguiente se puede ver gráficamente la validez de la propiedad *i*).

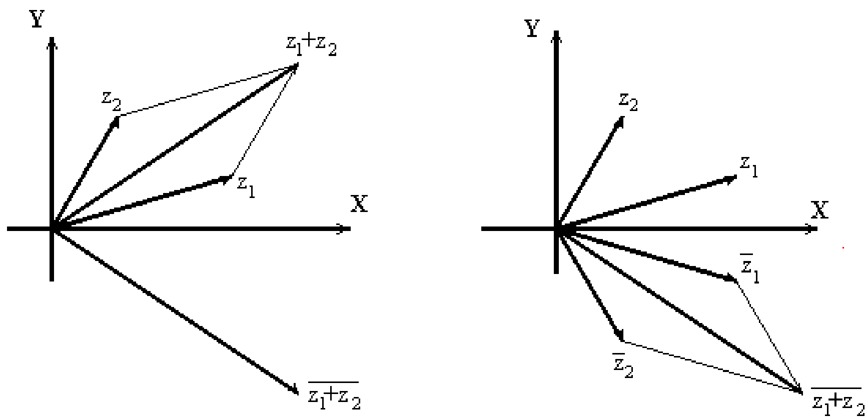



Figura 20

De la misma manera la propiedad *ii*) puede visualizarse en la Figura 21.

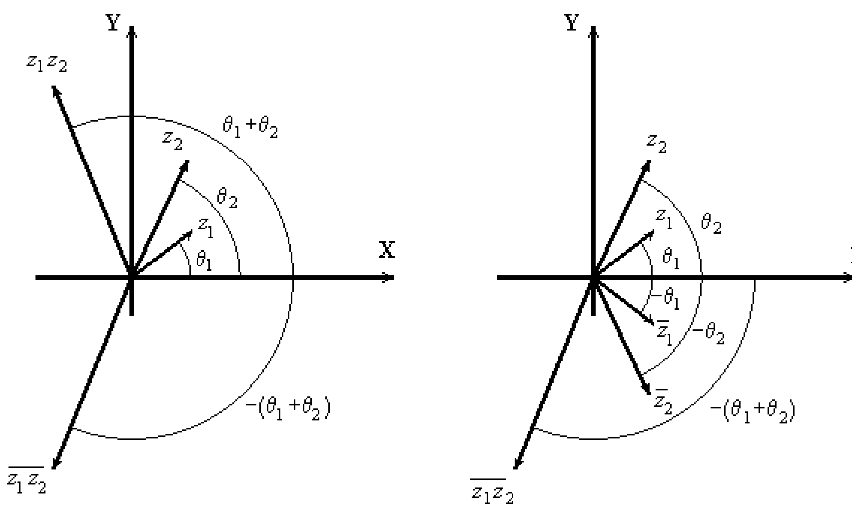



Figura 21

Esta propiedad puede generalizarse sin problemas a un número mayor de factores, en particular sigue siendo válida si el complejo *z* se multiplica *n* veces por sí mismo, obtenemos así una tercera propiedad, que podemos enunciar como sigue:

*iii*) El conjugado de la potencia *n*-ésima de un complejo *z*, es igual a la potencia *n*-ésima del conjugado de *z*, esto es $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

*EJERCICIO 7.7.* Ilustre gráficamente la validez de esta propiedad para el caso particular en el que $n$=5.

*EJERCICIO 7.8.* Verifique gráficamente que si $z_1$ y $z_2$ son dos complejos diferentes de cero, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Regresemos ahora al problema de resolver una ecuación cuadrática. Como se sabe, si tenemos una ecuación cualquiera de grado dos en una variable, digamos $ax^2+bx+c=0$, sus soluciones están completamente determinadas por la fórmula $x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Si $b^2-4ac<0$ entonces ambas soluciones de la ecuación son complejas y están dadas como:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por la forma que adquieren, es claro que los números $x_1$ y $x_2$ son conjugados entre sí. Podemos decir entonces que si un complejo es una solución de una ecuación de segundo grado, entonces su conjugado también es una solución. Con la ayuda de las tres propiedades discutidas antes, trataremos de generalizar este resultado a ecuaciones de cualquier grado en una variable.

Sea $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación de grado *n* cuyos coeficientes son números reales. Si el complejo $z_0$ es una solución de esta ecuación, entonces $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0$ toma el valor cero, es decir:

$$a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

Como en ambos lados del signo igual aparece el número cero, la igualdad no se altera si tomamos los conjugados, puesto que el conjugado del número cero es él mismo

$$\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \ldots + a_1 z_0 + a_0} = \bar{0}$$

Visto el lado izquierdo como una suma de complejos, por la propiedad *i*) y puesto que $\bar{0} = 0$, se tiene:

$$\overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

Aplicando la propiedad *ii*) tenemos

$$\overline{(a_n)}(\overline{z_0^{\,n}}) + \overline{(a_{n-1})}(\overline{z_0^{\,n-1}}) + \ldots + \overline{(a_1)}(\overline{z_0}) + \overline{a_0} = 0$$

Y como todo número real es conjugado de sí mismo.

$$a_n(\overline{z_0^{\,n}}) + a_{n-1}(\overline{z_0^{\,n-1}}) + \ldots + a_1(\overline{z_0}) + a_0 = 0$$

Ahora por la propiedad *iii*):

$$a_n(\overline{z_0})^n + a_{n-1}(\overline{z_0})^{n-1} + \ldots + a_1(\overline{z_0}) + a_0 = 0$$

Pero esto significa que $\overline{z_0}$ también es una solución de la ecuación original. Podemos resumir este resultado diciendo que si un número complejo es solución de una ecuación de cualquier grado con coeficientes reales, entonces el conjugado de este número, también es una solución de esta ecuación. O dicho de otro modo, las soluciones complejas de una ecuación como la anterior, nunca aparecen solas, se hacen acompañar siempre de su respectivo conjugado.

*EJERCICIO 7.9.* Según el resultado establecido antes, si $z_0$ es una solución de la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ con coeficientes reales, entonces $\overline{z_0}$ también es una solución de la ecuación. ¿Significa esto que la ecuación mencionada tiene siempre un número par de soluciones, independientemente del valor de *n*?. Justifique su respuesta.

## 8. POTENCIAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Aún cuando ya hemos resuelto el problema de multiplicar dos complejos dados en forma cartesiana, el uso de la expresión (5) encontrada en la sección 5, podría resultar muy laborioso cuando se intenta aplicar en multiplicaciones ligeramente más complicadas, veamos un ejemplo:

*EJEMPLO* 8.1. Calcule $(\sqrt{3}+i)^5$

Este problema es equivalente a realizar la multiplicación del número $\sqrt{3}+i$ cinco veces por sí mismo, es decir a calcular:

$$(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)$$

Con la herramienta que tenemos hasta ahora, el único camino pareciera ser el de ir realizando de dos en dos los productos indicados, esto es:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^5 &= (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)\\ &= (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(2+2\sqrt{3}i)\end{aligned}$$

$$= (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)(8i)$$

$$= (\sqrt{3}+i)(-8+8\sqrt{3}i)$$

$$= (-16\sqrt{3}+16i)$$

Aunque no se han escrito los detalles de los cálculos, el camino ha resultado laborioso y es de esperarse que lo sea más cuando la potencia que se requiere calcular sea mayor. Veamos cómo puede abordarse este problema con nuestro criterio gráfico. Como se ha visto, la multiplicación desde el punto de vista gráfico es más fácil de visualizar si los factores han sido expresados en forma polar, como en este caso se trata de la multiplicación repetida del mismo factor, traduzcámoslo a su forma polar.

$$\sqrt{3}+i = 2(cos 30° + i sen 30°)$$

puesto que

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \text{ y}$$

$$\theta = arctan \tfrac{1}{\sqrt{3}} = 30^0$$

Elevar el complejo en cuestión a la quinta potencia, significa multiplicarlo cinco veces por sí mismo; si empezamos elevándolo al cuadrado, obtenemos un complejo cuyo módulo es (2)(2)=4 y cuyo argumento es 30° +30° = 60°; al elevarlo al cubo, obtenemos otro número, de módulo (2)(4) = 8 y argumento 60° +30° = 90° y así sucesivamente, este proceso puede ser continuado hasta llegar a la quinta potencia. La Figura 22 ilustra cada uno de los pasos de este proceso

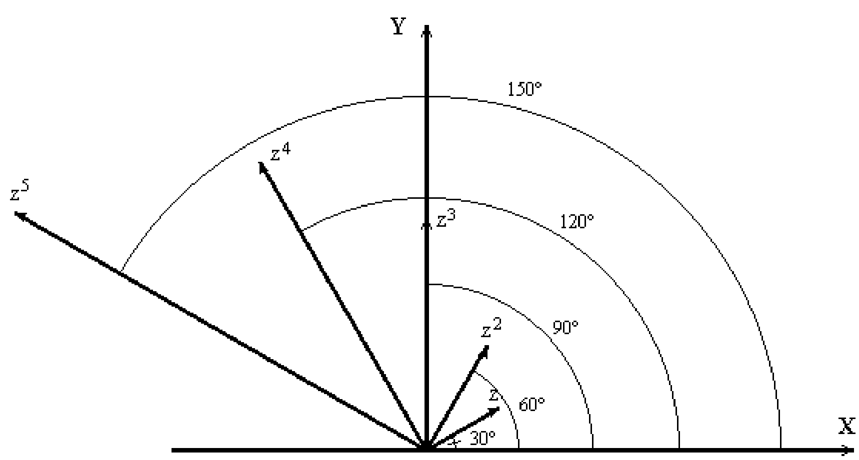



Figura 22

Mientras que el desarrollo numérico se puede escribir como sigue:

$(\sqrt{3}+i)^2 \quad = (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+i)$

$=[2(cos30º + isen30º)][2(cos30º + isen30º)]$

$=4(cos60º + isen60º)$

$(\sqrt{3}+i)^3 \quad = (\sqrt{3}+i)^2(\sqrt{3}+i)$

$=[4(cos60º + isen60º)][2(cos30º + isen30º)]$

$=8(cos90º + isen90º)$

$(\sqrt{3}+i)^4 \quad = (\sqrt{3}+i)^3(\sqrt{3}+i)$

$=[8(cos90º + isen90º)][2(cos30º + isen30º)]$

$=16(cos120º + isen120º)$

$(\sqrt{3}+i)^5 \quad = (\sqrt{3}+i)^4(\sqrt{3}+i)$

$=[16(cos120º + isen120º)][2(cos30º + isen30º)]$

$=32(cos150º + isen150º)$

$=32(-\frac{\sqrt{3}}{2}+(i(\frac{1}{2}))$

$=-16\sqrt{3}+16i$

Este procedimiento pareciera más laborioso que el anterior, pero es posible observar una cierta regularidad en el comportamiento de los resultados, que permite predecir una potencia cualquiera a partir de la anterior. Más aún, permite encontrar la potencia directamente del exponente, observe el siguiente resumen del desarrollo anterior.

$(\sqrt{3}+i) \quad =2(cos30º + isen30º)$

$(\sqrt{3}+i)^2 \quad =2^2(cos60º + isen60º)$

$(\sqrt{3}+i)^3 \quad =2^3(cos90º + isen60º)$

$(\sqrt{3}+i)^4 \quad =2^4(cos120º + isen120º)$

$(\sqrt{3}+i)^5 \quad =2^5(cos150º + isen150º)$

En este resumen destaca la relación existente entre el exponente al que se está elevando cada complejo, el exponente del módulo y el número de veces que se está considerando el argumento del complejo que sirve como base a la potencia. Utilice esta relación para realizar el ejercicio siguiente:

*EJERCICIO 8.1.* Calcule $(\sqrt{3}+i)^9$ y $(\sqrt{3}+i)^{16}$ y exprese el resultado en forma cartesiana.

*EJERCICIO 8.2.* Complete la tabla siguiente:

| | **$\|z\|$** | **arg($z$)** | **Forma polar de la potencia de $z$** |
|---|---|---|---|
| $z=1+i$ | $\sqrt{2}$ | 45° | $\sqrt{2}$ (cos45°+$i$sen45°) |
| $z^2=(1+i)^2$ | | | |
| $z^3=(1+i)^3$ | | | |
| $z^4=(1+i)^4$ | | | |
| $z^5=(1+i)^5$ | | | |
| $z^6=(1+i)^6$ | | | |
| $z^n=(1+i)^n$ | | | |

Observe el último renglón de la tabla anterior para contestar las preguntas siguientes: ¿Qué relación guarda $n$ con el módulo de $z^n$? y ¿Qué relación guarda $n$ con el argumento de $z^n$?

*EJERCICIO 8.3.* Complete la tabla siguiente:

| | **$\|z\|$** | **arg($z$)** | **Forma polar de la potencia de $z$** |
|---|---|---|---|
| $z=a+ib$ | $r$ | $\theta$ | $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ |
| $z^2=(a+ib)^2$ | | | |
| $z^3=(a+ib)^3$ | | | |
| $z^4=(a+ib)^4$ | | | |
| $z^5=(a+ib)^5$ | | | |
| $z^6=(a+ib)^6$ | | | |
| $z^n=(a+ib)^n$ | | | |

Observe el último renglón de la tabla anterior para contestar las preguntas siguientes: ¿Qué relación guarda $n$ con el módulo de $z^n$? y ¿Qué relación guarda $n$ con el argumento de $z^n$?

*EJERCICIO 8.3.* Calcule $(2-i)^{15}$ y exprese el resultado en forma cartesiana.

## 9. RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Como se ha visto en aritmética elemental, la radicación o extracción de raíces es, de alguna manera, una operación inversa de la potenciación. Se tiene así, por ejemplo, que la raíz cúbica de 64 es 4, porque el 4 es un número que al elevarlo al cubo arroja como resultado 64. Trataremos ahora de aplicar esta idea de radicación a los números complejos. Iniciemos con un ejemplo sencillo.

*EJEMPLO 9.1*. Extraer raíz cúbica a $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ .

Resolver este problema consistirá entonces en encontrar un número tal que al elevarlo al cubo, se obtenga $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ .

Puesto que para este número

$$r = 64$$

$$\text{y } \theta = arctan(-1) = 135°$$

entonces

$$-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i = 64(cos135º + isen135º)$$

Nuestro problema se reduce ahora a encontrar un complejo tal, que su módulo al cubo sea 64 y su argumento multiplicado por 3 sea un ángulo de 135°. Fácilmente encontramos que el número buscado debe tener módulo 4 y argumento igual a 45°. (ver Figura 23)

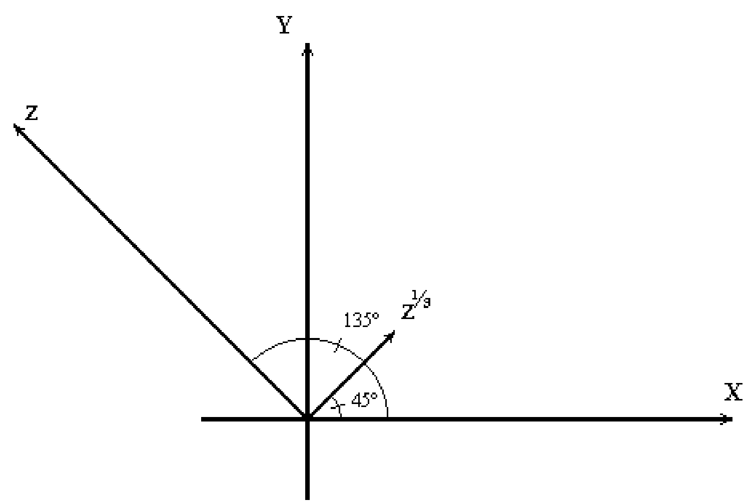



Figura 23

Hemos encontrado así que la raíz cúbica de $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ es el número 4(*cos*45°+*isen*45°) o en forma cartesiana $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$. Para verificar que esta raíz es correcta, basta con elevarla al cubo y cerciorse que el resultado es $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$. Veamos ahora si la raíz cúbica encontrada es la única o existen otras. La pregunta acerca de la posible existencia de otras raíces cúbicas puede hacerse en dos partes:

En primer lugar podemos preguntarnos con respecto al módulo, si la raíz cúbica de $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ puede tener un módulo distinto al encontrado, es decir si existe otro número positivo, cuyo cubo sea 64. La respuesta a esta pregunta es negativa, el 4 es el único número real positivo que al elevarlo al cubo nos da 64; Si existieran otras raíces cúbicas del número $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ también tendrían entonces módulo 4.

En segundo lugar, con respecto al argumento nos podemos preguntar si existen otros ángulos que al multiplicarlos por 3 nos den 135°. La respuesta pareciera ser negativa nuevamente, esto es, no pareciera existir otro ángulo positivo distinto de 45° que al multiplicarlo por 3, nos dé 135°. Sin embargo antes de dar una respuesta categórica a esta pregunta, veamos al resolver el ejercicio siguiente algunos detalles relacionados con ella.

*EJERCICIO 9.1*. Grafique los siguientes números complejos:

64(*cos*135° + *isen*135°)

64(*cos*495° + *isen*495°)

64(*cos*855° + *isen*855°)

64(*cos*1125° + *isen*1115°)

64(*cos*1575° + *isen*1575°)

64(*cos*1935° + *isen*1935°)

¿Cuántas formas polares existen para representar un número complejo?. Justifique su respuesta.

Algo en lo que no habíamos reparado hasta ahora, era la posibilidad de que un complejo escrito en forma cartesiana pudiera tener más de una forma polar de escribirse. En la búsqueda del argumento de la raíz cúbica, hemos encontrado que el ángulo de 45° es el único ángulo positivo que multiplicado por 3 no da 135°, pero el ángulo de 135° es sólo el argumento de una de las representaciones polares, la existencia de muchas otras representaciones pareciera complicar un poco el problema; porque ahora para cada representación podemos encontrar un ángulo positivo que multiplicado por 3, nos dé el argumento de la representación polar correspondiente. En base a los resultados del ejercicio *9.1*, hemos construido la siguiente tabla, en la que hemos llamado 3θ al argumento del complejo $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ y θ al posible argumento de la raíz cúbica.

| 3θ | θ | Posible raíz cúbica |
|---|---|---|
| 135° | 45° | 4(*cos*45° + *isen*45°) |
| 495° | 165° | 4(*cos*165° + *isen*165°) |
| 855° | 285° | 4(*cos*285° + *isen*285°) |
| 1215° | 405° | 4(*cos*405° + *isen*405°) |
| 1575° | 525° | 4(*cos*525° + *isen*525°) |
| 1935° | 645° | 4(*cos*645° + *isen*645°) |

Como se debió concluir en el ejercicio *9.1*, la lista puede continuarse indefinidamente y para cada ángulo 3θ que se considere, es posible obtener una raíz cúbica de argumento θ y módulo 4, lo cual pareciera conducirnos a la conclusión de que el número de raíces cúbicas encontradas es infinito.

*EJERCICIO 9.2.* De la tabla anterior se ha tomado la lista de las posibles raíces cúbicas. Complete la tabla siguiente traduciendo cada una de ellas a su forma cartesiana.

| Posible raíz cúbica en forma polar | Posible raíz cúbica en forma cartesiana |
|---|---|
| 4(*cos*45$^O$ + *isen*45$^O$) | 2.8284 + 2.8284*i* |
| 4(*cos*165$^O$ + *isen*165$^O$) | |
| 4(*cos*285$^O$ + *isen*285$^O$) | |
| 4(*cos*405$^O$+*isen*405$^O$) | |
| 4(*cos*525$^O$ + *isen*525$^O$) | |
| 4(*cos*645$^O$ + *isen*645$^O$) | |

¿Cuántas raíces cúbicas diferentes tiene el número $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ ?. Justifique su respuesta.

*EJERCICIO 9.3.* Grafique las raíces cúbicas diferentes encontradas en el ejercicio anterior. ¿Qué ángulo tendría que rotar una para hacerla coincidir con la siguiente?.

*EJERCICIO. 9.4.*. Los tres números encontrados, son raíces de la ecuación $x^3-(-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i)=0$. Explique por qué ninguno de ellos es conjugado de otro ¿Esto contradice el resultado final de la sección 7?

Recapitulando lo visto hasta ahora sobre raíces de complejos, tenemos que el número $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ tiene tres raíces cúbicas diferentes, a saber:

$$(-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i)^{1/3} = [64(\cos 135° + i\,\mathrm{sen}\,135°)]^{1/3}$$
$$= 4(cos45°+isen45°)$$

$$(-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i)^{1/3} = [64(\cos 495° + i\,\mathrm{sen}\,495°)]^{1/3}$$
$$= 4(cos165°+isen165°)$$

$$(-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i)^{1/3} = [64(\cos 855° + i\,\mathrm{sen}\,855°)]^{1/3}$$
$$= 4(cos285°+isen285°)$$

Al calcular el módulo de la raíz no se ha tenido ningún problema, puesto que siendo el módulo de cualquier complejo un número positivo, simplemente hemos calculado la única raíz cúbica real de 64, es decir $(64)^{1/3} = 4$. Donde pudiera haber alguna dificultad, es a la hora de establecer cuáles son los argumentos de las diferentes raíces. A este respecto, una vez convencidos que el número $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$ tiene un número infinito de representaciones polares, hemos tomado primeramente aquella cuyo argumento es mayor que 0° y menor o igual que 360°, que en este caso ha resultado ser de 135°. Este argumento θ con el que hemos iniciado el trabajo y el único que cumple con la desigualdad 0°<θ≤360° lo llamaremos el *argumento principal* del complejo $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$. A partir de este argumento principal, hemos obtenido (dividiéndolo entre 3) un ángulo de 45°, que se ha usado para calcular la raíz 4(*cos*45°+*isen*45°), llamaremos a esta raíz, la *raíz principal* del número $-32\sqrt{2}+32\sqrt{2}i$. Para calcular una segunda raíz hemos considerado el argumento principal más una "vuelta entera", esto es 135° +360° = 495° y dividiéndolo entre 3, hemos obtenido un ángulo de 165°, usándolo para encontrar la raíz 4(*cos*165°+*isen*165°). La tercera raíz se ha encontrado, tomando el argumento principal más dos "vueltas enteras", esto es 135°+(2)(360°)=135°+720° = 855°. Dividiendo este ángulo entre 3, se ha obtenido la raíz 4(*cos*285° + *isen*285°). La siguiente raíz podría buscarse tomando el argumento principal y sumándole tres "vueltas enteras" esto es 135°+(3)(360°), pero al dividir este ángulo entre 3, se obtiene:

$$\frac{[135°+(3)(360°)]}{3} = \frac{135°}{3} + \frac{(3)(360°)}{3}$$

$$=45°+360°$$

y como

$$4(cos45°+isen45°) = 4[cos(45° +360°)+isen(45° +360°)].$$

Encontramos así una raíz que ya teníamos, por razones similares, al continuar el proceso las raíces se siguen repitiendo y por lo tanto ya no tiene sentido continuarlo.

Abordemos por último el caso general de calcular la raíz $n$-ésima de un número complejo cualquiera. Sea $z$ un complejo dado en su forma polar (si no estuviera en su forma polar, ya hemos visto como traducirlo a ella) de módulo $r$ y argumento principal θ, esto es, $z=r(cos\theta+isen\theta)$. Calculemos sus raíces $n$-ésimas, es decir los posibles valores de $z^{1/n}$. El módulo de estas raíces, no presenta mayor problema y será $r^{1/n}$ para todas ellas. Iniciamos el cálculo de los argumentos, considerando el argumento principal θ y dividiéndolo entre $n$; obtenemos de esta manera la raíz principal, que puede escribirse de la siguiente manera: (ver Figura 24).

$$z_0 = r^{1/n}[\cos\tfrac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{\theta}{n}]$$

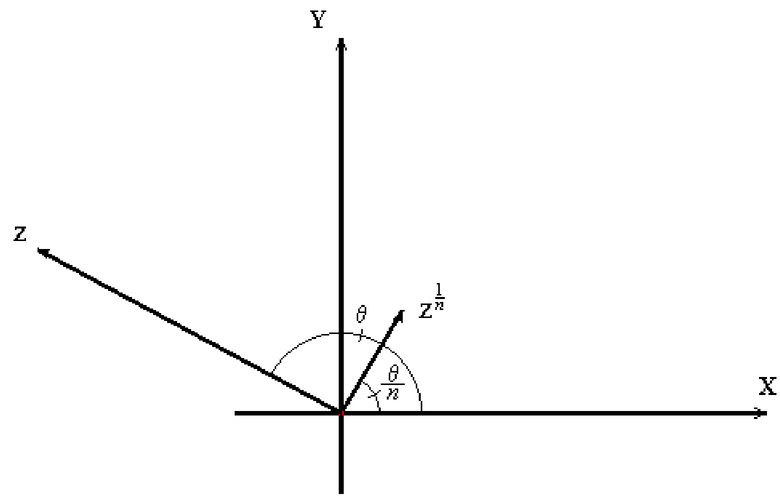



Figura 24

Luego sumamos al argumento de la raíz principal una "vuelta entera" (360°), y dividimos el resultado entre $n$, obteniendo $\frac{\theta+360°}{n}$, que es el argumento de otra raíz, ésta puede expresarse como:

$$z_1 = r^{1/n}[\cos\tfrac{\theta+360°}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{\theta+360°}{n}]$$

La siguiente raíz puede ser encontrada, sumando al argumento principal dos "vueltas enteras", es decir (2)(360°) = 720° y luego dividiendo el resultado entre *n*. Se obtiene de este modo el ángulo $\frac{\theta+360°}{n}$, que corresponde a la raíz siguiente:

$$z_2 = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+(2)(360°)}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+(2)(360°)}{n}]$$

Continuando así, podemos encontrar el resto de las raíces *n*-ésimas de *z*.

$$z_3 = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+(3)(360°)}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+(3)(360°)}{n}]$$

$$z_4 = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+(4)(360°)}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+(4)(360°)}{n}]$$

$$z_5 = r^{1/n}[\cos\frac{\theta+(5)(360°)}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+(5)(360°)}{n}]$$

¿Cuándo habremos encontrado todas las raíces distintas? Depende desde luego del valor de *n*. Llegará un momento en que sumemos *n* "vueltas enteras" al argumento principal y al dividir entre *n*, tengamos como resultado $\frac{\theta+(5)(360°)}{n} = \frac{\theta}{n} + 360°$, que corresponde a la raíz:

$$\begin{aligned} z_n &= r^{1/n}[\cos\frac{\theta+(n)(360°)}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+(n)(360°)}{n}] \\ &= r^{1/n}[\cos(\tfrac{\theta}{n} + 360°) + i\,\text{sen}(\tfrac{\theta}{n} + 360°)] \\ &= r^{1/n}[\cos\tfrac{\theta}{n} + i\,\text{sen}\,\tfrac{\theta}{n}] \end{aligned}$$

Esta raíz es igual a la primera encontrada y a partir de ésta las raíces empiezan a repetirse. Todas las raíces obtenidas antes de este paso son por lo tanto distintas entre sí. Esto significa que todas las raíces diferentes pueden ser calculadas, sumando al argumento principal 0, 1, 2, 3, ... , *n*-1 "vueltas enteras" y dividiendo los resultados entre el número fijo *n*; como se ha visto, sumar la *n*-ésima "vuelta entera" resulta innecesario.

*EJERCICIO 9.5* Calcule todas las raíces cuartas del número complejo *z*=81(*cos*160°+*isen*160°) y exprésela en forma cartesiana.

*EJERCICIO 9.6.* Calcule todas las raíces sextas del número complejo $z$=-32-32$\sqrt{3}\,i$

*EJERCICIO 9.7.* Si *n* es un número impar y *p* es un número real positivo, demuestre que las raíces *n*-esimas de *p* son: un número positivo y $\frac{n-1}{2}$ parejas de complejos conjugados.

*EJERCICIO 9.8.* Si *n* es un número par y *p* es un número real positivo, demuestre que las raíces *n*-esimas de *p* son: un número positivo, un número negativo y $\frac{n-2}{2}$ parejas de complejos conjugados.

## BIBLIOGRAFÍA.

Dunham, W. (1990). Journey Through Genius: the great theorems of mathematics. New York: Wiley.

Kurosh, A. G. (1977). Curso de álgebra superior (tercera edición). Moscú: Mir.

Markushévich, A. I. (1984). Curvas maravillosas. Números complejos y representaciones conformes. Funciones maravillosas . (2ª ed.). Moscú: MIR.

Polya, G. y Latta, G. (1976). Variable compleja. México: LIMUSA