Capítulo 7

Series Numéricas y Series de Potencias.

7.1 Introducción.

En este capítulo le daremos sentido al concepto de **suma infinita** de números ó **serie** numérica, es decir, diremos que significa sumar una infinidad de números

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots$$

El concepto de serie es muy utilizado para representar ciertas funciones o cantidades numéricas que, de otra manera, resultaría difícil estudiar.

Se hace la aclaración de que el tema de series es sumamente extenso y que su inclusión en este curso es meramente introductorio, pretendiéndose destacar las principales propiedades que permitan su utilización en otros contextos como el análisis numérico y las ecuaciones diferenciales.

7.2 Motivación.

Antes de dar la definición formal de lo que es una serie, trataremos de llegar a ella de una manera intuitiva.

Es conveniente notar que no siempre será posible sumar una infinidad de números pues, aunque no dispongamos aun de una definición precisa, podemos afirmar que, por ejemplo, la siguiente suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

no corresponde a un número real pues a medida que agregamos sumandos, la suma crece y lo hace más allá de cualquier límite.

Si queremos obtener la siguiente suma:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

probablemente estemos tentados, por nuestra experiencia con sumas finitas, a decir que esta suma vale cero, pues si los sumamos de dos en dos, estaremos obteniendo una suma infinita de ceros, que claramente debería valer cero, es decir:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$$

Obsérvese que estamos utilizando la propiedad asociativa de la suma. Si agrupamos de la siguiente manera

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - \ldots = 1$$

obtenemos un resultado contradictorio.

Es razonable pedir que, si los términos de una serie se pueden sumar, el valor de la suma sea único y, en este caso, tendríamos dos posibles valores para la suma, lo cual nos lleva a concluir que esta serie no es posible sumarla. Otra conclusión inmediata es que, para sumas infinitas, no es válida la propiedad asociativa.

7.3 Expansiones decimales como sumas

Una situación cotidiana en la que encontramos el concepto de serie, aunque sea de manera oculta, se da al representar a los números reales en notación decimal.

Cuando expresamos un número real en notación decimal, cada dígito tiene un valor según la posición que ocupa, por ejemplo

$$S = 2.769$$

significa 2 enteros más 7 décimas más 6 centésimas más 9 milésimas, es decir,

$$S = 2 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{9}{1000}$$

es decir a este número lo podemos expresar como una suma finita de números reales.

Sin embargo cuando representamos de esta manera a $\frac{1}{3}$, por el algoritmo de la división sabemos que tiene una representación decimal infinita periódica

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

lo cual significa que

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$

Así pues, este número se expresa como una suma infinita de números reales.

A diferencia del ejemplo de la suma de todos los naturales, en este caso al agregar sumandos, evidentemente la suma crece, sólo que al parecer, la suma no excede de 0.4, es decir estos valores son 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, etc las cuales son aproximaciones cada vez mejores a 1/3. Expresando estas expansiones decimales finitas como sumas, podemos decir que las siguientes sumas finitas son aproximaciones cada vez mejores de 1/3.

$$S_1 = \frac{3}{10} \qquad\qquad S_1 = 0.3$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \qquad\qquad S_1 = 0.33$$

$$S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^2} \qquad\qquad S_1 = 0.33$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n} \qquad\qquad S_n = \underbrace{0.333\ldots3}_{\text{n veces el tres}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1/3 \qquad\qquad 1/3$$

En vista de lo anterior parece razonable esperar que las sumas finitas tengan a 1/3 como límite, es decir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$$

lo cual podemos verificarlo utilizando la conocida fórmula para la suma de una progresión geométrica

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \quad si\ r \neq 1$$

En nuestro caso

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + ... \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$S_n = \frac{3}{10}\left(\frac{1-(1/10)^n}{1-1/10}\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{1-(1/10)^n}{9/10}\right)$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10}\left(\frac{1-(1/10)^n}{9/10}\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{9/10}\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Esta situación refleja muy precisamente el significado de las sumas infinitas y que escribimos en la siguiente definición:

7.4 Definición y Ejemplos.

Definición: Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales., la expresión

$$a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

se llama **SERIE NUMÉRICA**.

A partir de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ formamos una nueva sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$de sumas parciales

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

$$\vdots$$

y diremos que la serie es CONVERGENTE (***sus términos se pueden sumar***) si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe. De lo contrario diremos que la serie es DIVERGENTE (**sus términos no se pueden sumar**).

Si expresamos a S_n y a S en notación sumatoria

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

la serie convergente se expresaría como

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

lo cual expresa a una serie como el límite de las sumas finitas (sumas parciales)

Ejemplo 1. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$ es convergente.

Solución. En la sección anterior probamos justamente que el límite de las sumas parciales vale 1/3.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10}\left(\frac{1-(1/10)^n}{9/10}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{10}\left(\frac{1-(1/10)^n}{9/10}\right) = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{9/10}\right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ es convergente.

Solución.
Esta serie fue la analizada anteriormente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+1-1+...$$

Sus sumas parciales son

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - 1 = 0$$

$$S_3 = 1\text{-}1 + 1 = 1$$

$$S_4 = 1\text{-}1 + 1\text{-}1 = 0$$

•
•
•

Y claramente su límite no existe por lo que la serie es divergente.

7.5 La serie Geométrica.

Una serie geométrica es una de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 ...$$

Para conocer los valores de r para los cuales esta serie converge, seguimos el mismo procedimiento que en el caso particular de la serie geométrica que representa a 1/3.

$$S_n = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} \qquad \text{para } \ r \neq 1$$

para r =1

$S_n = n$ y claramente la serie sería divergente en este caso.

Para $|r| > 1$

$r^n \to \infty \quad cuando \ \ n \to \infty$ y por lo tanto, la serie es divergente.

Para $|r| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad y \;\; por\, lo \tan to \;\; \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Así pues la serie geométrica es convergente solamente cuando el valor absoluto de la razón es estrictamente menor que uno, y

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad si \quad |r| < 1}$$

A continuación enunciaremos dos propiedades de las series convergentes, las cuales son fáciles de probar pues ambas son válidas para las sumas parciales.

Propiedades:

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y k es cualquier número real, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ es convergente y se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplo 3 Encuentre el valor de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{7^n}$

Solución:
Aunque formalmente no es una serie geométrica, utilizando la propiedad 2, podemos transformarla en una serie geométrica de razón 1/7.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{7^n}=2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{7^n}=2\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+...\right)$$

donde la serie del paréntesis es la serie completa menos los dos primeros términos:

$$\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}-1-\frac{1}{7}$$

por lo tanto

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{7^n}=2\left(\frac{7}{6}-1-\frac{1}{7}\right)=2\left(\frac{1}{42}\right)=\frac{1}{21}$$

Otra forma de llegar a este resultado, es factorizando el primer término.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{7^n}=\frac{2}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\frac{2}{7^4}+...=\frac{2}{7^2}\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+...\right)=\frac{2}{7^2}\left(\frac{7}{6}\right)=\frac{2}{42}=\frac{1}{21}$$

Observación: Para que una sucesión infinita de números tengan la posibilidad de ser sumados y obtener una cantidad finita, es ***necesario*** que, conforme n crece, los términos sean cada vez más próximos a cero, como se observó en los ejemplos de series convergentes, es decir,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}a_n=0}$$

Lo cual se cumple siempre para series convergentes, pues sus sumas parciales convergen a la serie

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

donde

$$S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_n$$

Despejando al término *n*-ésimo de la serie

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

y tomando límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0\,.$$

7.6 La Serie Armónica.

Reiteramos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ es una condición ***necesaria*** para que la serie sea convergente, pero, desafortunadamente, la condición ***no es suficiente***, como lo veremos en la siguiente serie, llamada serie armónica, en la cual se cumple que el término *n*-ésimo tiende a cero pero la serie es divergente, es decir

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ convergente}}$$

Ejemplo 4 Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ es divergente.

Solución. Para probar que esta serie es divergente, veremos que las sumas parciales toman valores cada vez más grandes tendiendo al infinito. En particular veremos que las sumas parciales S_{2^k} tienden a infinito cuando k también tiende a infinito.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = S_{2^2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$\text{pues } \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \quad \text{ y } \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Utilizando el mismo razonamiento para S_8:

$$S_8 = S_{2^3} = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

Mediante un argumento inductivo concluimos que

$$S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2} \quad \text{para todo natural } k$$

y, por lo tanto, las sumas parciales crecen sin límite, y esto prueba que la serie armónica es divergente.

7.7 Series de Términos no-negativos: El Criterio de Comparación.

Las series para las cuales es más fácil analizar su convergencia o divergencia son las series de términos positivos, pues evidentemente sus sumas parciales constituyen una sucesión creciente y sólo bastará comprobar que están acotadas o no para determinar su naturaleza.

Ejemplo 5. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Solución.
Primeramente notamos que los términos de esta serie son menores o iguales que los de la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Es decir para $n \geq 2$ se cumple que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ lo cual implica que $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$, en consecuencia las sumas parciales de nuestra serie, S_n no excederán a las sumas parciales T_n de la serie geométrica, es decir,

$$S_n \leq T_n$$

y como $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, la sucesión S_n de las sumas parciales estará acotada; es decir:

$$S_n \leq T_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ es convergente.

Observación. Como la comparación entre las sumas parciales se dio a partir de n = 2 en realidad hemos probado que la serie que converge es:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

lo cual claramente implica que la serie completa también converge pues sólo falta agregarle un término, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

El procedimiento seguido en este ejercicio es el llamado Criterio de Comparación, el cual enunciamos a continuación:

Criterio de Comparación (Para convergencia):

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie **convergente** de términos positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos positivos que satisface $b_n \leq a_n$ para todo n entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **convergente.**

Aceptaremos sin demostración que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Ejemplo 6. Pruebe usando el criterio de comparación que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es convergente.

Solución.

Al utilizar el criterio de comparación debemos tener a la mano la serie con la cual la queremos comparar, en este caso la compararemos con la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Como $n^3 \geq n^2$ para toda n natural, entonces $\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$ y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es convergente.

Observaciones:

1. Al utilizar el criterio de comparación hemos probado que una cierta serie es convergente pero no determinamos su valor.
2. El caso particular del ejemplo anterior se generaliza para cualquier potencia mayor que uno, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ es convergente para p > 1.}$$

El criterio de comparación también puede utilizarse para determinar divergencia de series de términos positivos como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7. Determine si la siguiente serie es convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Solución.
Primeramente notamos que los términos de esta serie son mayores o iguales que los de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

pues como $\sqrt{n} \leq n$ para todo n natural, entonces $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ lo cual implica que las sumas parciales de nuestra serie, S_n son mayores o iguales que las sumas parciales T_n de la serie armónica, es decir,

$$S_n \geq T_n$$

y como las sumas parciales T_n crecen sin límite por ser divergente la serie armónica, la sucesión S_n también crecerá sin límite y por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente.

Observación: En general la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es divergente para $p \leq 1$

El procedimiento del ejercicio anterior lo podemos plasmar en el siguiente criterio:

Criterio de Comparación (Para divergencia):

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie **divergente** de términos positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de términos positivos que satisface $b_n \geq a_n$ para todo n entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es **divergente**.

A continuación enunciaremos sin demostración dos importantes criterios de convergencia, los cuales están basados en el criterio de comparación.

Criterio del Cociente. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisface:

1. $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, entonces la serie es **convergente.**

2. $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, entonces la serie es **divergente.**

Criterio de la Raíz . Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ satisface:

1. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, entonces la serie es **convergente.**
2. $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, entonces la serie es **divergente.**

Ejemplo 8. Determine la convergencia de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Solución.

Utilizaremos el criterio del cociente, tomando $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{n\,2^{n+1}}{(n+1)!\,2^n} = \frac{2}{n+1}$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n+1} = 0$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ converge.

Observaciones:

1. Un procedimiento similar al anterior nos lleva a que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!}$ converge para cualquier valor real de *k*.
2. Como el límite del término *n*-ésimo de una serie convergente tiende a cero, hemos obtenido de manera indirecta que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \quad \text{para todo número real } k.$$

Ejemplo 9. Determine la convergencia de la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$$

Solución.

Utilizaremos el criterio del cociente, tomando $a_n = \dfrac{n}{5^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n+1}{5^{n+1}}}{\dfrac{n}{5^n}} = \frac{(n+1)\,5^n}{n\,5^{n+1}} = \frac{n+1}{5n}$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{5n} = \dfrac{1}{5} < 1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ converge.

7.8 Series de Potencias.

Cuando analizamos la serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

encontramos que esta converge para $|x|<1$ y diverge para $|x|\geq 1$, es decir si consideramos a la función

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

su dominio será D_{f} = (0, 1). Esto nos lleva a considerar una nueva clase de funciones: aquellas representables por medio de series.

Definición: Una **Serie de Potencias** es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

donde a_k son números reales.

Claramente todas las series de potencias convergen para x = 0. Puede demostrarse, lo cual se sale del alcance de este texto, que este tipo de series convergen en intervalos centrados en 0, incluyendo toda la recta real, a los cuales se les llama **Intervalos de Convergencia**.

Si recordamos la fórmula de Taylor de algunas funciones, tendremos representaciones en series de potencias

Ejemplo 10. Encuentre la serie de potencias para la función $f(x) = e^x$.

Solución.
En el capítulo 2, encontramos la fórmula de Taylor (Mac Laurin) para esta función

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + E_n$$

donde E_n es el residuo dado por el Teorema de Taylor

$$E_n = \frac{x^n}{n!} e^c$$

donde *c* se encuentra entre o y *x*.

Si le llamamos S_n a la sucesión de las sumas parciales de la serie de potencias, despejando E_n de la fórmula de Taylor,

$$E_n = e^x - S_n$$

y utilizando el hecho de la sección anterior: $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para todo *x* real,

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} e^c = e^c \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

y en consecuencia las sumas parciales convergen a e^x,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = e^x$$

lo cual nos representa a la función exponencial en serie de potencias para todo *x* real.

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} = 1 + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2!} + \frac{\mathrm{x}^3}{3!} + \ldots \qquad \text{notación sumatoria:} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

de manera completamente análoga, podemos encontrar la representación en series de potencias de las funciones seno y coseno, para todo *x* real:

$$\boxed{senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad \text{en notación sumatoria:} \qquad senx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \text{en notación sumatoria:} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

Observación: Si admitimos, como realmente sucede en el intervalo de convergencia, que las series de potencias se pueden derivar e integrar término a término, podremos comprobar hechos como:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}, \qquad \text{ó} \qquad \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es decir, las conocidas fórmulas de derivación $\frac{d}{dx} senx = \cos x$ y $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.

EJERCICIOS

I. Encuentre el valor de las siguientes series geométricas.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{5}\right)^n$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$

5) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ 6) $\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$

II. Utilizando los criterios de convergencia, determine la naturaleza de las siguientes series.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ 2) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n-5}$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+sen(n+9)}{n^3}$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n6^n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$

III. Utilizando el hecho de que para $|x|<1$ se cumple:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x},$$

1. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1+x}$

   Sugerencia: Remplace x por $-x$ en la fórmula anterior.

2. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   Sugerencia: Remplace x por x^2 en la fórmula anterior

3. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \arctan x$

   Sugerencia: Integre en ambos lados en la fórmula anterior.

IV. Utilizando la serie de potencias para $f(x) = \frac{1}{1+x}$, obtenida en el ejercicio anterior,

1. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$

   Sugerencia: Integre en ambos lados en la serie de potencias.

2. Encuentre la serie de potencias para $f(x) = \ln x$

   Sugerencia: Remplace x por $x - 1$ en la fórmula anterior.

V. Utilizando la representación en series de potencias para las funciones sen$x$ y e^x e integrando término a término, encuentre la serie de potencias de:

1) $\int \frac{senx}{x} dx$ 2) $\int e^{x^2} dx$

.