Capítulo 3

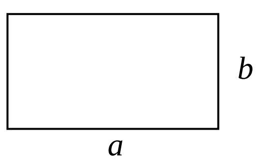
La Integral de Riemann

3.1 Introducción.

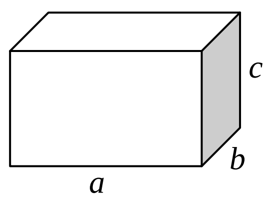
Iniciaremos el estudio de la Integral, uno de los conceptos más importantes de toda la matemática.

Los procesos de límite fundamentales del Cálculo son los de Derivación e Integración. Algunos casos aislados de estos procesos fueron considerados en la antigüedad, aunque su desarrollo sistemático inició hasta el siglo XVII con los trabajos de Newton y Leibnitz.

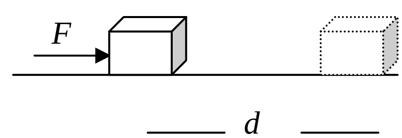
En nuestros estudios elementales de Física y Matemáticas aprendimos a calcular áreas de ciertas figuras geométricas como rectángulos, volúmenes de paralelepípedos; trabajo mecánico desarrollado por una fuerza constante; la distancia recorrida por un cuerpo en movimiento rectilíneo a una cierta velocidad media, etc. En todos ellos la única herramienta matemática utilizada, es la operación fundamental de la multiplicación.



$A = a \times b$



$V = a \times b \times c$



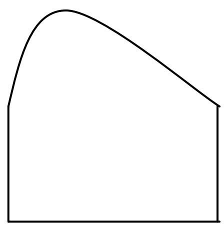
$W = F \times d$

t = tiempo de recorrido $\quad$ v = velocidad media $\quad$ d = distancia

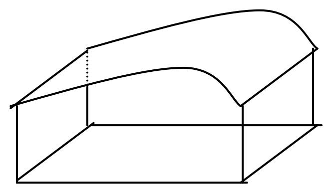
$$d = v \times t$$

En esta sección, a partir del concepto de Integral construiremos una herramienta que, entre otras cosas, nos permitirá resolver problemas más generales que los anteriores, es decir, determinar áreas de figuras y volúmenes de sólidos para las que la geometría no nos da una fórmula; el trabajo desarrollado por una fuerza variable en todo el recorrido; la distancia recorrida por un móvil cuando la velocidad varía en cada instante, etc.

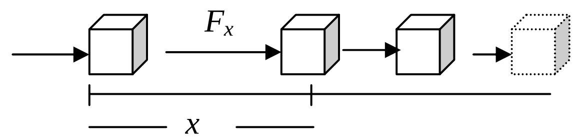
En la siguiente ilustración se muestran algunas de éstas generalizaciones.



$A = \int \ ?$

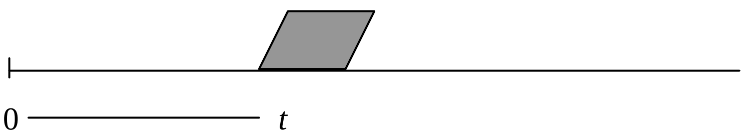


$V = \int \ ?$



Trabajo realizado por una fuerza variable

$W = \int \ ?$



Distancia recorrida al tiempo t, cuando la velocidad varía en cada instante de tiempo

$d = \int \ ?$

En el estudio de estas nuevas situaciones, la operación fundamental de la multiplicación es insuficiente, por lo que tenemos que hacerla evolucionar a una nueva herramienta más potente que permita solucionar este tipo de problemas.

> **Observación. En este sentido, como herramienta aplicada a la solución de este tipo de problemas, diremos que la INTEGRAL es una "operación avanzada" que generaliza a la "operación elemental" de la MULTIPLICACION, al igual que la DERIVADA generaliza a la DIVISION.**
>
> **Además de ser una herramienta necesaria y útil, la Integral constituye una Teoría Matemática completa y rigurosa.**

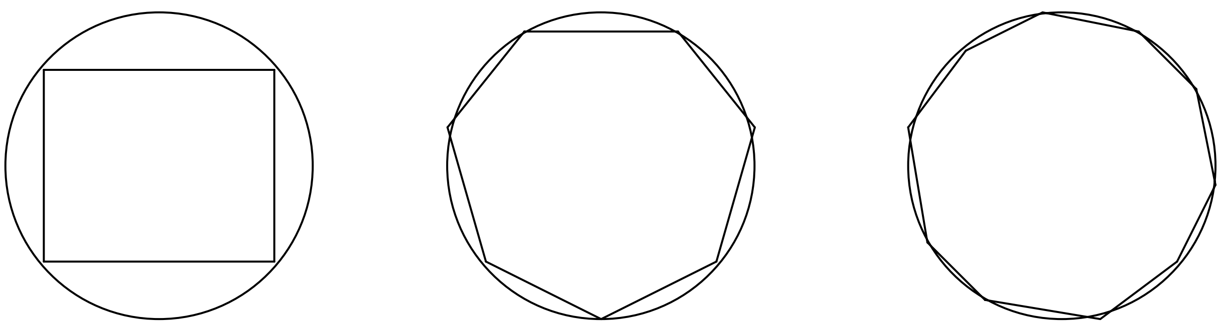
3.2 Algunos problemas para motivar el concepto de Integral.

En los siguientes ejemplos resolveremos problemas de área, volumen, trabajo mecánico desarrollado por una fuerza no necesariamente constante y cálculo de la distancia recorrida por un cuerpo en el instante t, dada su velocidad instantánea. En los primeros dos encontraremos el área de un círculo de radio r, y el volumen de una pirámide, basándonos en una idea muy antigua, propuesta por primera vez por el sabio griego Antifón alrededor del año 430 A.C. y desarrollada posteriormente por el matemático griego Eudoxio. Se le conoce como el "***Método de Agotamiento de Eudoxio***". En los otros, abordaremos dos problemas del campo de la Física; uno de trabajo mecánico y otro del cálculo de la distancia dada la velocidad instantánea.

3.2.1 El método de Agotamiento de Eudoxio, π y el área del círculo de radio 1

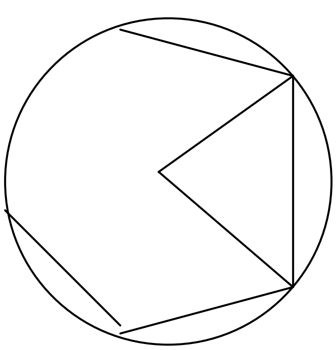
Problema. Encuentre el área de un círculo de radio *r*.

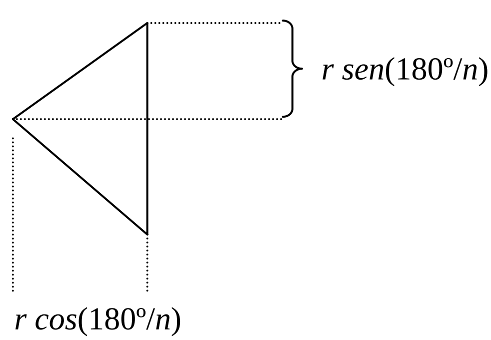
Solución: El método de agotamiento de Eudoxio consiste en aproximar el área del círculo por áreas de polígonos regulares inscritos, en los cuales por supuesto la aproximación no es buena si el número de lados es pequeño; pero si consideramos polígonos con un número cada vez mayor de lados, las áreas de éstos se aproximarán cada vez más al área del círculo, como se aprecia en la figura.



En cada caso, el área del polígono es menor que el área del círculo; pero si incrementamos el número de lados del polígono, entonces dentro de éste se incluirá más área del círculo. Consecuentemente, cuando el número de lados n tiende a infinito, el área del polígono regular agotará el área del círculo. Ya que es fácil encontrar una fórmula para el área de un polígono regular de n lados, podemos obtener el área del círculo al encontrar el límite de la fórmula cuando n tiende a infinito.

Usemos el símbolo $P(n)$ para denotar el área de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r. Para obtener una fórmula para $P(n)$ podemos usar el hecho de que cualquier polígono regular de n lados puede ser cortado en triángulos congruentes y así obtenemos el área del polígono como la suma de las áreas de los triángulos.

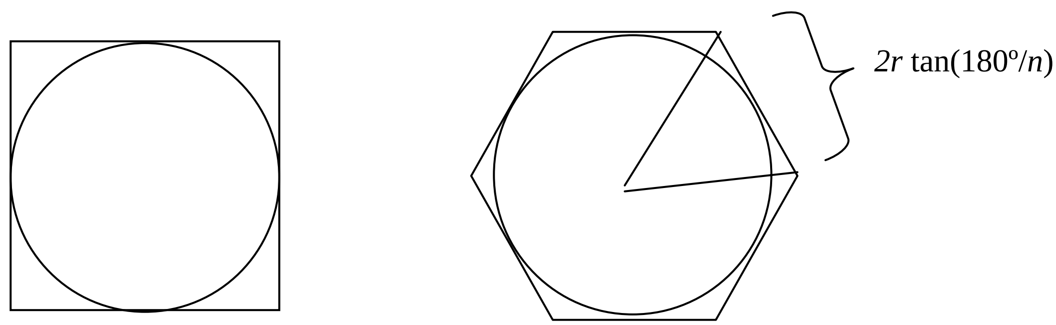




Obsérvese que cada uno de estos triángulos es isósceles, ya que dos de sus lados son radios del círculo. Es más, podemos encontrar el valor del ángulo cúspide dividiendo 360º en n partes iguales. El área de cada triángulo puede calcularse al multiplicar un medio de su base por su altura; determinaremos esas dos dimensiones por medio de la trigonometría. Por ejemplo, la distancia del centro del círculo a un lado del polígono nos da la longitud de la altura del triángulo, a saber r cos(180º/n). Además, un medio de la base del triángulo, que es un medio de la longitud del lado del polígono, es r sen(180º/n). Estas dimensiones se muestran en la figura anterior. Así, el área total de nuestro polígono esta dada por la fórmula:

$$P(n) = n\, r^2 \operatorname{sen}(180^\circ/n) \cos(180^\circ/n).$$

De manera completamente análoga, podemos aproximarnos al área del círculo utilizando polígonos regulares circunscritos



Si Q(n) es el área del polígono de n lados circunscrito al círculo, podemos encontrar con un desarrollo similar al anterior que:

$$Q(n) = n\, r^2 \tan(180^\circ/n)$$

En la tabla de abajo se muestran las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos en algunos valores particulares de n:

$\boldsymbol{P(n)}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Q(n)}$
$2\, r^2$	4	$4\, r^2$
$2.8284\, r^2$	8	$3.3137\, r^2$
$3.0614\, r^2$	16	$3.1826\, r^2$
$3.1214\, r^2$	32	$3.1517\, r^2$
$3.1363\, r^2$	64	$3.1441\, r^2$
$3.1405\, r^2$	128	$3.1422\, r^2$
$3.1401\, r^2$	256	$3.1418\, r^2$
$3.14157\, r^2$	1000	$3.1416029\, r^2$
$3.141592447\, r^2$	10000	$3.141592757\, r^2$

Nótese que el área A del círculo satisface:

$$P(n) < A < Q(n)$$

Es decir, de acuerdo al último renglón de la tabla

$$3.141592447\, r^2 < A < 3.141592757\, r^2$$

por lo que podemos afirmar que con un polígono de 10,000 lados podemos encontrar las primeras 6 cifras decimales correctas del número que multiplicado por r^2 nos da el área del círculo de radio r:

$$A \approx (3.141592)\, r^2$$

Sabemos por la conocida fórmula de la geometría que $A = \pi r^2$, por lo que este método nos permite encontrar las cifras decimales que deseemos del número π.

Con los recursos modernos de límites podemos encontrar el área exacta del círculo al hacer crecer indefinidamente el número de lados del polígono, como el que se desarrolla a continuación, en el que consideramos a 180º como π radianes.

$$A = \lim_{n\to\infty} P(n)$$

$$A = \lim_{n\to\infty} nr^2 \operatorname{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)$$

multiplicando y dividiendo por la misma cantidad, π/n, y sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, obtenemos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{(\pi/n) nr^2 \operatorname{sen}(\pi/n)\cos(\pi/n)}{(\pi/n)} = \lim_{n\to\infty} \pi\, r^2 \cos(\pi/n) \frac{\operatorname{sen}(\pi/n)}{(\pi/n)} = \pi\, r^2$$

por lo que el área exacta del círculo de radio r es:

$$A = \pi\, r^2$$

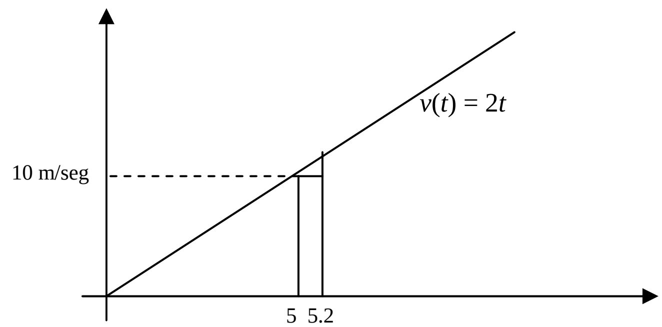
3.2.2 Cálculo de la distancia recorrida a partir de la velocidad instantánea

Problema 4. Un móvil parte del reposo y su velocidad en cada instante *t* (seg) viene dada por *V*(*t*)=2*t* (m/seg). Encuentre la distancia recorrida después de 10 segundos de iniciado el recorrido.

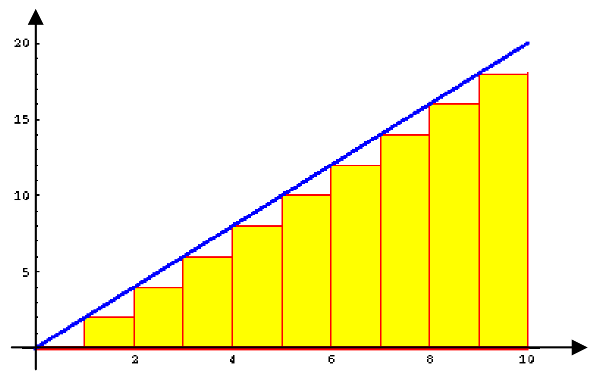
Solución: Utilizaremos el hecho de que la distancia recorrida por un cuerpo en un tiempo t a una ***velocidad constante*** v, está dada por $d = vt$.
El movimiento que estamos analizando es uniformemente acelerado, es decir, no es de velocidad constante, por lo que la fórmula anterior no puede utilizarse. Sin embargo, si el trayecto fuera muy pequeño, las velocidades en este lapso no variarían sensiblemente y podríamos suponer que la velocidad es constante, por ejemplo la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo [5, 5.2] va desde 10m/seg hasta 10.4 m/seg y sin gran pérdida de precisión podríamos suponer que en este intervalo la velocidad es constante e igual a 10 m/seg y por lo tanto la distancia recorrida de 5 a 5.2 seg sería

$$d = vt = (10)(0.2) = 2 \text{ m}$$

Observación: Podemos interpretar la distancia recorrida como el área del pequeño rectángulo de la gráfica



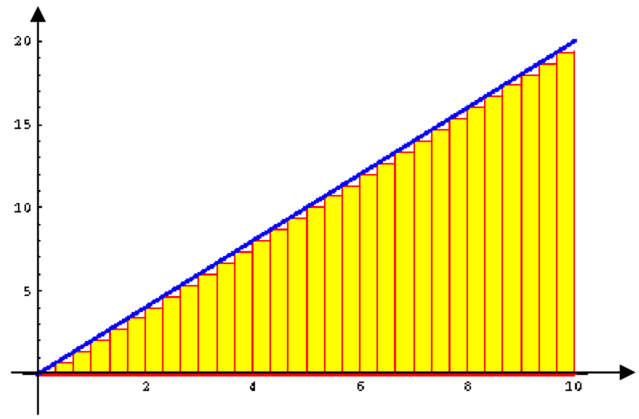
<u>Una primera aproximación a la distancia:</u>
obtengamos una primera aproximación de la distancia recorrida de 0 a 10 seg, dividiendo el intervalo en 10 partes iguales y sumando las distancias recorridas en cada uno de los intervalos de la subdivisión.:



La distancia será aproximadamente:

$$d \cong 0(1) + 2(1) + 6(1) + \ldots + 18(1) = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 2\left(\frac{9x10}{2}\right) = 90 \text{ m.}$$

Una mejor aproximación a la distancia:
De nuevo si queremos mejorar la aproximación, dividimos el intervalo [0, 10] en 30 partes iguales, cada una de ellas de longitud 10/30 = 1/3 obteniendo:



$$d \cong 0(\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) + 2(\frac{2}{3})(\frac{1}{3}) + \ldots + 2(\frac{29}{3})(\frac{1}{3}) = (\frac{2}{3^2})\ (1 + 2 + 3 + \ldots + 29) = (\frac{2}{9})\left(\frac{29x30}{2}\right) = 96.666 \text{ m.}$$

El valor exacto de la distancia (caso general y paso a límite):

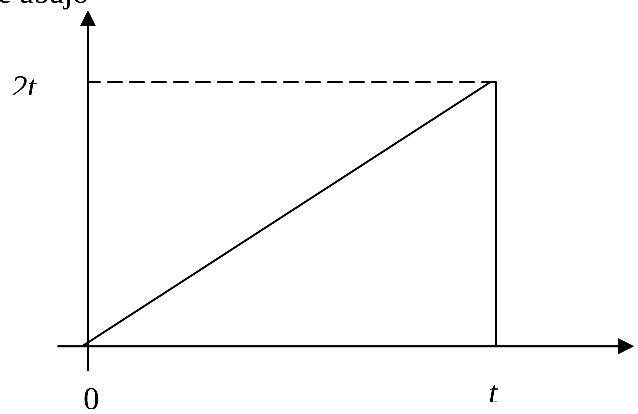
$$d \cong 0(\frac{10}{n}) + 2x1(\frac{10}{n})(\frac{10}{n}) + 2x2(\frac{10}{n})(\frac{10}{n}) + \ldots + 2x(n\text{-}1)\ (\frac{10}{n})(\frac{10}{n}) = (\frac{2x10^2}{n^2})\ (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = (\frac{2x10^2}{n^2})(\frac{n(n-1)}{2}) = \frac{10^2(n-1)}{n}$$

Así pues la aproximación con n rectángulos es $\frac{10^2(n-1)}{n}$, ninguna de tales aproximaciones es igual al valor de la distancia, siendo éste el valor límite de las aproximaciones, es decir:

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{10^2(n-1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100n-100}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{100-100/n}{1} = 100\,\text{m.}$$

Observación: Nótese que en el desarrollo del proceso anterior, existe una analogía entre las distancias calculadas en cada subintervalo y el área del rectángulo correspondiente al mismo, de tal manera que las aproximaciones a la distancia corresponden geométricamente a las aproximaciones al área bajo la gráfica de la función velocidad en el intervalo [0, 10], y el valor exacto de la distancia corresponde al valor exacto del área bajo la curva, sólo que como la figura es un triángulo, podemos encontrar directamente que el valor del área del triángulo es 100.

Así pues, si queremos calcular la distancia recorrida a los t segundos, calculamos el área del triángulo de la figura de abajo



Obteniendo $d(t) = \dfrac{(t)(2t)}{2} = t^2$

> **Observación:** En el problema de caida libre con velocidad inicial cero, la velocidad está dada por $v(t) = gt$, y en consecuencia la fórmula de la distancia recorrida en el tiempo t es: $d(t) = \dfrac{(t)(gt)}{2} = \dfrac{1}{2}gt^2$

3.2.3 Cálculo del Trabajo requerido para estirar un resorte.

Problema 3. Para estirar un resorte 1 cm se necesita una fuerza de 1 kgf ¿qué trabajo habrá que aplicar para estirarlo 6 cm?

Solución: Por la ley de Hooke sabemos que la fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada al resorte es proporcional al estiramiento **x**, es decir:

$$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$$

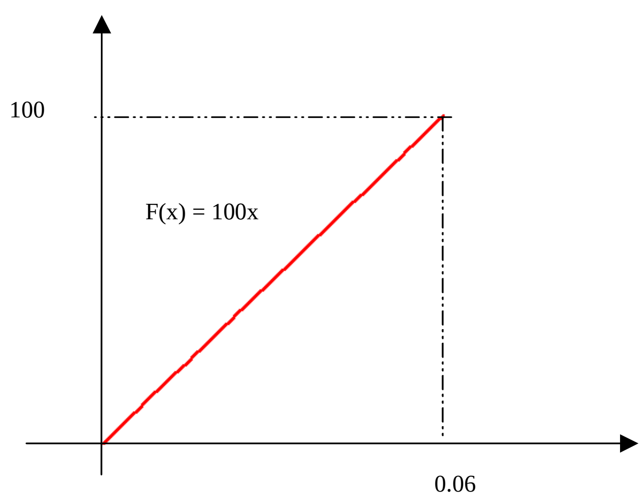
Sustituyendo $\boldsymbol{F} = 1$ kgf y $\boldsymbol{x} = 0.01$ m, obtenemos:

$$1 = (0.001)k \quad \Rightarrow \quad k = 100$$

así pues la función fuerza estará dada por

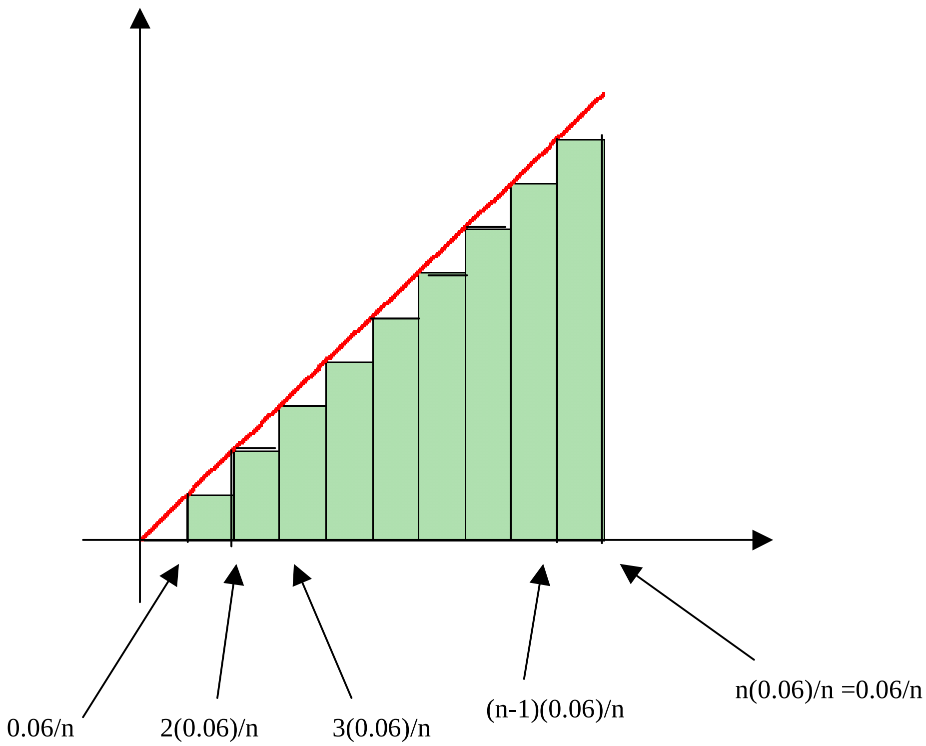
$$\boldsymbol{F}(x) = 100\boldsymbol{x}$$

Cuya gráfica es:



Obtendremos una aproximación para cada n natural, dividiendo el intervalo [0, 0.06] en n partes iguales, cada una de longitud 0.06/n. Si n es muy grande, podemos suponer que en cada subintervalo la fuerza no varía sensiblemente por lo que podemos suponerla constante e igual a la fuerza en el extremo izquierdo.

Bajo este supuesto, el valor del trabajo será aproximadamente igual a la suma de los trabajos en cada subintervalo



$$W \cong (\frac{0.06}{n})(100\frac{0.06}{n}) + (\frac{0.06}{n})(2)(100\frac{0.06}{n}) + \ldots + (\frac{0.06}{n})(n-1)(100\frac{0.06}{n})$$

$$W \cong (6)(\frac{0.06}{n^2})\left[1+2+3+\ldots+(n-1)\right] = \frac{0.36}{n^2} \bullet \frac{n(n-1)}{2} = 0.18 \bullet \frac{(n-1)}{n} = 0.18(1-\frac{1}{n})$$

y el valor exacto del trabajo se conseguirá al tomar el límite cuando n tiende a infinito.

$$W = \lim_{n\to\infty} 0.18(1-\frac{1}{n}) = 0.18$$

Por lo tanto el trabajo requerido para estirar el resorte 6 cm es W = 0.18 kgf m.

<u>Observación 2</u>: En la solución de los problemas anteriores se advierte una metodología común: se obtienen aproximaciones cada vez más precisas obteniendo el valor exacto mediante un paso a límite. Se puede pensar que la idea unificadora de estos problemas es el concepto de límite, sin embargo si analizamos con más detalle encontramos que en los últimos tres casos la aproximación siempre fue una suma a la cual se le tomó el límite; así pues podemos afirmar que la herramienta matemática utilizada fue la de ***"límite de sumas"*** que a continuación formalizaremos como el ***concepto de Integral***.

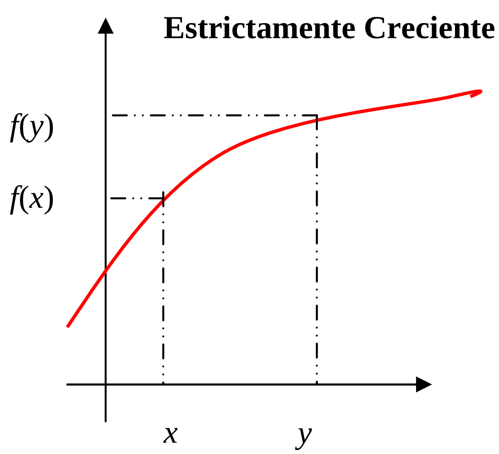
3.3 La integral para funciones monótonas

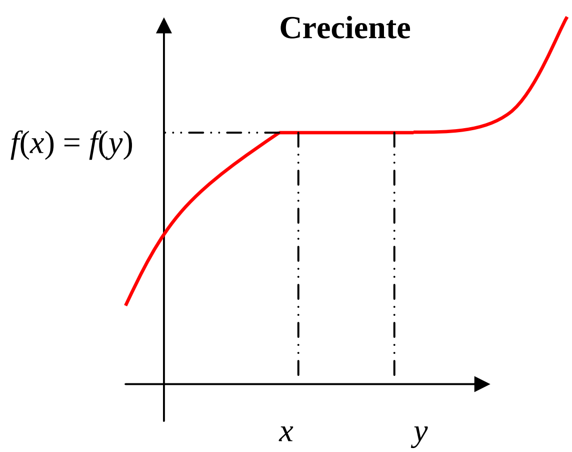
En esta sección calcularemos el área bajo la gráfica de una función $f:[a,b]\to R$, ***monótona***, es decir, ***creciente*** o ***decreciente***, utilizando un procedimiento similar al utilizado en la solución de los problemas anteriores; definiremos el concepto de Integral de una función monótona y posteriormente generalizaremos los resultados obtenidos a una clase de funciones más amplia, las ***seccionalmente monótonas.***

3.3.1 Definición de monotonía:

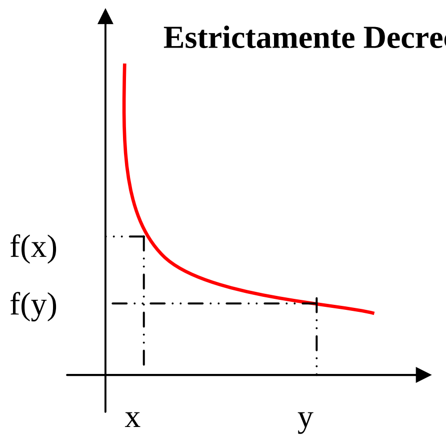
Sea $f:[a,b]\to R$, diremos que:

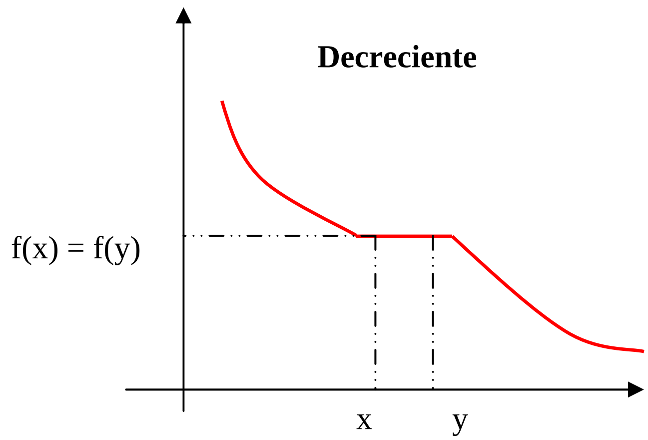
a) ***f es creciente*** en $[a, b]$ si al tomar cualesquiera $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ se cumple que $f(x)\le f(y)$. Si se cumple la desigualdad estricta, diremos que f es **estrictamente creciente**.





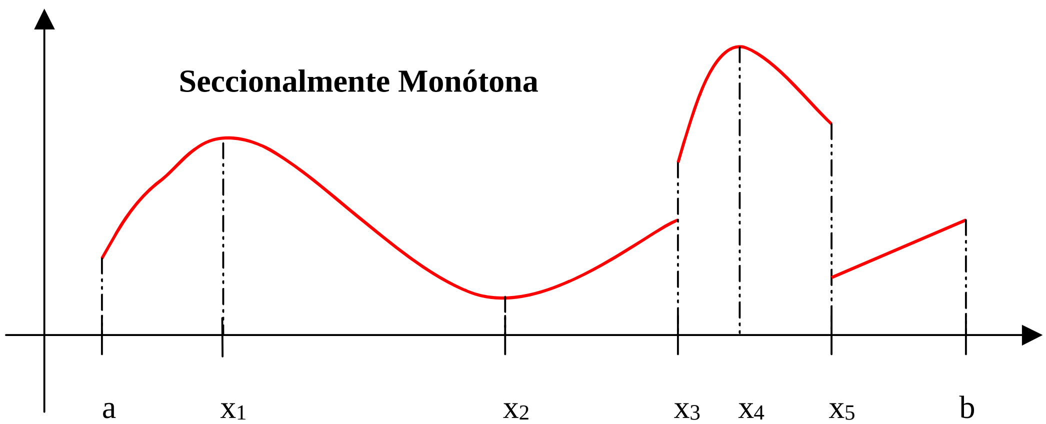
a) ***f es decreciente*** en $[a, b]$ si al tomar cualesquiera $x, y \in [a, b]$ con $x < y$ se cumple que $f(x)\ge f(y)$. Si se cumple la desigualdad estricta, diremos que f es **estrictamente decreciente**.





c) ***f* es monótona** en [*a*, *b*] si es creciente o decreciente en este intervalo.

d) ***f* es seccionalmente monótona** en [*a*, *b*] si es posible dividir el intervalo en [*a*, *b*] en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales la función es monótona.

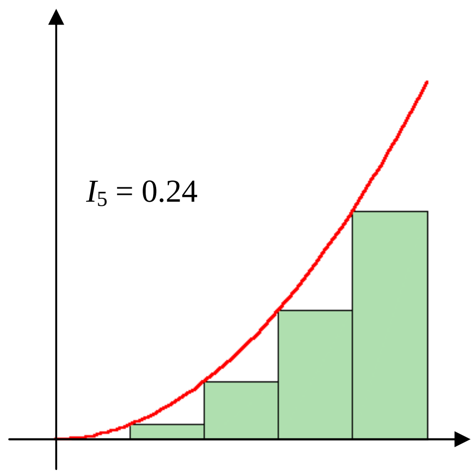


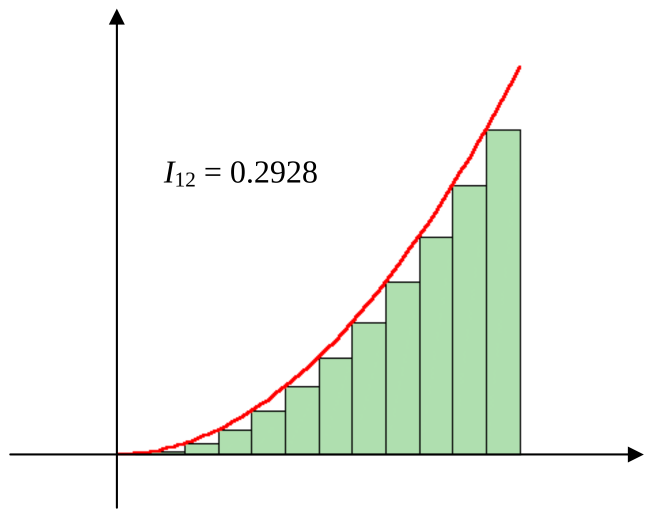
Empecemos calculando el área bajo la gráfica de una función creciente positiva.

3.3.2 El área bajo la gráfica de la parábola $y = x^2$.

Ejemplo1. Encuentre el área bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo [0,1].

Solución: El procedimiento consistirá en dividir el intervalo en n partes iguales, y sobre cada uno de los subintervalos así formados, levantar rectángulos que nos permitan aproximar por abajo el área, es decir, debemos levantar en cada subintervalo un rectángulo de altura igual a la imagen del extremo izquierdo. En la figura de abajo se muestras aproximaciones con subdivisiones en 5 y 12 partes iguales respectivamente.



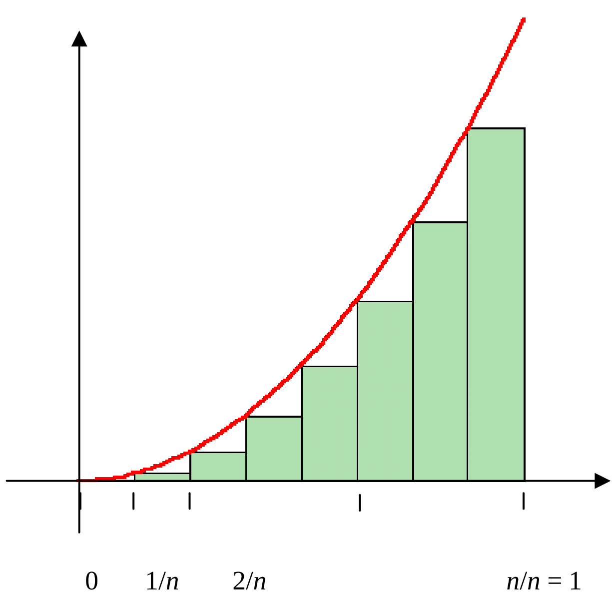


Como se aprecia en estas figuras, la suma de las áreas de los rectángulos son una aproximación al área bajo la curva y entre mayor sea el número de subdivisiones del intervalo, mejor será la aproximación. A continuación se muestran las aproximaciones I_5 e I_{12}

$I_5 = (1/5)(0) + (1/5)(1/5)^2 + (1/5)(2/5)^2 + (1/5)(3/5)^2 + (1/5)(4/5)^2 = 0.24$

$I_{12} = (1/12)(0) +(1/12)(1/12)^2 + (1/12)(2/12)^2 + \ldots + (1/12)(11/12)^2 = 0.2928$

Encontremos ahora una expresión general para la aproximación al área bajo la curva,



dividiendo el intervalo [0,1] en n subintervalos de la misma longitud.

Le llamaremos I_n a la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos:

$$I_n = \frac{1}{n}(0) + \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2 + \frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2 + \frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2 + \ldots + \frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^2$$

$$I_n = \frac{1}{n}(0 + \frac{1}{n^2}^2 + \frac{2}{n^2}^2 + \frac{3}{n^2}^2 + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2})$$

$$I_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2)$$

$$I_n = \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}(\frac{n-1}{n})(\frac{2n-1}{n})$$

Para n = 1, 2, 3, ... I_n es una sucesión de aproximaciones al área bajo la curva, por ejemplo para los valores de n = 5 y n = 12, tendremos los resultados ya obtenidos:

$$I_5 = \frac{1}{6}(\frac{5-1}{5})(\frac{10-1}{5}) = (\frac{1}{6})(\frac{4}{5})(\frac{9}{5}) = 0.24$$

$$I_{12} = \frac{1}{6}(\frac{12-1}{12})(\frac{24-1}{12}) = (\frac{1}{6})(\frac{11}{12})(\frac{23}{12}) = 0.29282407...$$

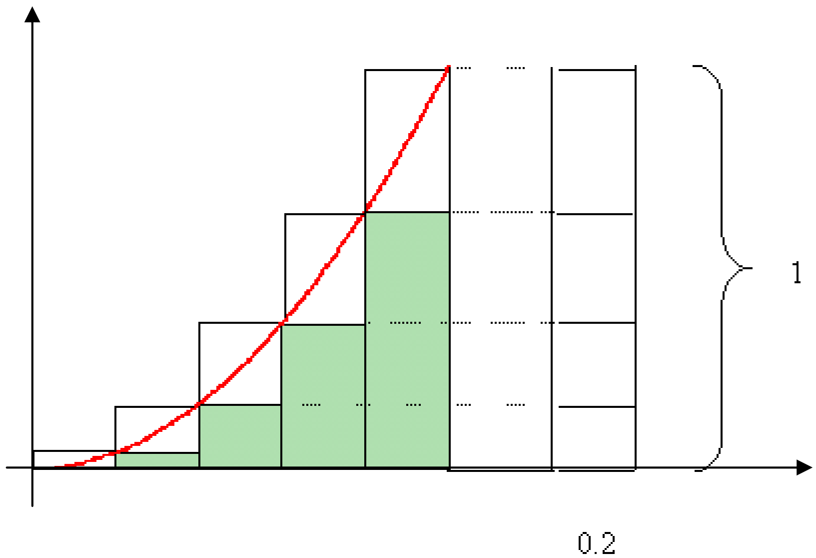
es decir el área A bajo la gráfica es aproximadamente igual a:

$$A \approx I_5 = 0.24$$

O bien mejorando la aproximación:

$$A \approx I_{12} = 0.29282407...$$

Si estamos encontrando un valor aproximado, surge de manera natural la pregunta ¿qué error se comete?



El error cometido al aproximar con estos 4 rectángulos no excede la suma de las áreas de los rectángulos blancos encima de cada subintervalo, que como todos tienen la misma base, si los proyectamos a la derecha como en la figura, obtendremos un rectángulo de base 0.2 y altura 1. Por lo tanto el área bajo la curva es aproximadamente igual a 0.24 con un error que no excede de 0.2.

$$A \approx 0.24 \text{ con un error que no excede de } 0.2$$

Claramente esta aproximación no es buena, por lo que intentaremos mejorarla.

Al aproximarnos con los 11 rectángulos, obtuvimos 0.292828,

Y calculado de manera análoga, el error no excede de (1/12)(1) = 0.083, lo cual nos da una mejor aproximación.

En general podemos observar que con n rectángulos, la aproximación es $\frac{1}{6}(\frac{n-1}{n})(\frac{2n-1}{n})$ con un error que no excede de $1/n$. En la siguiente tabla mostramos algunas de estas aproximaciones con sus respectivos errores:

n	I_n	E_n
5	0.24	0.2
12	0.2928	0.0833
50	0.3234	0.02
100	0.32835	0.01
10,000	0.3332833	0.00001

1000,000	0.333332833	0.000001

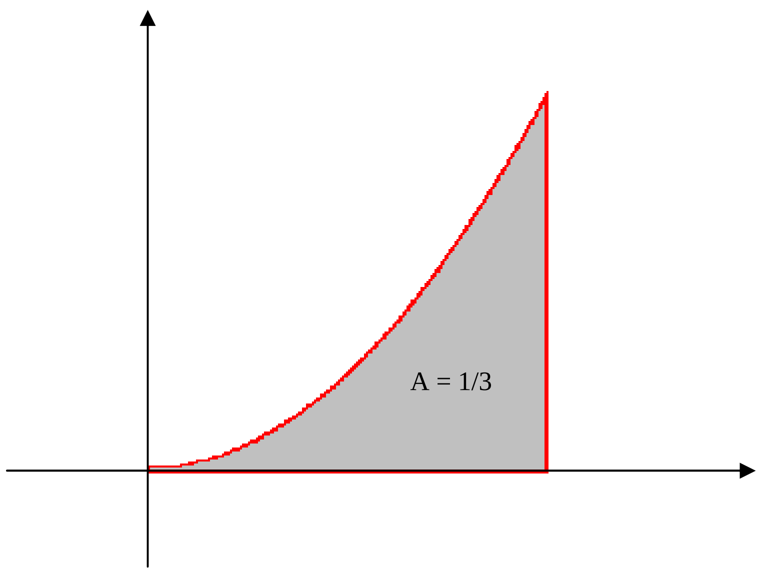
Obsérvese que si el error E_n en la última columna tiende a cero al aumentar indefinidamente n, la aproximación I_n tiende a un número que al parecer sus primeras cifras decimales son iguales a 3 y a medida que n crece, también crece el número de veces que se repite el 3.
Para obtener el valor exacto del área bajo la curva, tendríamos que tomar el valor límite de las aproximaciones I_n cuando n crece indefinidamente (tiende a infinito), es decir:

$$A = \lim_{n\to\infty} I_n$$

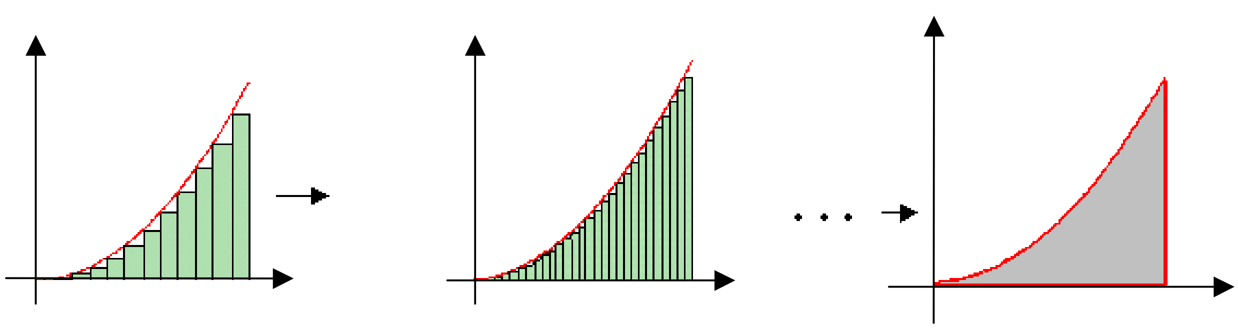
que sustituyendo en la expresión obtenida para I_n , obtenemos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(\frac{n-1}{n})(\frac{2n-1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = (\frac{1}{6})(1)(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

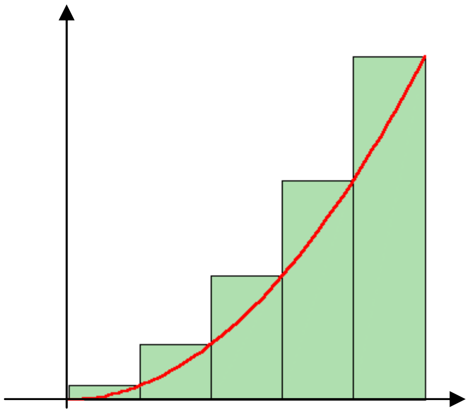
A =1/3 = 0.33333333...

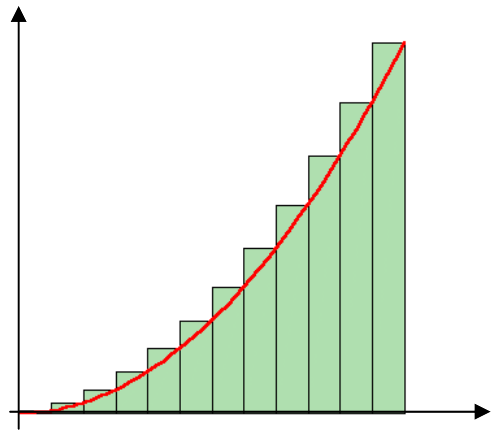


Gráficamente:



Al igual que al calcular el área del círculo, podemos aproximarnos por arriba utilizando las mismas subdivisiones del intervalo [0,1], pero tomando como altura la imagen del extremo derecho del correspondiente subintervalo, como se muestra en la siguiente figura para $n = 5$ y $n = 12$.





Si le llamamos S_n a la suma de las áreas de los rectángulos así construidos,

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}^2 + \frac{2}{n}^2 + \frac{3}{n}^2 + \ldots + \frac{n}{n}^2\right)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^2}\frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

También podemos observar en este caso que al tomar la aproximación

$$\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

se comete un error que no excede de 1/n. En la siguiente tabla mostramos algunas de estas aproximaciones con sus respectivos errores:

n	S_n	E_n
5	0.44	0.2
12	0.376157	0.0833
50	0.3434	0.02
100	0.33835	0.01
10,000	0.3338335	0.00001
1000,000	0.3333338333335	0.000001

De nuevo se observa que al tender n a infinito, los valores de S_n, se acercan a 1/3, lo cual podemos comprobarlo calculando

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n$$

que sustituyendo en la expresión obtenida para S_n , obtenemos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(\frac{n+1}{n})(\frac{2n+1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = (\frac{1}{6})(1)(2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$A = 1/3 = 0.33333333...$$

3.4 Sumas Superiores e inferiores y la Integral definida en [*a*, *b*].

En general, si tenemos una ***función creciente*** $f : [a, b] \to$ R, y dividimos el intervalo en n partes iguales, cada una de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, los puntos de subdivisión del intervalo son:

$x_0 = a$,

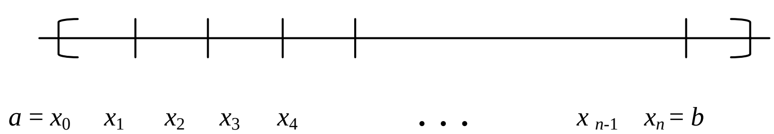
$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$,

$x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$

...

$x_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}$

$x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b$



y definimos la **SUMA INFERIOR** de *f*, en relación a esta subdivisión, como:

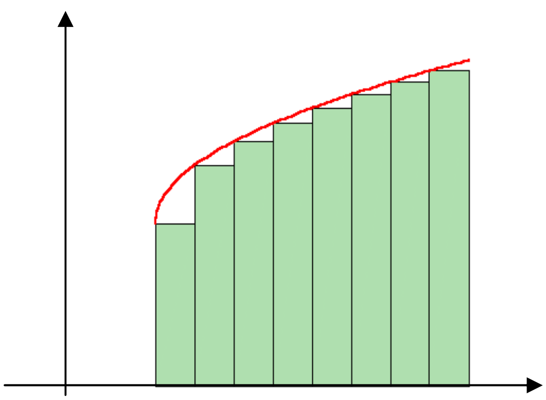
$$I_n = f(x_o)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \mathbf{...} + f(x_{n-1})\,\Delta x$$

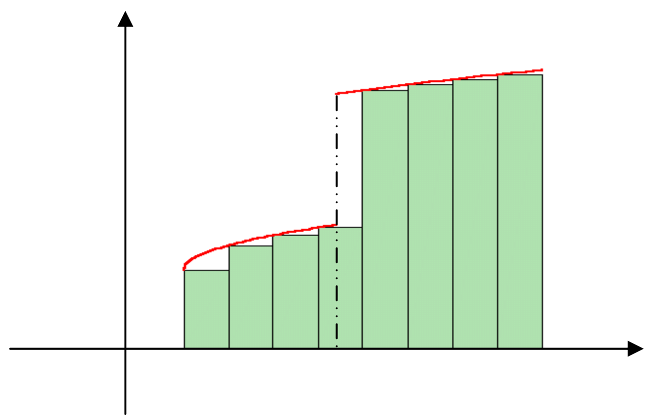
O bien, expresado en notación sumatoria:

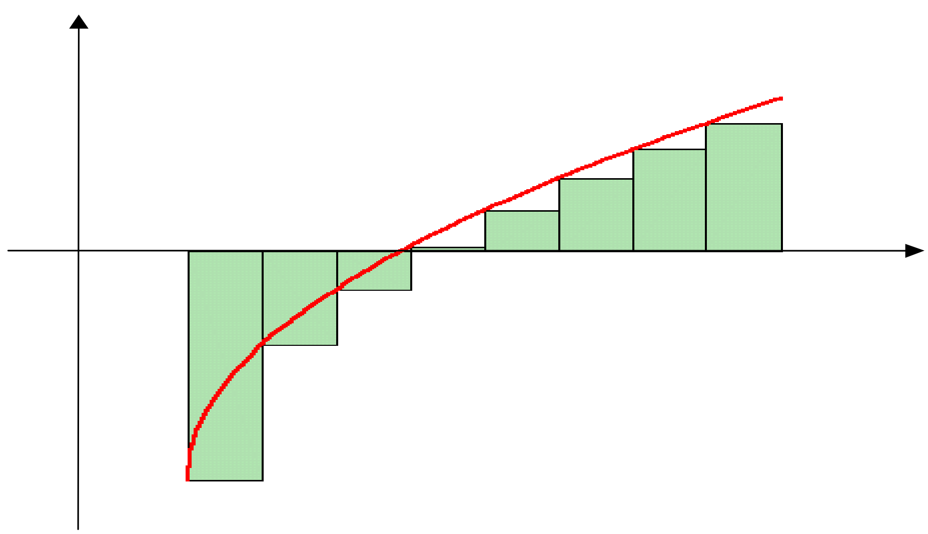
$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x$$

Geométricamente, si $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$, I_n representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por debajo de la curva, y por lo tanto es una ***aproximación por defecto*** al área bajo la curva. En caso de que la función tome valores positivos y negativos las áreas de los rectángulos encima del eje x se restan de los que están por debajo.

Véanse las siguientes figuras.







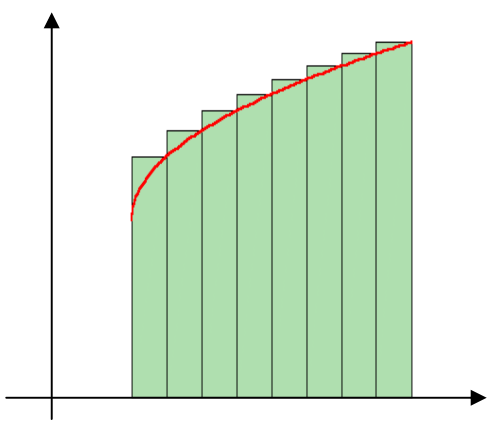
Análogamente definimos la **SUMA SUPERIOR** de f, también respecto a la misma subdivisión, como:

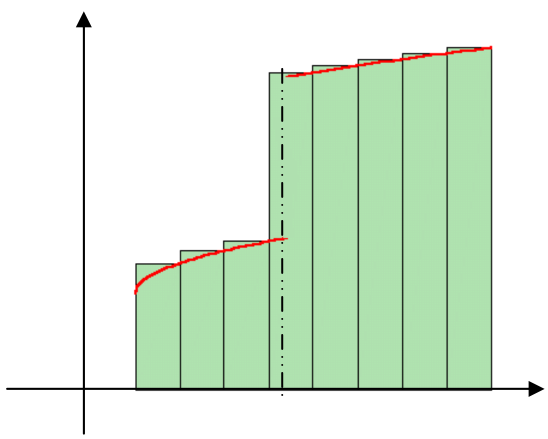
$$S_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \mathbf{...} + f(x_n)\,\Delta x$$

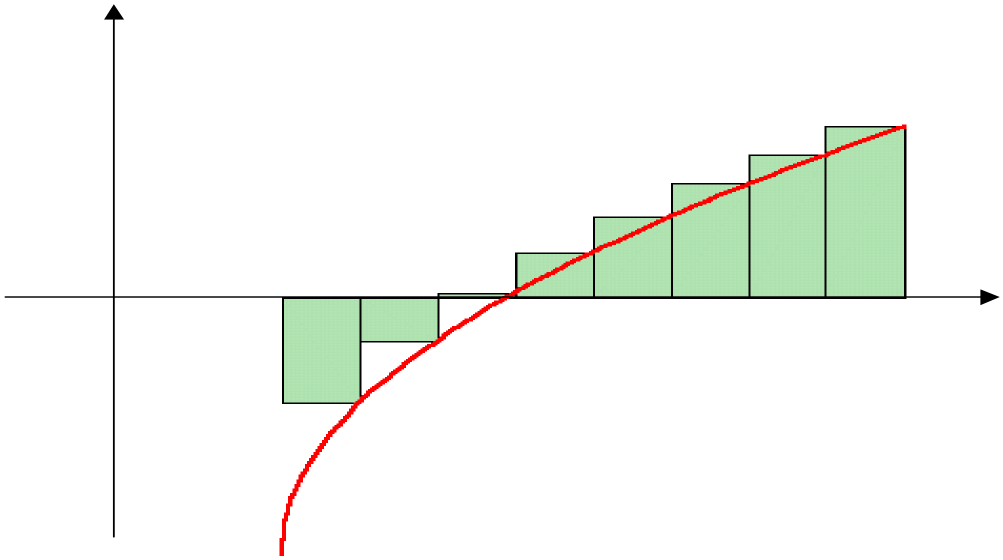
Que expresado en notación sumatoria:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Geométricamente, si $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$, S_n representa la suma de las áreas de los rectángulos que están por arriba de la curva y por lo tanto es una ***aproximación por exceso*** al área bajo la curva. En caso de que la función tome valores positivos y negativos las áreas de los rectángulos encima del eje x se restan de los que están por debajo.



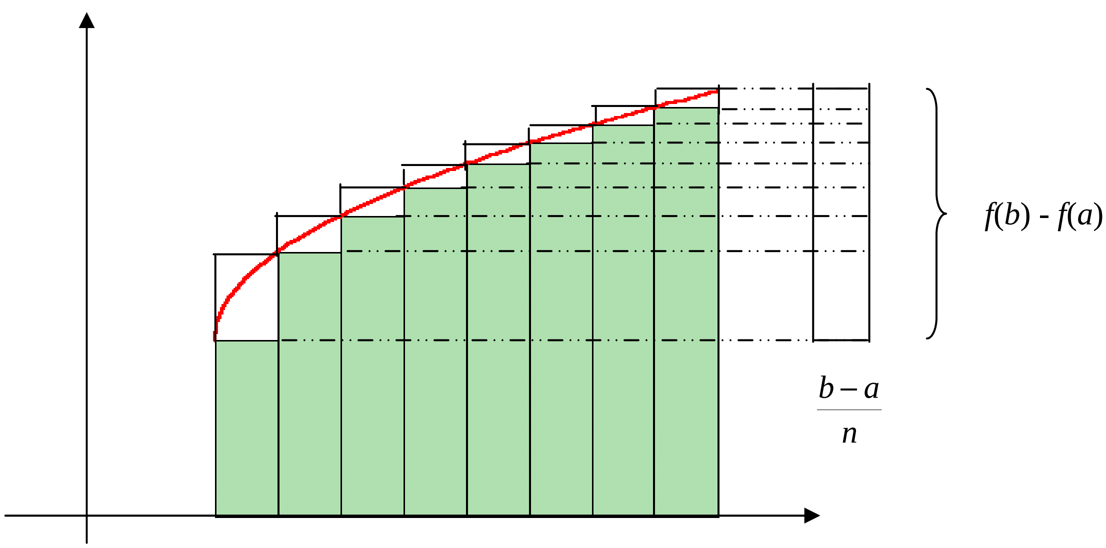




Si consideramos la diferencia $S_n - I_n$, gráficamente podemos ver que

$S_n - I_n$ representa el área de la columna de la derecha, en la siguiente gráfica, es decir:

$$S_n - I_n = \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)].$$



Si hacemos crecer n, el número de subdivisiones del intervalo, la diferencia $S_n - I_n$ se va acercando a cero, es decir, en la figura vemos que la base de la columna de la derecha tiende a cero y la altura se mantiene constante, y por lo tanto el área de la columna tiende a cero, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - I_n) = 0$$

o bien

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} I_n$$

Por ser estos límites iguales diremos que la función ***f* es INTEGRABLE** en el intervalo $[a,b]$, y al valor común de estos límites le llamaremos **LA INTEGRAL de *f*** sobre el intervalo $[a,b]$, y la denotaremos por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Observación. La expresión encontrada por métodos geométricos para la diferencia $S_n - I_n$ cuando f es positiva,

$$S_n - I_n = \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$$

Puede verificarse en general para cualquier función creciente, no necesariamente positiva, de la siguiente manera:

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x + \mathbf{f(x_n)\,\Delta x}$$

$$I_n = \mathbf{f(x_o)\,\Delta x} + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$S_n - I_n = -f(x_o)\Delta x + f(x_n)\Delta x$$

Es decir, los términos unidos por líneas inclinadas son iguales y por lo tanto se cancelan al restarse, quedando solamente $-f(x_o)\Delta x$ y $f(x_n)\Delta x$.

Como $x_o = a$, $x_n = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Tenemos que

$$S_n - I_n = -f(a)\frac{b-a}{n} + f(b)\frac{b-a}{n}$$

Es decir,

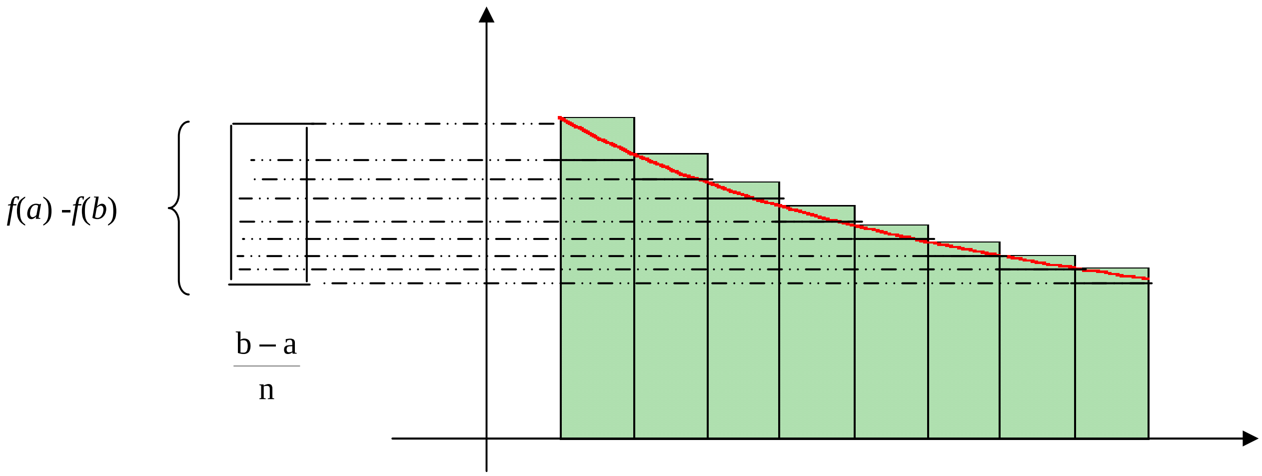
$$S_n - I_n = [f(b) - f(a)]\frac{b-a}{n}$$

Y en consecuencia **TODA FUNCION CRECIENTE ES INTEGRABLE** en un intervalo cerrado $[a, b]$.

De una manera completamente análoga, que no desarrollaremos aquí, podemos ver que **TODA FUNCIÓN DECRECIENTE ES INTEGRABLE**.

3.5 Estimación del error en la aproximación

Al aproximarnos al área bajo la curva de una función creciente, ya sea con sumas superiores o sumas inferiores la expresión $S_n - I_n$ nos sirve como una estimación del error. Nótese que si la función es decreciente, la estimación del error sería:



$$S_n - I_n = [f(a) - f(b)]\,\frac{b-a}{n}$$

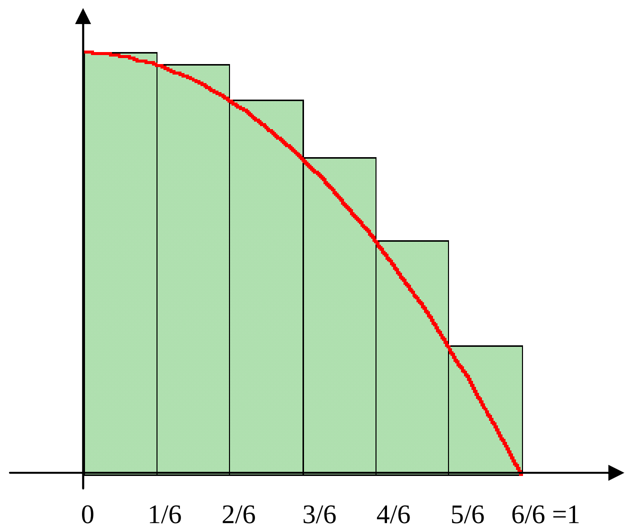
Ejemplo 3. Para $f(x) = 1-x^2$:

a) Encuentre una aproximación para $\int_0^1 (1-x^2)dx$ utilizando sumas superiores y dividiendo el intervalo de integración en 6 partes iguales. Estime el error.

b) Encuentre el valor exacto de $\int_0^1 (1-x^2)dx$

Solución:

a) Dividimos el intervalo en 6 partes iguales cada una de longitud 1/6 y formamos la suma superior (Observe que como la función es decreciente, en cada subintervalo levantamos un rectángulo de altura igual a la imagen del extremo izquierdo, que es donde se alcanza el máximo valor.)



$$S_6 = \frac{1}{6}\left[1 - \frac{1}{36} + 1 - \frac{4}{36} + 1 - \frac{9}{36} + 1 - \frac{16}{36} + 1 - \frac{25}{36}\right] = 0.5787...$$

Así pues

$$\int_0^1 (1 - x^2)dx \cong 0.5787...$$

y el error cometido es $E_n < [f(a) - f(b)] \dfrac{b-a}{n} = [f(0) - f(1)] \dfrac{1-0}{6} = \dfrac{1}{6} = 0.1666...$

b) Para encontrar el valor exacto de la integral, dividimos el intervalo en n partes iguales, cada una de longitud 1/n y formamos la suma superior .

$$S_n = \frac{1}{n}\left[1 - (\frac{1}{n})^2 + 1 - (\frac{2}{n})^2 + 1 - (\frac{3}{n})^2 + ... + 1 - (\frac{n-1}{n})^2\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}\left[(n-1) - (\frac{1}{n})^2 - (\frac{2}{n})^2 - (\frac{3}{n})^2 - ... - (\frac{n-1}{n})^2\right]$$

$$\mathrm{S_n} = \frac{1}{\mathrm{n}}(\mathrm{n}-1) - \frac{1}{\mathrm{n}}\left[(\frac{1}{\mathrm{n}})^2 + (\frac{2}{\mathrm{n}})^2 + (\frac{3}{\mathrm{n}})^2 + ... + (\frac{\mathrm{n}-1}{\mathrm{n}})^2\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n}(n-1) - \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right]$$

$$S_n = (1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{n^3}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] = (1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})$$

y en consecuencia el valor del área será:

$$\int_0^1 (1-x^2)dx = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

por lo tanto:

$$\int_0^1 (1-x^2)dx = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 3. Para $f(x) = x^3$:

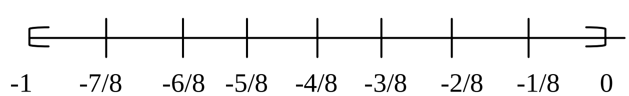
b) Encuentre una aproximación para $\int_{-1}^{0} x^3 dx$ dividiendo el intervalo de integración en 8 partes iguales y estime el error.

c) Encuentre el valor exacto de $\int_{-1}^{0} x^3 dx$

<u>Solución</u>.

a) En el intervalo [-1,0], la función toma valores negativos, por lo que en este caso no podemos interpretar a la integral como el área bajo la curva.

Los puntos de división del intervalo serán:



Determinando 8 intervalos, cada uno de longitud 1/8.

Utilizaremos una suma superior para obtener la aproximación deseada.

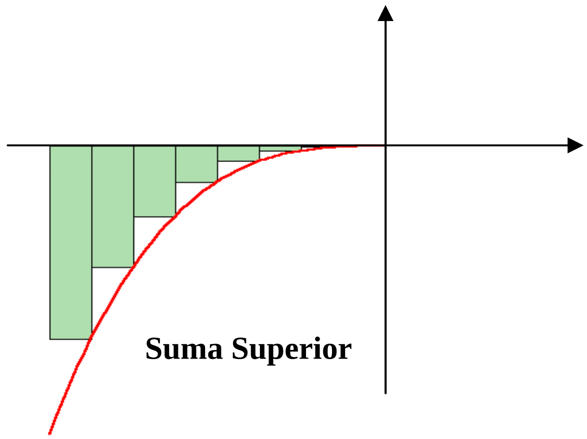
$$S_8 = (1/8)\left[(-7/8)^3 + (-6/8)^3 + (-5/8)^3 + (-4/8)^3 + (-3/8)^3 + (-2/8)^3 + (-1/8)^3 + (0)^3\right]$$

$$S_8 = \frac{-1}{8^4}\left[1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3\right] = -0.1914...$$

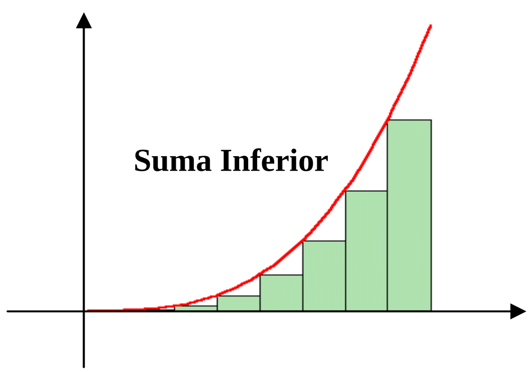
Así pues

$$\int_{-1}^{0} x^3 dx \approx -0.1914$$

con un error $E_8 < \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] = \dfrac{0-(-1)}{8}[f(0) - f(1)] = 1/8 = 0.125$

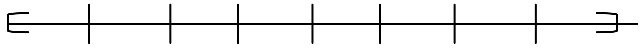


Nótese que en este caso específico, la suma superior es exactamente igual al negativo de la aproximación al área bajo la curva, si se utiliza una suma inferior para $f(x) = x^3$ en el intervalo [0,1], como se ve en la figura de abajo.



b) Para encontrar el valor exacto de $\int_{-1}^{0} x^3 dx$, dividimos el intervalo [-1, 0] en n partes iguales y como f es creciente, también es integrable y por lo tanto podemos utilizar tanto sumas superiores como inferiores.

Sumas Superiores:
Los puntos de subdivisión del intervalo son:



De acuerdo a la definición de Suma Superior para una función creciente, en cada subintervalo multiplicamos 1/n por la evaluación de la función en el extremo derecho del mismo:

$$S_n = 1/n\left[-(n-1)^3/n^3 \ -(n-2)^3/n^3 - \ \ldots -3^3/n^3 -2^3/n^3 - 1^3/n^3 -0^3/n^3 \right]$$

$$S_n = -1/n^4\left[(n-1)^3 \ + (n-2)^3 + \ \ldots +3^3 + 2^3 + 1^3 + 0^3\right]$$

Utilizando la fórmula para la suma de los cubos de los primeros k naturales:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \text{, sustituimos } k = n\text{-}1$$

$$S_n = -\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$S_n = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{x}^3 \mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{S_n} = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^2 = \frac{1}{4}(1)^2 = -\frac{1}{4}$$

Así pues el valor exacto de la integral es:

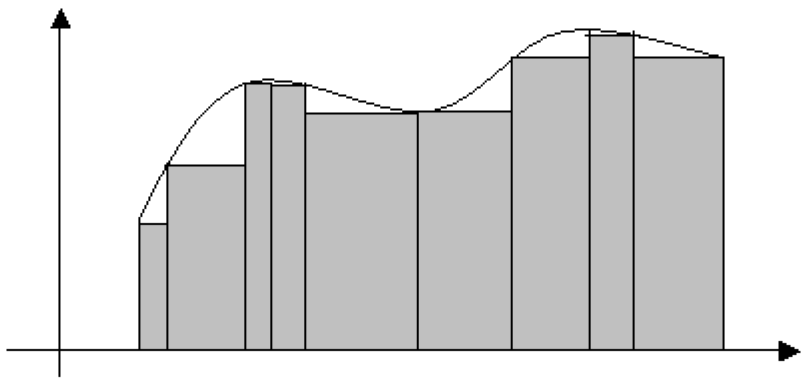
$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = -\frac{1}{4}$$

<u>**Definición:**</u> Si $f : [a, b] \rightarrow$ R es seccionalmente monótona, elegimos
$x_o = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ tal que la función sea monótona en cada subintervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

La Integral de Riemann en su caso más general.
En nuestro desarrollo de la integral de Riemann para funciones seccionalmente monótonas, por cuestiones operativas utilizamos siempre subdivisiones (Particiones) igualmente espaciadas del intervalo de integración, sin embargo teóricamente pudimos utilizar

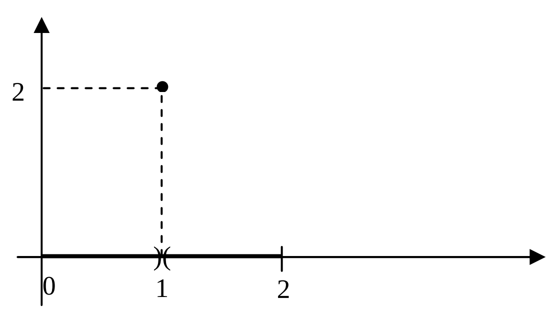
cualquier tipo de subdivisión del intervalo y con el límite de las aproximaciones, llegar también al valor de la Integral. En la siguiente figura se muestra una suma inferior para una subdivisión no igualmente espaciada de una función f.



El concepto de Integral de Riemann involucra una clase más amplia de funciones que las seccionalmente monótonas. En este trabajo no se abordará la Integral de Riemann en su caso más general, pero se ilustrará con algunos ejemplos.

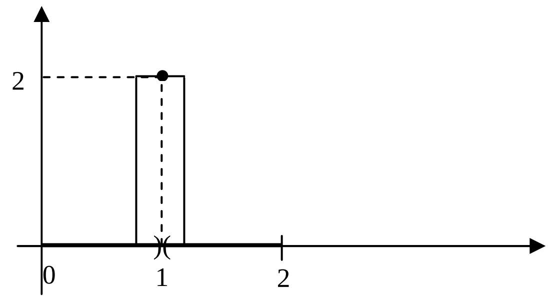
Considérese la función $f:[0,2]\rightarrow R$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\neq 1\\ 2 & si \quad x=1\end{cases}$$



Divídase el intervalo en n partes iguales, cada una de longitud 2/*n*, y calculemos la suma inferior. En cada uno del los intervalos determinados por la partición, el máximo valor de la función es 2 y el mínimo es cero, excepto en el intervalo que contiene a 1, en este caso el máximo valor es 2. Así pues la expresión de las sumas superiores e inferiores es:

$$S_n = 2(2/n) \qquad y \qquad I_n = 0$$



En consecuencia $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} I_n = 0$ y por lo tanto se trata de una función integrable cuya integral vale cero, es decir

$$\int_0^2 f(x)dx = 0$$

En general podemos decir que si una función es integrable, la podemos alterar en un punto y la función sigue siendo integrable.

Para este tipo de funciones, enunciamos las siguientes propiedades de la integral, que de una manera fácil, pueden visualizarse geométricamente.:

Propiedades de la Integral

1. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. $\int_a^b K\, f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

3. Si $a < c < b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

3.6 Hacia el Teorema Fundamental del Cálculo

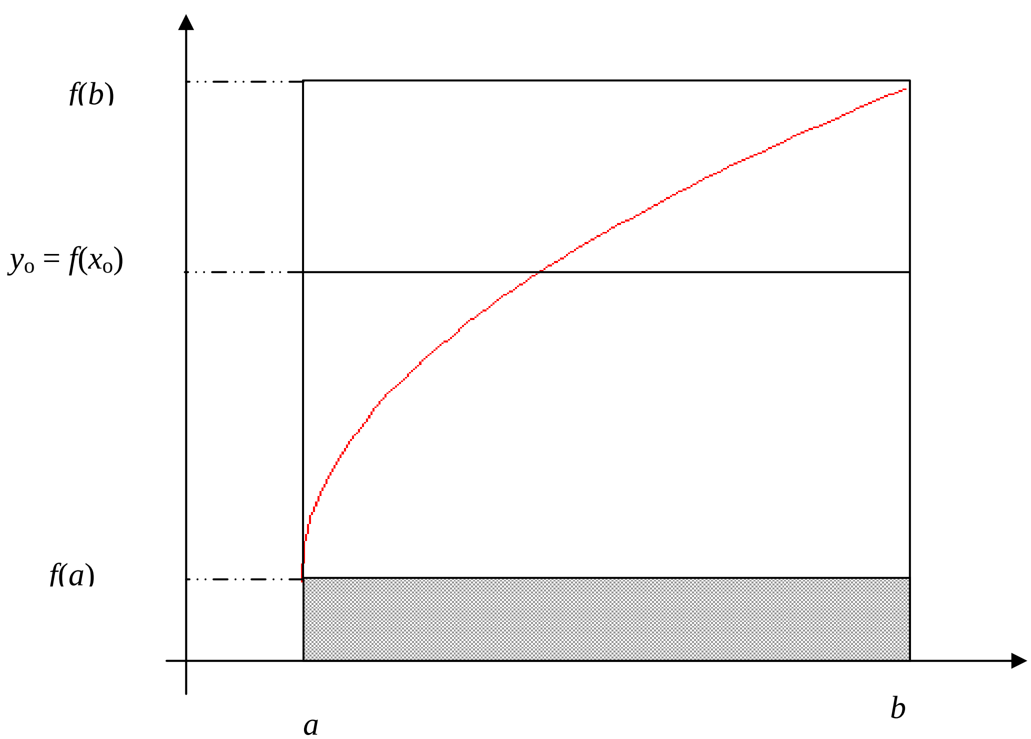
En esta sección estableceremos la relación entre el concepto de integral aquí desarrollado y el concepto de derivada. La definición que hemos estudiado de integral, nos permite calcular la integral de funciones sencillas pero, como seguramente lo habremos notado, si complicamos un poco la función y el intervalo de integración es arbitrario, el cálculo del límite de sumas superiores o inferiores se volverá en general muy complicado.

El hecho principal en que se basa el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.) es el siguiente Teorema que discutiremos a continuación y a su vez utiliza un resultado de funciones continuas.

Teorema del Valor Medio para Integrales. Sea f una función continua seccionalmente monótona, definida en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un punto x_o entre a y b tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x_o)$$

Demostración: Primer caso: f creciente



Geométricamente lo que nos dice este teorema es que si f es positiva, el área bajo la curva se encuentra entre las áreas de los rectángulos de base (b-a) y alturas $f(a)$ y $f(b)$, como se observa en la figura de arriba, para una función creciente. Si Consideramos todos los rectángulos posibles de base (b-a) con altura inicial $f(a)$ y altura final $f(b)$, el área de uno de éstos forzosamente coincidirá con el área bajo la curva y esa altura será la imagen bajo f de algún punto en el intervalo $[a, b]$, por la continuidad de f.

Haremos primeramente la demostración sin aludir a la gráfica ni al hecho de ser positiva la función.

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales, cada una de longitud $\Delta x = (b-a)/n$.
A los puntos de subdivisión les llamaremos $a = x_o , x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n = b$
Como f es creciente, toma sus valores mínimo y máximo en f(a) y f(b) respectivamente, es decir:

$$f(a) \le f(x) \le f(b) \quad \text{para toda } x \in [a, b]$$

Cada punto de la subdivisión satisface la anterior desigualdad. Si en ambos lados de estas desigualdades dobles multiplicamos por la cantidad positiva Δx y si las sumamos término a término, tenemos que la suma de los términos medios de las desigualdades es la **Suma Inferior de *f*** relativa a esta subdivisión:

$$\begin{gathered}
f(a)\Delta x \ \le \ f(x_o)\Delta x \ \le \ f(b)\Delta x \\
f(a)\Delta x \ \le \ f(x_1)\Delta x \ \le \ f(b)\Delta x \\
f(a)\Delta x \ \le \ f(x_2)\Delta x \ \le \ f(b)\Delta x \\
\bullet \\
\bullet \\
\bullet \\
f(a)\Delta x \ \le \ f(x_{n-1})\Delta x \ \le \ f(b)\Delta x \\
\hline
f(a)(n)(\Delta x) \ \le \ I_n \ \le \ f(b)(n)(\Delta x)
\end{gathered}$$

pero como $(n)(\Delta x) = (n)(b-a/n) = b-a$

$$f(a)(b-a) \ \le \ I_n \ \le \ f(b)(b-a) \quad \text{para cada } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hasta este momento hemos probado que cualquier suma inferior se encuentra entre $f(a)(b-a)$ y $f(b)(b-a)$, en consecuencia el límite de ellas también se encontrará entre estos números, es decir

$$f(a)(b-a) \ \le \ \lim_{n\to\infty} I_n \ \le \ f(b)(b-a)$$

y utilizando el hecho de que $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_a^b f(x)dx$, obtenemos:

$$f(a)(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le f(b)(b-a).$$

O equivalentemente

$$f(a) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(b)$$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ se encuentra entre $f(a)$ y $f(b)$ y como f es continua, se alcanzan todos los valores intermedios entre dos imágenes cualesquiera, por lo que esta cantidad debe ser la imagen de un punto entre a y b, es decir:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(x_o)$$

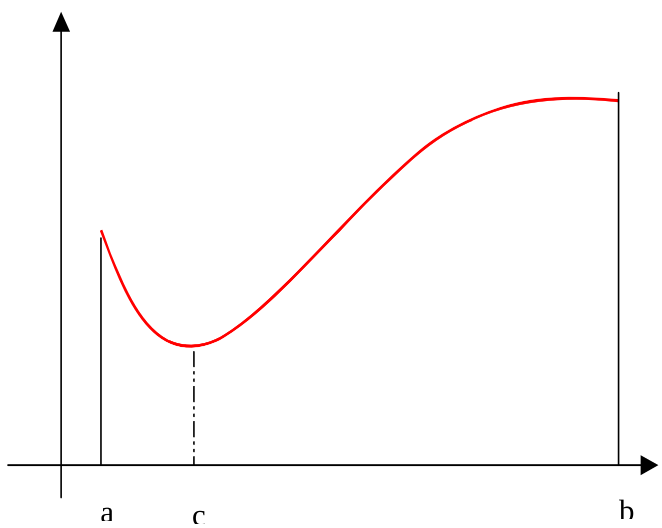
para algún x_o en el intervalo $[a, b]$, que es lo que deseábamos demostrar.

b) <u>segundo caso</u>: *f* decreciente

La demostración para el caso de una función decreciente es completamente análoga y se deja como ejercicio.

c) <u>Tercer caso</u>: *f* seccionalmente monótona

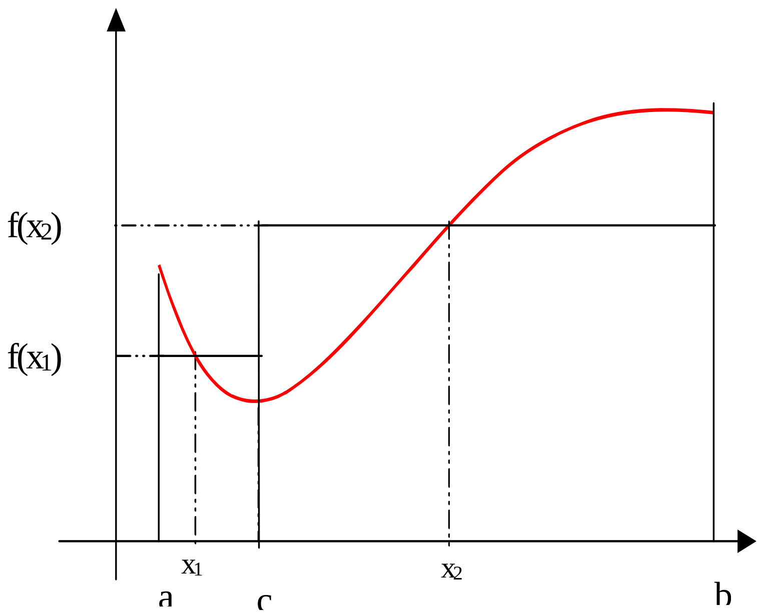
En este caso lo ilustraremos geométricamente para una función monótona en dos secciones, como la de la gráfica, en el entendido de que la generalización es inmediata.



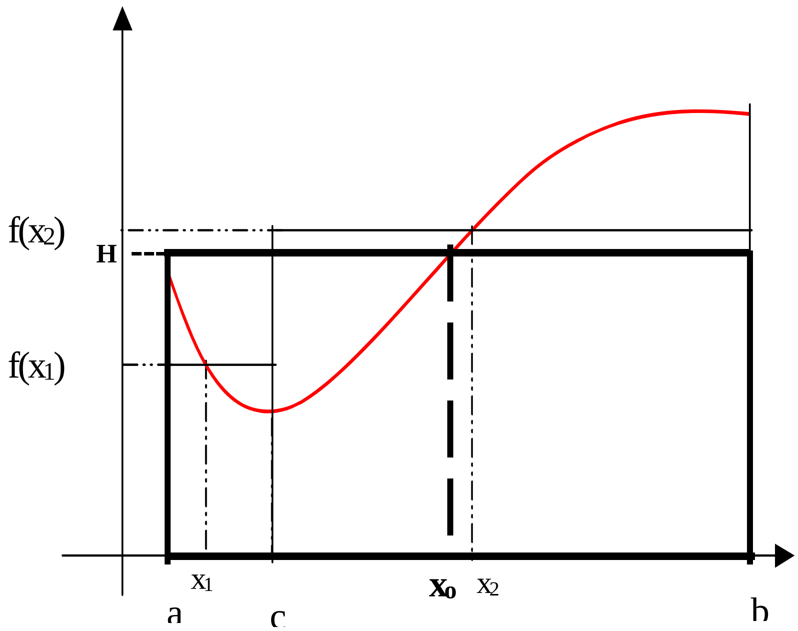
Aplicamos el resultado para funciones crecientes y decrecientes a la función en los intervalos [a, c] y [c, b] respectivamente, es decir existen puntos $x_1 \in [a, c]$ y $x_2 \in [c, b]$ tales que:

$$\int_a^c f(x)dx = (c-a)f(x_1) \qquad \text{y} \qquad \int_c^b f(x)dx = (b-c)f(x_2)$$

Geométricamente vemos que la parte decreciente de la función tiene área bajo la curva igual a la del rectángulo de base c-a y altura $f(x_1)$ y la parte creciente tiene área igual a la del rectángulo de base b-c y altura $f(x_2)$.



Obsérvese que podemos encontrar un rectángulo de base b-a con una altura intermedia H entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ de tal manera que el área de éste sea igual al área bajo la gráfica completa, como se ve en la siguiente ilustración.



Por la continuidad, f toma todos los valores intermedios entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$, es decir existe x_o entre x_1 y x_2 tal que $H = f(x_o)$. Como $H = \int_a^b f(x)dx = (b-a) f(x_o)$, se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(x_o) \quad \text{para algún } x_o \in [a, b]$$

En la siguiente sección utilizaremos este hecho para establecer el **Teorema Fundamental del Cálculo**, el cual nos permitirá, entre otras cosas, encontrar el valor de la integral definida en un intervalo $[a, b]$ con la utilización de la herramienta del Cálculo Diferencial.

EJERCICIOS

1. Para $f(x)=x^2$ en el intervalo [0, 2]:
   a) Utilizando una Suma Inferior, obtenga una aproximación a la integral de *f*, dividiendo el intervalo en 10 partes iguales. Estime el error.
   b) Utilizando una Suma Inferior, obtenga una aproximación a la integral de *f*, dividiendo el intervalo en 100 partes iguales. Estime el error.
   c) Utilizando una Suma Inferior, obtenga una aproximación a la integral de *f*, dividiendo el intervalo en **n** partes iguales, para cualquier entero positivo ***n***. Estime el error.
   d) Encuentre $\int_0^2 x^2dx$, utilizando los incisos anteriores.

.

2. Repita el ejercicio 1 utilizando sumas superiores.

3. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=x^2$, en el intervalo [1,5].

4. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=x^3$, en el intervalo [0,4].

5. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=x^3$, en el intervalo [3,6].

6. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=5-x^2$, en el intervalo [0,1].

7. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=x^3-x^2$, en el intervalo [0,1].

8. Repita los ejercicios 1 y 2 para $f(x)=x^2-x^3$, en el intervalo [0,1].

9. Para $f(x)=x^2$ en el intervalo [0, t], t > 0:
   a) Utilizando una Suma Inferior, obtenga una aproximación a la integral de f, dividiendo el intervalo en **n** partes iguales, para cualquier entero positivo **n**. Estime el error.
   b) Utilizando una Suma Superior, obtenga una aproximación a la integral de f, dividiendo el intervalo en **n** partes iguales, para cualquier entero positivo **n**. Estime el error.
   c) Utilizando a) y/o b), encuentre $\int_0^t x^2dx$

10. Repita el ejercicio 9 para $f(x)=x^3$, en el intervalo [0, t].

11. Repita el ejercicio 9 para , en el intervalo [0, t].