Capítulo 2

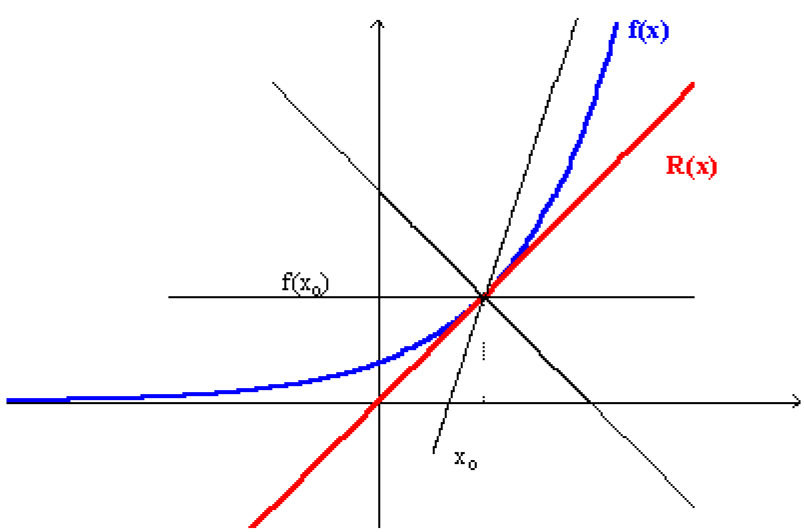
El Teorema de Taylor

2.1 Introducción.

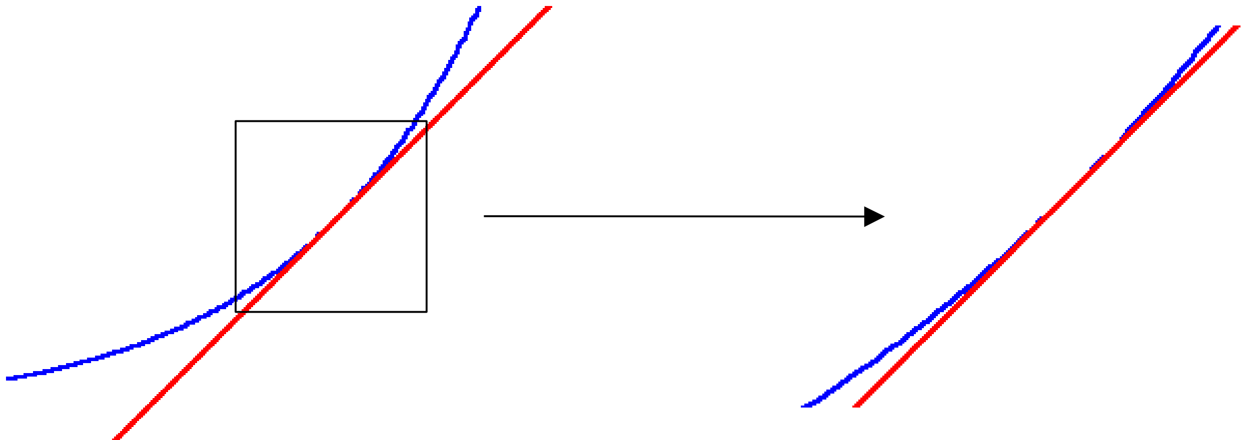
En este capítulo estudiaremos el Teorema de Taylor, el cual nos permitirá aproximar por medio de polinomios (las funciones más sencillas del Cálculo) a funciones que cumplen ciertas condiciones de derivabilidad. Se partirá de que la recta tangente es la mejor de las aproximaciones lineales (polinomios de grado uno) y se generalizará a polinomios de grado mayor que uno.

2.2. La recta tangente.

Sabemos que la recta tangente, como la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia (x_o, $f(x_o)$), es aquella recta que pasa por el mencionado punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto (*primera derivada en el punto*), lo que hace que la recta tangente y la curva sean prácticamente indistinguibles en las cercanías del punto de tangencia. Gráficamente podemos observar que la curva se pega "*suavemente*" a la recta en este entorno, de tal manera que "*de todas las rectas que pasan por el punto, es esta recta la que más se parece a la curva cerca del punto*".



Nótese que cerca del punto de tangencia, la curva se comporta casi linealmente, como se puede apreciar si hacemos acercamientos a la gráfica anterior

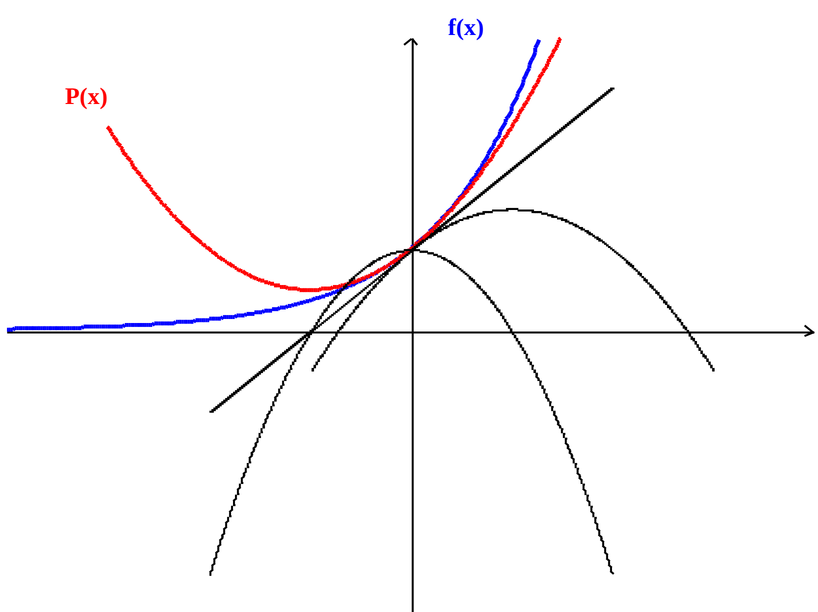


Acercamiento 1 Acercamiento 2

Como observamos en los problemas de diferencial, si x se encuentra "lejos" de x_o, la recta tangente ya no funciona como aproximador. Parece pues natural preguntarnos por otra función (no lineal) que sirva a nuestros propósitos. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el más sencillo tipo de función que podemos encontrar, por lo que podemos tratar de ver si es posible encontrar un polinomio de grado dos que nos sirva para aproximar nuestra función en un rango más grande que la recta tangente.

2.3 La parábola tangente.

Veamos que sucede si en lugar de aproximarnos con una recta tratamos de hacerlo con una parábola, es decir tratemos de encontrar de todas las parábolas que pasan por $(x_o, f(x_o))$, la que mejor aproxima a la curva, es decir tratemos de encontrar "*la parábola tangente*" .



Nótese que la parábola tangente a una curva no es única.

Naturalmente a esta parábola

$$\boldsymbol{P(x) = a + b(x - x_o) + c(x - x_o)^2}$$

debemos pedirle que pase por el punto, que tenga la misma inclinación (primera derivada) y la misma concavidad que la parábola (segunda derivada), es decir debemos pedirle:

a) $P(x_o) = f(x_o)$

b) $P'(x_o) = f'(x_o)$

c) $P''(x_o) = f''(x_o)$

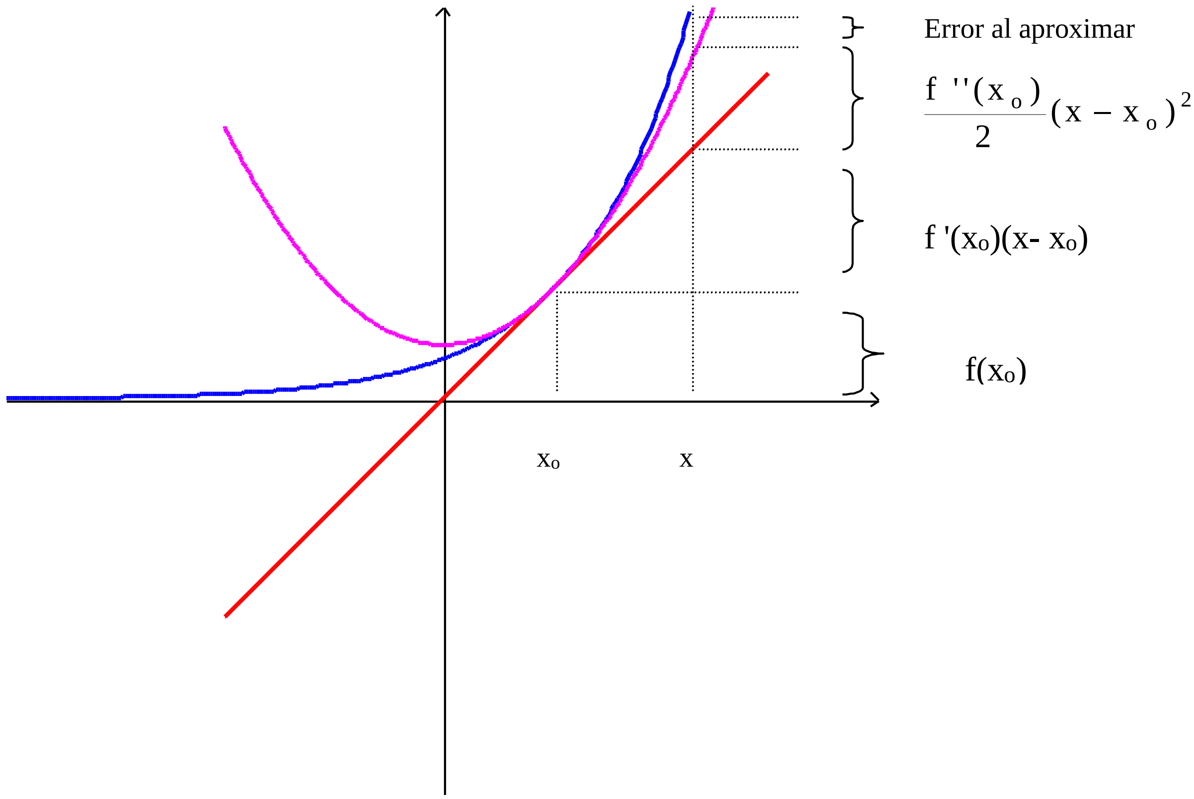
Como $P(x_o) = a$, $P'(x) = b$ y $P''(x) = 2c$, concluimos que

$$\boldsymbol{a = f(x_o), \qquad b = f'(x_o) \quad \text{y} \qquad c = (1/2)f''(x_o)}$$

quedando la ecuación de la parábola que mejor aproxima a la curva en las cercanías de $(x_o, f(x_o))$, como:

$$P(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_o)}{2}(x - x_o)^2$$

En la siguiente figura, observamos gráficamente los tres sumandos de la expresión de la parábola tangente. Los dos primeros nos dan la altura sobre la recta tangente y añadiéndole el tercero nos da la altura sobre la parábola tangente



Verifiquemos lo anterior en el caso particular de la función $f(x) = e^x$, $x_o = 0$ y valores de x cercanos a 0

En la tabla de abajo observamos que la parábola tangente a la gráfica de f en (0,1) efectivamente es una mejor aproximación para f que la recta tangente, para valores cercanos a 0.

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	e^x
1	2	2.5	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050016

2.4 Los coeficientes de un polinomio en términos de sus derivadas.

Un polinomio de grado n está completamente determinado por sus (n+1) coeficientes.

$$\boldsymbol{P(x) = a_o + a_1 (x- x_o) + a_2 (x- x_o)^2 + \ldots + a_n (x- x_o)^n}$$

En lo sucesivo, expresaremos al polinomio en potencias de (x - x_o) y encontraremos sus coeficientes en términos de las derivadas evaluadas en x_o.

$$P\,'(x) = a_1 + 2\,a_2\,(x- x_o) + 3a_3\,(x- x_o)^2 + 4a_4\,(x-x_o\,)^3 + \ldots + na_n\,(x- x_o)^{n-1}$$

$$P^{(2)}(x) = 2\,a_2 + (2)(3)a_3\,(x- x_o\,) + (3)(4)a_4\,(x-x_o\,)^2 + \ldots + n(n-1)a_n\,(x- x_o)^{n-2}$$

$$P^{(3)}(x) = (2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4\,(x-x_o\,) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n\,(x- x_o)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(x) = (1)(2)\ldots(n)\,a_n = n!\,a_n$$

De donde, evaluando cada una de estas derivadas en x_o, obtenemos los coeficientes del polinomio:

$$a_o = P(x_o), \quad a_1 = P\,'(x_o), \quad a_2 = \frac{P^{(2)}(x_o)}{2!}, \quad a_3 = \frac{P^{(3)}(x_o)}{3!} \quad , \ldots , \quad a_n = \frac{P^{(n)}(x_o)}{n!}.$$

y en consecuencia la expresión del polinomio será:

$$\boxed{P(x) = P(x_o) + P\,'(x_o)(x - x_o) + \frac{P^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ \ldots \ + \frac{P^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n} \quad \ldots\ldots(\text{ I })$$

Observación: En base a lo anterior, podemos afirmar que, dado un polinomio cualquiera podemos expresarlo en potencias de (x-x_0) para cualquier x_o. Asimismo si conocemos las derivadas en un punto x_o, podemos encontrar el polinomio, como se verá en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Encuentre el polinomio de grado 4 que satisface:

$P(2) = 3$, $\quad P\,'(2) = 5$, $\quad P^{(2)}(2) = 4$, $\quad P^{(3)}(2) = 24$ y $P^{(4)}(2) = 48$

Solución: Para encontrar la expresión del polinomio en términos de (x-2), simplemente sustituimos $k_o = 2$ y $n = 4$ en la expresión (I), obteniendo:

$$P(x) = P(2) + P\,'(2)(x-2) + \frac{P^{(2)}(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4$$

y por lo tanto el polinomio buscado es:

$$P(x) = 3 + 5(x-2) + 2(x-2)^2 + 4(x - 2)^3 + 2(x - 2)^4$$

Ejemplo 2. Exprese al polinomio $P(x) = 7x^3 + x^2 + 8$ en potencias de $(x - 1)$.

Solución: Evaluemos al polinomio y a sus 3 primeras derivadas en $x_o = 1$.

$P(x) = 7x^3 + x^2 +8$	$P(1) = 16$
$P'(x) = 21x^2 + 2x$	$P'(1) = 23$
$P^{(2)}(x) = 42x + 2$	$P^{(2)}(1) = 44$
$P^{(3)}(x) = 42$	$P^{(3)}(1) = 42$

Sustituimos en (I) con $x_o =1$ y $n = 3$, obteniendo la expresión buscada:

$$P(x) =16 + 23(x - 1) + (44/2)(x - 1)^2 + (42/6)(x - 1)^3$$

Es decir:

$$P(x) =16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$

Que puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones, para concluir que:

$$7x^3 + x^2 +8 = 16 + 23(x - 1) + 22(x - 1)^2 + 7(x - 1)^3$$

Volviendo a la representación (I), si f no es un polinomio, obviamente no podrá representarse de la misma manera, sin embargo en vista de que para, la recta tangente, que es un polinomio de grado 1, se cumple que para x cercano a x_o :

$$f(x) \cong f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

y gráficamente observamos que para x cercano a x_o, la función es muy parecida a su "parábola tangente", es decir:

$$f(x) \cong f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2$$

surge de manera natural preguntarnos si para valores cercanos a x_o, se cumplirá:

$$f(x) \cong f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

y podríamos intentar verlo en algunos casos particulares.

A $$\boxed{P_n(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n}$$

le llamaremos el **POLINOMIO DE TAYLOR** de grado n para f, en el punto x_o.
En estos términos, la recta tangente y la parábola tangente, vienen siendo los polinomios de Taylor para f de grados 1 y 2 respectivamente.

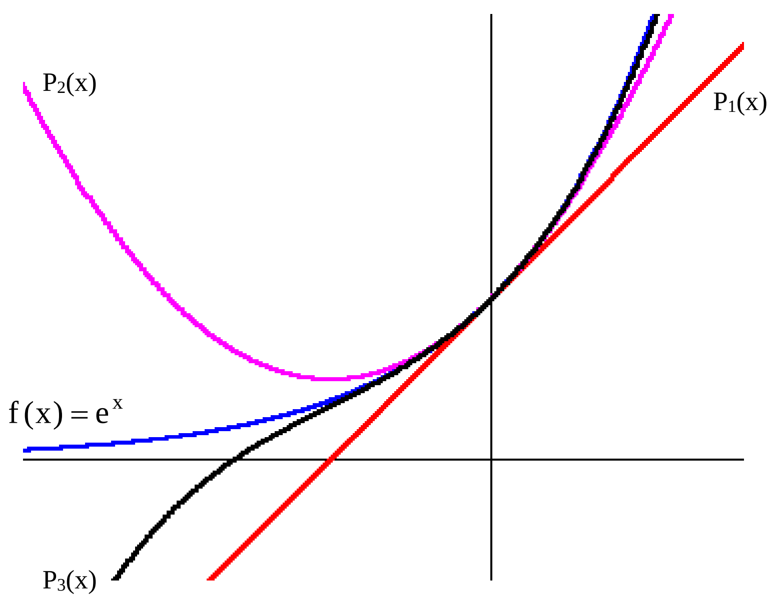
En la siguiente tabla compararemos a la función exponencial $f(x) = e^x$ (última columna) con los polinomios de Taylor correspondientes de grados 1 hasta 4. Obsérvese que la segunda columna corresponde a la recta tangente y la tercera columna a la parábola tangente.

x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$	e^x
1	2	2.5	2.666666	2.7083333	2.718281828
0.5	1.5	1.625	1.645833	1.6484375	1.6487212707
0.3	1.3	1.345	1.3495	1.3498375	1.34985880757
0.1	1.1	1.105	1.10516667	1.10517083	1.10517091807
0.01	1.01	1.01005	1.01005017	1.01005017	1.010050167
0.001	1.001	1.0010005	1.00100050000	1.00100050017	1.00100050016

Si analizamos con detenimiento la información proporcionada por esta tabla, veremos lo siguiente:

1. En cada columna, vemos que la aproximación del correspondiente polinomio de Taylor es mejor cuanto más cercano se encuentre x a 0.
2. En cada renglón, vemos que para cada valor fijo de x, no importa si está cerca o no de 0, la aproximación va mejorando conforme aumentamos el grado del polinomio de Taylor.

Una representación gráfica de esta situación se muestra a continuación para los polinomios de Taylor de grado 1,2 y 3.



El Teorema de Taylor que a continuación enunciaremos sin demostración, nos dice que bajo ciertas condiciones, una función puede ser expresarse como un polinomio de Taylor mas un cierto error, es decir

$$f(x) = P_n(x) + E_n$$

y además nos dirá como estimar este error.

2.5 El Teorema de Taylor.

<u>TEOREMA DE TAYLOR</u>. Sea f continua en $[a, b]$ y con derivadas hasta de orden n continuas también en este intervalo cerrado; supóngase que $f^{(n+1)}(x)$ existe en (a,b), entonces para x y $x_o \in (a,b)$ se tiene:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + E_n$$

donde $E_n = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}$ y c es un punto que se encuentra entre x y x_o.

<u>Observación:</u> El Teorema del valor medio es un caso particular del Teorema de Taylor, ya que para $n = 0$ en éste último, tenemos:

$f(x) = f(x_o) + E_0$ con $E_0 = \dfrac{f^{(1)}(c)}{1!}(x - x_o)^1$ para c entre x y x_o, es decir,

$f(x) = f(x_o) + f'(c)(x - x_o)$ con c entre x y x_o, o bien la conocida expresión para el Teorema del Valor Medio:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = f'(c)$$

2.6 Las Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin

A la Expresión:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x - x_o)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + E_n$$

le llamaremos **FORMULA DE TAYLOR DE *f* EN x_o**, y en el caso particular de $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + E_n$$

le llamaremos **FORMULA DE MAC LAURIN DE f.**

Ejemplo 3. Encuentre la fórmula de Mac Laurin para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = e^x$

Solución: Encontremos primero la fórmula de Mac Laurin para $f(x) = \text{sen}x$.

$f(x) = \text{sen}x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$
$f^{(2)}(x) = -\text{sen}x$	$f^{(2)}(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos(x)$	$f^{(5)}(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$

En general observamos que las derivadas de orden par, evaluados en cero se anulan y las impares valen alternadamente 1 y -1.
En consecuencia la Fórmula de mac Laurin para $f(x) = \text{sen } x$ es:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + E_{2n-1}$$

que expresada en notación sumatoria nos queda como:

$$\boxed{senx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + E_{2n-1}}$$

Análogamente podemos encontrar que:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_{2n}$$

o bien:

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + E_{2n}}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + E_n$$

0 bien

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n}$$

2.7 Cálculo de aproximaciones y estimación del error.

A continuación veremos algunos ejemplos para aproximar una función utilizando la fórmula de Taylor con residuo.

Ejemplo 4. Encuentre un valor aproximado para sen(35º) utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 y estime el error.

Solución. Al igual que cuando utilizamos la recta tangente para efectuar aproximaciones, queremos aproximar a la función sen(x) en el valor de 35º, para lo cual debemos conocer a f y sus derivadas en un punto x_o cercano a éste el cual es $x_o = \pi/6$ (30º expresados en radianes), es decir:

a) $f(x) = \text{sen}(x)$

b) $x_o = \pi/6$ 30º en radianes

$f(x) = \text{sen}(x)$ $f(\pi/6) = 0.5$

$f'(x) = \cos(x)$ $f'(\pi/6) = 0.8660254$

$f''(x) = -\text{sen}(x)$ $f''(\pi/6) = -0.5$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$ $f'(\pi/6) = -0.8660254$

$f^{(4)}(x) = \text{sen}(x)$

En este caso particular la fórmula de Taylor nos quedaría:

$$f(x) = f(\pi/6) + f'(\pi/6)(x - \pi/6) + \frac{f^{(2)}(\pi/6)}{2!}(x - \pi/6)^2 + \frac{f^{(3)}(\pi/6)}{3!}(x - \pi/6)^3 + E_3$$

Que sustituyendo, nos da la fórmula de Taylor de $f(x) = \text{sen}(x)$ en $x_o = \pi/6$

$$sen(x) = 0.5 + 0.8660254(x - \pi/6) - 0.25(x - \pi/6)^2 - 0.14433756(x - \pi/6)^3 + E_3$$

Esta expresión nos servirá para estimar valores de sen(x) para x cercanos a $\pi/6$.

En particular para $x = \pi/6 + \frac{5\pi}{180}$

$$sen(35^o) = 0.5 + 0.8660254(\frac{5\pi}{180}) - 0.25(\frac{5\pi}{180})^2 - 0.14433756(\frac{5\pi}{180})^3 + E_3$$

$$\text{sen}(35^o) = 0.5 + 0.0755749 - 0.001903858 - 0.000095922 + E_3$$

$$\text{sen}(35^o) = 0.57357512 + E_3$$

En la expresión para el error al aproximar con un polinomio de grado 3

$$E_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(\frac{5\pi}{180})^4 = (0.00000241)\text{sen}(c)$$

El error siempre lo obtendremos en términos de un valor c entre x y x_o, sin embargo como esta indeterminada c aparece en sen(c), la cual se encuentra acotada entre -1 y 1, es decir

$$|sen(c)| \leq 1$$

entonces podremos tener una cota para el error, es decir,

$$|E_3| = |(0.00000241)sen(c)| = (0.00000241)|sen(c)| \leq 0.00000241$$

y en consecuencia la aproximación se obtuvo con un error que no excede de 0.00000241

<u>Observación</u>: En general si la (n+1) derivada de f está acotada por una constante M en el intervalo (a,b) que se menciona en el Teorema de Taylor, es decir, si

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad \text{para } x \text{ en el intervalo } (a,b)$$

entonces

$$|E_n| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_o)^{n+1}\right| = |f^{(n+1)}(c)| \left|\frac{(x - x_o)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq M \left|\frac{(x - x_o)^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Así pues, si al aproximar por un polinomio de grado n, la siguiente derivada está acotada por $M > 0$, entonces podemos estimar de la siguiente manera el error.

$$|E_n| \leq M \left|\frac{(x - x_o)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Claramente vemos que si $| x - x_o | \leq 1$, cuando n crece indefinidamente el numerador de la fracción anterior se acerca a cero y el denominador tiende a infinito, por lo que la fracción tenderá a cero, es decir, $E_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Con un poco más de análisis, podemos ver que en general

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0 \text{ para todo valor real de } k$$

por lo que si $| x - x_o | > 1$ también se cumplirá que $E_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Puede observarse en casos particulares que si x está alejada de x_o, para lograr una aproximación prefijada muy pequeña, debemos tomar un polinomio de Taylor con grado muy grande.

Ejemplo 5. Encuentre un valor aproximado para $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de grado dos y estime el error.

Solución. Los datos a considerar en la fórmula de Taylor son:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $x_o = 27$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \qquad f(27) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(27) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{27} = 0.037037037$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \qquad f''(27) = -\frac{2}{9(\sqrt[3]{27})^5} = -\frac{2}{(9)(243)} = 0.000914494$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$$

La fórmula de Taylor, es este caso nos queda:

$$f(x) = f(27) + f'(27)(x-27) + \frac{f^{(2)}(27)}{2!}(x-27)^2 + E_2$$

$$\sqrt[3]{x} = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{2}{(2)(9)(243)}(x-27)^2 + E_2$$

y al sustituir $x = 28$, obtenemos:

$$\sqrt[3]{28} = 3.036579789 + E_2.$$

En la expresión para el error al aproximar con un polinomio de grado 2

$$E_2 = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(1)^3 = \frac{10}{(27)(3!)(\sqrt[3]{c})^8}$$

El error siempre lo obtendremos en términos de un valor c entre 27 y 28, sin embargo como esta indeterminada c aparece en la fracción de la derecha, el error será lo más grande posible cuando el denominador sea lo más pequeño posible, lográndose esto en c = 27, es decir:

$$|E_2| = \left|\frac{10}{(27)(3!)(\sqrt[3]{c})^8}\right| \le \frac{10}{(27)(6)(3)^8} = 0.0000094$$

y en consecuencia la aproximación se obtuvo con un error que no excede de 0.0000094

Ejemplo 6. Encuentre un valor aproximado para $\sqrt{e}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 3 y estime el error.

Solución. Obsérvese que $\sqrt{e} = e^{0.5}$, es decir se nos pide evaluar a la función exponencial en 0.5, el cual es un valor cercano a x_0 = 0, punto en que conocemos a la función exponencial y a sus derivadas.

Así pues encontremos la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(0) + f\,'(0)(x-0) + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + E_3$$

para $f(x) = e^x$ en $x_o = 0$ y posteriormente evaluaremos en $x = 0.5$

Como la función exponencial y todas sus derivadas son iguales, $f^{(n)}(0) = 1$, la fórmula nos queda:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + E_3$$

evaluando en $x = 0.5$, tenemos:

$$e^{0.5} = 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + \frac{(0.5)^3}{3!} + E_3$$

$$e^{0.5} = 1.64583333 + E_3$$

$$E_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0.5)^4$$

Como $f^{(4)}(x) = e^x$, $|e^x| < 3$ para $x \in [0, 1]$, es decir la derivada está acotada por 3 y en consecuencia

$$|E_3| \le 3\left|\frac{(0.5)^4}{4!}\right| = 0.0078125.$$

En base a todo lo anterior, podemos afirmar que:

$\sqrt{e} \approx 1.645833333$ con un error que no excede de 8 milésimas.

Observación: Nótese que la estimación del error puede hacerse independientemente del cálculo de la aproximación, es decir, antes de calcular ésta podemos preguntarnos por el grado del polinomio de Taylor que nos dé la precisión deseada.

Ejemplo 7. ¿De que grado hay que tomar el polinomio de Taylor para encontrar una aproximación a $\sqrt{e}$ con un error que no exceda de una diezmilésima?.

Solución. En referencia al ejemplo anterior, el error que se comete al utilizar un polinomio de Taylor de grado n es:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(0.5)^{(n+1)}$$

De nuevo la (n+1)-ésima derivada está acotada por 3, obteniendo:

$$|E_n| \leq 3\left|\frac{(0.5)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

Para n = 4, $|E_4| \leq 3\left|\frac{(0.5)^5}{5!}\right|$ = 0.00078, es decir el error no excede de 7 diezmilésimas.

Para n = 5, $|E_5| \leq 3\left|\frac{(0.5)^6}{6!}\right|$ = 0.000065, es decir el error no excede de 6 cienmilésimas,

Por lo tanto debe tomarse un polinomio de grado 5.

La fórmula de Taylor para f(x) = e^x en $x_o = 0$ para n = 5 es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + E_5$$

y evaluando en x = 0.5, obtenemos:

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2!} + \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^4}{4!} + \frac{(0.5)^5}{5!} = 1.648697917$$

Ejemplo 8. ¿De que grado hay que tomar el polinomio de Taylor para encontrar una aproximación al número e de Euler con un error que no exceda de una millonésima?.

Solución. Nótese que tomaremos $f(x) = e^x$ con $x_o = 0$ y $x = 1$, y aunque 1 esté "alejado" del 0, como las derivadas están acotadas, podemos encontrar la aproximación con el grado de precisión que se desee con tal de tomar un polinomio de Taylor de grado "suficientemente grande".

Veamos pues de que grado tendremos que tomar el polinomio.

El error que se comete al utilizar un polinomio de Taylor de grado n es:

$$E_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1)^{(n+1)}$$

De nuevo la $(n+1)$-ésima derivada está acotada por 3, obteniendo:

$$|E_n| \leq 3\left|\frac{1}{(n+1)!}\right| = \frac{3}{(n+1)!}$$

Para $n = 5$, $|E_5| \leq \frac{3}{6!}$ = 0.0039, es decir el error no excede de 3 milésimas.

Para $n = 8$, $|E_8| \leq \frac{3}{9!}$ = 0.000008, es decir el error no excede de 8 millonésimas.

Para $n = 9$, $|E_9| \leq \frac{3}{(10)!}$ = 0.0000008, es decir el error no excede de 8 diezmillonésimas.

Por lo tanto debe tomarse un polinomio de grado 9.

La fórmula de Taylor para $f(x) = e^x$ en $x_o = 0$ para $n = 9$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + E_9 = \sum_{n=0}^{9}\frac{x^n}{n!} + E_9$$

expresado en notación sumatoria:

$$e^x = \sum_{n=0}^{9}\frac{x^n}{n!} + E_9$$

y evaluando en $x = 1$, obtenemos:

$$e^1 \cong \sum_{n=0}^{9}\frac{1}{n!} = 2.718281526$$

2.8 Criterio de Máximos y mínimos utilizando derivadas de orden superior

El criterio de la segunda derivada para encontrar valores extremos para una función de una variable, funciona cuando para un punto crítico x_o, la segunda derivada evaluada en x_o es diferente de cero, siendo un valor máximo si $f''(x_o) < 0$ y un valor mínimo si $f''(x_o) > 0$.

Sin embargo hay funciones con valores extremos en un punto crítico x_o en las que también se anula la segunda derivada, como se muestra en el siguiente sencillo ejemplo:

Ejemplo 9. Utilice el criterio de la segunda derivada para encontrar los valores extremos de la función $f(x) = x^4$.

Solución: Los puntos críticos satisfacen $f'(x) = 4x^3 = 0$
Lo cual se satisface únicamente para $x_o = 0$.

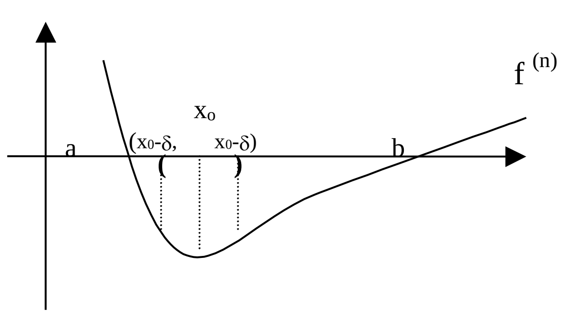
Como $f''(x) = 12x^2$, entonces $f''(0) = 0$, fallando el criterio de la segunda derivada. Si utilizamos el criterio de la primera derivada, vemos fácilmente que esta función tiene un valor mínimo en $x_o = 0$.

A continuación demostraremos, utilizando el Teorema de Taylor, un criterio para detectar valores extremos relativos, cuando el de la segunda derivada falla.

Teorema: Sea $f : R \rightarrow R$ con n derivadas continuas en un intervalo (a,b) que contiene a x_o y supóngase que $f'(x_o) = 0$, $f''(x_o) =0$, $f^{(3)}(x_o) = 0$, ... , $f^{(n\text{-}1)}(x_o) = 0$ y $f^{(n)}(x_o) \neq 0$; entonces:

1. Si n es par:
   a) $f^{(n)}(x_o) < 0 \Rightarrow f$ toma un máximo relativo en x_o.
   b) $f^{(n)}(x_o) > 0 \Rightarrow f$ toma un mínimo relativo en x_o.
2. Si n es impar, la función no alcanza un valor extremo en x_o.

Demostración: 1. Supongamos primero que n es par.
Como $f^{(n)}(x)$ es continua en un intervalo (a, b) que contiene a x_o y $f^{(n)}(x_o) < 0$, podemos encontrar un subintervalo $(x_o - \delta, x_o + \delta) \subseteq (a, b)$ de tal manera $f^{(n)}(x)$ sea negativa en este subintervalo. Gráficamente lo vemos en la siguiente ilustración para la función $f^{(n)}$:



Consideremos x en el intervalo (x_o - δ, $x_o + \delta$), por el Teorema de Taylor:

$$f(x) = f(x_o) + f\,'(x_o)(x-x_o) + \frac{f^{(2)}(x_o)}{2!}(x-x_o)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x_o)}{(n-1)!}(x-x_o)^{n-1} + E_{n-1}$$

$$\text{con} \qquad E_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_o)^n \quad \text{y } c \text{ entre } x \text{ y } x_o$$

como las primeras (n-1) derivadas se anulan en x_o, se tiene:

$$f(x) = f(x_o) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_o)^n$$

$f^{(n)}(c) < 0$ por estar c entre x y x_o y a su vez estos puntos en el intervalo (x_o - δ, $x_o + \delta$) donde la n-ésima derivada es negativa.

Al ser $f^{(n)}(c) < 0$ y n par, la expresión $(x - x_o)^n > 0$ y por lo tanto $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_o)^n < 0$ y en consecuencia $f(x) < f(x_o)$ para toda x en el intervalo (x_o - δ, $x_o + \delta$), lo cual significa que $f(x_o)$ es el mayor de los valores de f en dicho intervalo, es decir f alcanza un máximo relativo en x_o.

La demostración de b) y 2) se dejan como ejercicio.

Ejemplo 10. Encuentre los valores extremos de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

Solución: Encontremos primero los puntos críticos:

$$f\,'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 0$$

$$f\,'(x) = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 4(x + 1)^3 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = -1$$

Por lo tanto el único punto crítico es $x_o = -1$

Tratemos ahora de determinar su naturaleza:

$f\,''(x) = 12x^2 + 24x + 12$ $\qquad$ $f\,''(-1) = 0$

$f^{(3)}(x) = 24x + 24$ $\qquad$ $f^{(3)}(-1) = 0$

$f^{(4)}(x) = 24$ $\qquad$ $f^{(4)}(-1) = 24$

Como la primera derivada diferente de cero en -1 es la de grado 4 y 4 es par, el signo positivo de esta cuarta derivada nos dice que f alcanza un mínimo en $x_o = -1$.

EJERCICIOS

I. En cada caso encuentre los polinomios de Taylor de grado uno, grado dos, grado tres, y grado cuatro en el punto x_o que se indica., escríbalos en la tabla como $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ y $P_4(x)$, y complete la tabla evaluando en los puntos que se indican en la columna de la izquierda.

	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
$x_o + 1.1$				
$x_o + 0.9$				
$x_o + 0.3$				
$x_o + 0.1$				
$x_o + 0.01$				
$x_o + 0.001$				
$x_o - 1.1$				
$x_o - 0.9$				
$x_o - 0.3$				
$x_o - 0.1$				
$x_o - 0.01$				
$x_o - 0.001$				

1) $f(x) = e^x$ en $x_o = 0$

2) $f(x) = \cos x$ en $x_o = 0$

3) $f(x) = sen x$ en $x_o = \pi/6$

4) $f(x) = \tan x$ en $x_o = \pi/3$

5) $f(x) = \ln x$ en $x_o = 1$

6) $f(x) = \arctan x$ en $x_o = 1$

II. Exprese en cada caso al polinomio dado, en las potencias x - x_o que se indican.

1) $P(x) = 3x^4 + 2x + 5$ en potencias de $x - 2$

2) $P(x) = 3x^4 + 2x + 5$ en potencias de $x - 1$

3) $P(x) = 3x^4 + 2x + 5$ en potencias de $x + 1$

4) $P(x) = 4 - x^2 + 6x^3$ en potencias de $x + 1$

5) $P(x) = 2 + (x - 3)^2 - x^4$ en potencias de $x + 4$

6) $P(x) = x^4$ en potencias de x - 1

III. Encuentre en cada caso un polinomio que satisface:

1) $P(0) = 7$, $P'(0) = 3$, $P^{(2)}(0) = 8$, $P^{(3)}(0) = 54$

2) $P(1) = 1$, $P'(1) = 5$, $P^{(2)}(1) = 32$, $P^{(3)}(1) = 42$

3) $P(-2) = 2$, $P'(-2) = 4$, $P^{(2)}(-2) = 8$, $P^{(3)}(-2) = 66$

IV. Encuentre en cada caso la aproximación que se pide, utilizando el teorema de Taylor y estime el error.

1) $\sqrt{36.5}$ polinomio de grado 2

2) $\sqrt{36.5}$ polinomio de grado 3

3) $\sqrt[3]{82}$ polinomio de grado 3

4) sen 6º polinomio de grado 3

5) sen 6º polinomio de grado 6

6) arctan(1.3) polinomio de grado 3

7) ln (1.015) polinomio de grado 3

8) ln (1.8) polinomio de grado 5

9) cos (65º) polinomio de grado 4

10) tan (44º) polinomio de grado 2

V. Diga en cada caso de que grado hay que tomar el polinomio de Taylor para obtener la aproximación deseada, y obténgala.

a) cos (32º) con un error menor que 0.00001

b) sen (70^0) con un error menor que 0.0001

c) sen (47º) con un error menor que 0.00001

d) $\sqrt{230}$ con un error menor que 0.0001

e) $\sqrt[4]{82}$ con un error menor que 0.0001

f) $\sqrt[8]{e}$ con un error menor que 0.00001

g) e con un error menor que 0.000000001

h) ln(1.9) con un error menor que 0.00001

VI. Utilizando el Teorema de Taylor, demuestre que si $f'(x) = 0$ para toda x real, entonces $f(x)$ es una función constante.

Utilizando el Teorema de Taylor, demuestre que si $f^{(2)}(x) = c$ (constante) para toda x real, entonces $f(x)$ es un polinomio de grado 2.