# Capítulo 1

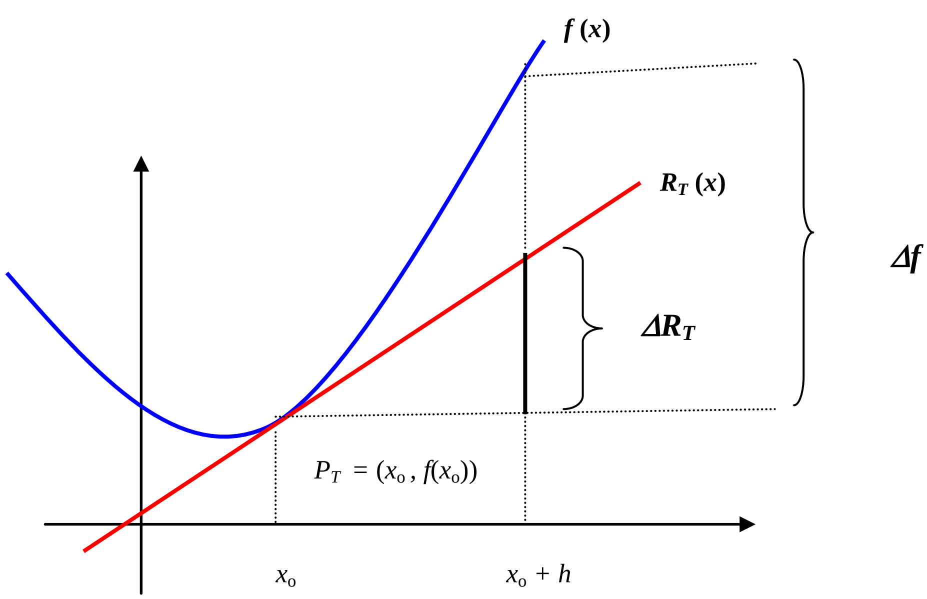
# El Concepto de Diferencial

## 1.1 Introducción.

Existen muchas situaciones, dentro y fuera de las matemáticas, en que necesitamos estimar una diferencia, como por ejemplo en las aproximaciones de valores de funciones, en el cálculo de errores al efectuar mediciones (valor real menos valor aproximado) o simplemente al calcular variaciones de la variable dependiente cuando la variable independiente varía "un poco". Utilizando a la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la función en las cercanías del punto de tangencia, aproximaremos esta **DIFERENCIA** con la diferencia sobre la recta tangente, a la que llamaremos **EL DIFERENCIAL** de la función en el punto.

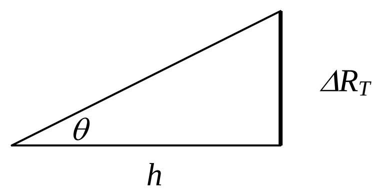
## 1.2 Definición y Ejemplos.

Consideremos la siguiente ilustración en donde aproximamos a la función $f$ por su recta tangente.




Considerando que ***la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia $P_T$***, si le llamamos $\Delta f = f(x_o + h) - f(x_o)$ a la variación de $f$ cuando $x$ varía de $x_o$ a $x_o + h$ y $\Delta R_T$ a la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en $x$, podemos afirmar que para valores de $h$ "cercanos" a 0, estas dos variaciones son muy parecidas, es decir, $\boldsymbol{\Delta f \cong \Delta R_T}$ .

Podemos expresar a $\Delta R_T$ en términos de h y el ángulo $\theta$ que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. En el triángulo de la figura, que extraemos a continuación, se observa lo siguiente:




$$\tan\theta = \frac{\Delta R_T}{h} \quad \Rightarrow \quad \Delta R_T = (\tan\theta)h \quad \Rightarrow \quad \Delta R_T = f'(x_o)h$$

En virtud de que $\Delta R_T$ es un aproximador de la **DIFERENCIA** $\Delta f$, lo definiremos como **EL DIFERENCIAL DE *f* en el punto $\boldsymbol{x_o}$, con respecto al incremento *h*** y lo denotaremos por ***df***, es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{df = f'(x_o)h}}$$

<u>**Observación**</u>**:** El diferencial, en general depende de $h$ y del punto $x_o$. Por ejemplo el diferencial de $f(x) = x^2$ es:

$$df = f'(x_o)h = (2x_o)h$$

que también lo podemos expresar como:

$$d(x^2) = (2x_o)h$$

Si especificamos el punto $x_o$, el diferencial dependerá únicamente de $h$, como se aprecia en los siguientes ejemplos:

a) El diferencial de $f(x) = x^2$ en $x_o = 3$ es $d(x^2) = 6h$
b) El diferencial de $f(x) = x^2$ en $x_o = 7$ es $d(x^2) = 14h$
c) El diferencial de $f(x) = x^3$ en $x_o = 2$ es $d(x^3) = 12h$

En el caso de la función identidad $f(x) = x$, como $f'(x_o) = 1$ para todo $x_o$, su diferencial nos queda como $df = f'(x_o)h = h$ o bien $\boldsymbol{dx = h}$

Como h es el diferencial de la función identidad, podemos re-escribir el diferencial de una función $f$ derivable en $x_o$, de la siguiente manera:

$$\boxed{df = f'(x_o)dx}$$

Esta expresión nos dice que ***la variación de una función f es aproximadamente proporcional a la variación de su variable independiente, donde la constante de proporcionalidad es la derivada en el punto en cuestión***.

En los siguientes ejemplos estimaremos la variación $\Delta f$ para $x_o$ y $h$ dados y la compararemos con el diferencial.

**Ejemplo .** Verifique que:

a) Para $f(x) = x^2$ se cumple que $\Delta f \cong df$ en $x_o = 1$ y $h = 0.1$

**Solución:**

$$\Delta f = f(1.1) - f(1) = 1.21 - 1 = \underline{\mathbf{0.21}}$$

$$df = f'(1)dx = (2x|_{x=1})(0.1) = (2)(0.1) = \underline{\mathbf{0.20}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **una centésima**.

**Observación:** El punto $x_o + h$ es un punto cercano a $x_o$, que se encuentra a la derecha de éste si $h$ es positivo y a la izquierda si $h$ es negativo. En el siguiente ejemplo consideraremos un incremento negativo.

b) Para $f(x) = x^2$ se cumple que $\Delta f \cong df$ en $x_o = 1$ y $h = -0.1$

**Solución:**

$$\Delta f = f(0.9) - f(1) = 0.81 - 1 = -\underline{\mathbf{0.19}}$$

$$df = f'(1)dx = (2x|_{x=1})(-0.1) = (2)(-0.1) = -\underline{\mathbf{0.20}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **una centésima**..

c) Para $f(x) = x^2$ se cumple que $\Delta f \cong df$ en $x_o = 2$ y $h = 0.006$

**Solución:**

$$\Delta f = f(2.006) - f(2) = 4.024036 - 4 = \underline{\mathbf{0.02403}}$$

$$df = f'(2)dx = (2x|_{x=2})(0.006) = (4)(0.006) = \underline{\mathbf{0.02400}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **tres cienmilésimas**

.

d) Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se cumple que $\Delta f \simeq df$ en $x_o = 8$ y $h = 0.2$

**Solución:**

$$\Delta f = f(8.2) - f(8) = 2.016529 - 2 = \underline{\mathbf{0.016529}}$$

$$df = f\,'(8)dx = \left(\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\Big|_{x=8}\right)(0.2) = (1/12)(0.2) = \underline{\mathbf{0.016666}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **una diezmilésima**.

e) Para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se cumple que $\Delta f \simeq df$ en $x_o = 64$, $h = 0.2$

**Solución:**

$$\Delta f = f(64.2) - f(64) = 4.004162334 - 4 = \underline{\mathbf{0.004162334}}$$

$$df = f\,'(64)dx = \left(\frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}\Big|_{x=64}\right)(0.2) = (1/48)(0.2) = \underline{\mathbf{0.00416666}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **cuatro millonésimas**.

f) Para $f(x) = sen(x)$ se cumple que $\Delta f \cong df$ en $x_o = \pi/3$, $h = 0.1$

**Solución:** En este caso $x_o = \pi/3$, $h = 0.1$

$$\Delta f = f(\pi/3 + 0.1) - f(\pi/3) = 0.9116155 - 0.8660254 = \underline{\mathbf{0.04559}}$$

$$df = f\,'(\pi/3)dx = (cos(x)|_{x=\pi/3})(0.1) = (0.5)(0.1) = \underline{\mathbf{0.050}}$$

La variación real difiere de la aproximada en **cinco milésimas**.

**Observación:** En todos los ejemplos anteriores comprobamos que $\Delta f \cong df$ en el punto e incremento dados, sin embargo tanto $\Delta f$ como df son muy pequeños, casi iguales a cero, y decir que éstos son muy parecidos parece trivial. En realidad éstos dos números son muy parecidos en el sentido de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{df} = 1$$

como se puede apreciar en el siguiente desarrollo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{df}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{f\ '(x)h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\left[\frac{1}{f\ '(x)}\right]=f\ '(x).\frac{1}{f\ '(x)}=1$$

lo cual significa que, para valores muy pequeños de $h$, la fracción es prácticamente igual a 1 ó bien que $\Delta f$ es prácticamente igual a $df$.

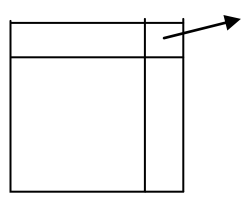
## 1.3 Aplicaciones del Diferencial

### 1.3.1 Problemas del tipo I

***A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación práctica en los que, por medio del diferencial, estimaremos un aumento ó una disminución en alguna función.***

**Ejemplo 1.** Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0.04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?.

**Solución:** Con el fin de ilustrar una situación que se presentará en todos los demás problemas y por la simplicidad de éste en particular, sólo en este caso calcularemos la diferencia de áreas $\Delta A$ y la compararemos con $dA$.
Nótese que originalmente teníamos una placa de 15 x 15, después de calentarla tenemos la placa de 15.04 x 15.04, como se muestra en la figura.




En este caso la función es $A(L) = L^2$ y por lo tanto $\Delta A$ en $L = 15$ y $h = 0.04$ es:

$$A(15.004) - A(15) = 226.2016 - 225 = 1.2016$$

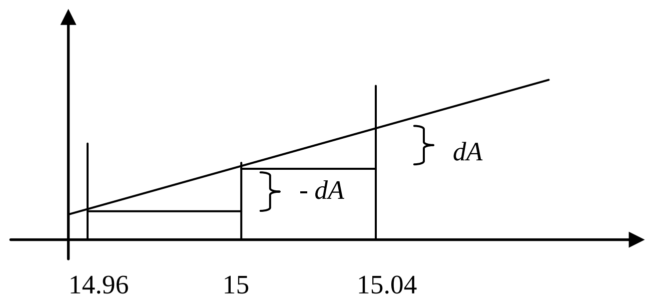
Si ahora calculamos el diferencial de área para $A(L) = L^2$ en $L = 15$ y dL = 0.04, obtenemos:

$$dA = A'(L)dL = (2L)dL = (2L|_{L=15})(0.004) = (30)(0.004) = 1.2$$

En consecuencia, cuando el lado se incrementa en 0.04 cm, el área aumenta aproximadamente 1.2 $cm^2$. (El valor exacto del incremento es 1.2016)

Generalmente este tipo de variaciones se miden en porcentajes, es decir, como 0.04 es el 0.2666% de 15 y 1.2 es el 0.5333% de 225 = $(15)^2$, decimos que si el lado de la placa se incrementa en un 0.266%, el área se incrementará aproximadamente en un 0.5333%.

**Observación**: Si el problema es de una placa metálica del mismo tamaño que se enfría 0.04 cm, entonces $h$ = -0.04 y el diferencial resultaría el mismo sólo que con signo contrario, es decir $dA$ = -1.2. Como estamos usando la recta tangente para estimar la diferencia, la linealidad hace que el cateto opuesto en ambos triángulos de la figura, sean iguales




Resolvamos ahora el mismo problema con otros datos expresados porcentualmente

**Ejemplo 2.** Al enfriar una placa cuadrada metálica de 20 cm de longitud, su lado disminuye un 0.03%. ¿Cuánto disminuirá porcentualmente su área?.

**Solución:** El 0.03% de 20 es $\frac{(0.03)(20)}{100} = 0.006$, por lo que en este caso:
$A(L) = L^2$ , $L_o = 20$ y $dL = -0.006$

$$\Delta A \cong dA = 2LdL = 2(20)(-0.006) = (40)(-0.006) = -0.24$$

Podemos calcular que 0.24 representa el 0.06% de $(20)^2$, por lo que, cuando el lado disminuye un 0.03%, el área disminuye aproximadamente un 0.06%, es decir se duplica porcentualmente.

Este último resultado lo podemos obtener directamente de la siguiente manera:

$$\Delta A \cong dA = 2LdL = 2(20)[\frac{(0.03)(20)}{100}] = \frac{(0.06)(20)^2}{100}$$

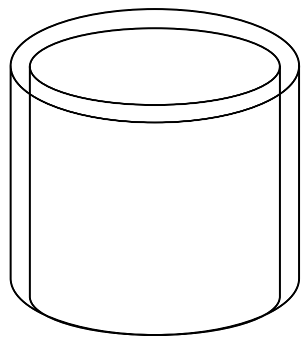
que representa el 0.06% del área original $(20)^2$.

En general se da esta situación, como se aprecia en el siguiente ejemplo que se deja como ejercicio para el estudiante.

**Ejemplo 3.** Pruebe que si al calentar (enfriar) una placa cuadrada metálica de lado *L*, su lado se incrementa (disminuye) un *p*%, entonces el área se incrementa (disminuye) un 2*p*%.

**Ejemplo 4**. La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 50 cm y altura 1 m, debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto que se requiere?

**Solución:** La cantidad de concreto requerida es la diferencia $\Delta V$ entre el volumen del cilindro exterior y el cilindro interior.



Estimaremos $\Delta V$ por medio de $dV$, donde $V(r) = 100\pi r^2$, $r = 50$, $dr = 3$

$$dV = (200\pi r|_{r=50})(3) = 30{,}000\pi = 94247.779 \text{ cm}^3$$

### 1.3.2 Problemas del tipo II

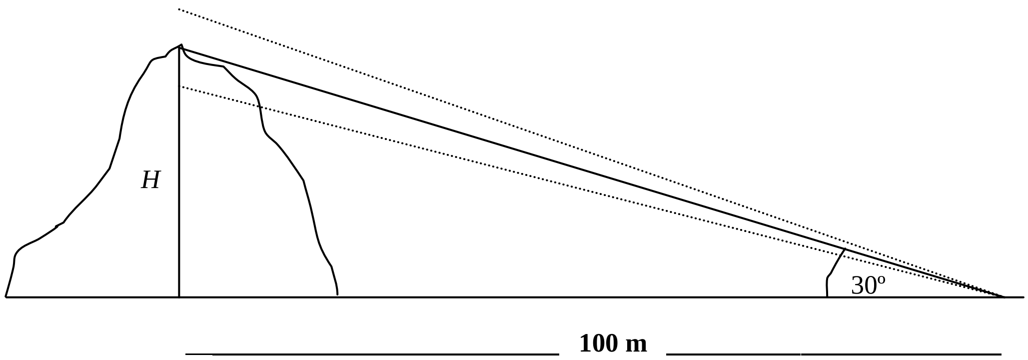
***En los siguientes ejemplos utilizaremos el diferencial para estimar errores en la medición de algunas magnitudes.***

**Ejemplo 1.** Al calcular la altura de un cerro se encuentra que desde un punto situado a 100m de la proyección en el suelo de la parte más alta del cerro, esta última se ve con un ángulo de elevación de 30º. Encuentre aproximadamente el mayor error que se comete al calcular la altura, sabiendo que la medición del ángulo se hace con un posible error de 0.3º.

**Solución:** Llamémosle *H* a la altura del cerro.

En la figura de abajo, $\tan 30^\circ = \dfrac{H}{100}$, por lo que $H = (100)\tan 30^\circ$.

Nótese que si el ángulo se mide con un posible error de 0.3º, estamos diciendo que el valor real del ángulo estará entre 29.7º y 30.3º, es decir el error en la medición del ángulo sería de $\pm 0.3^\circ$.




En este caso consideraríamos a H como función de θ, es decir:

$$H(\theta) = (100)\tan\theta \quad \text{con } \theta \text{ variando entre } 29.7º \text{ y } 30.3º$$

Para estimar el error $\Delta H = H(\theta) - H(30º)$, calcularemos $|dH|$, pues $\theta$ puede tomar valores menores o mayores que 30º.

En este caso $\theta = \pi/6$ y $d\theta = \pi(0.3)/180 = 0.005235987$ (Convertimos grados a radianes)

$$\Delta H \simeq dH = (100)H'(\theta)d\theta = (100)\sec^2\theta\, d\theta = (100)(1.3333)(0.005235987) = 0.6981317$$

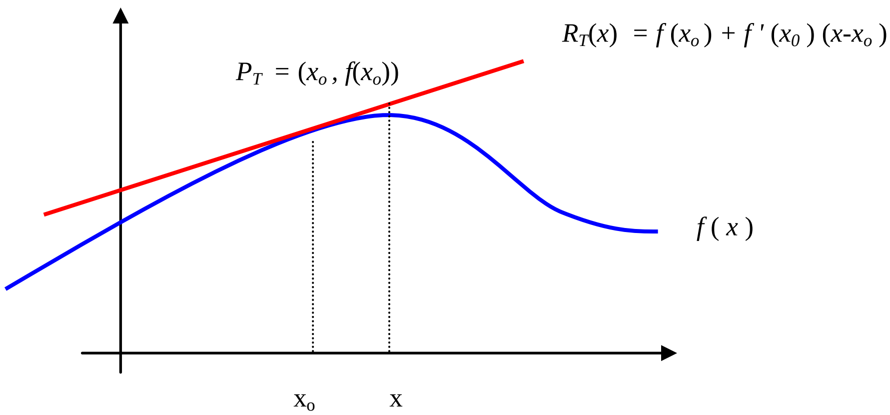
En consecuencia si se comete un error máximo de 0.3º en la medición del ángulo, la altura se obtendría con un error máximo de 0.6981317 m. Se deja como ejercicio comprobar este resultado evaluando directamente $\Delta H$

### 1.3.3 Problemas del tipo III

***A continuación utilizaremos el diferencial para calcular valores aproximados de funciones.***

Cuando estudiamos a ***la recta tangente como la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia*** $P_T$, aprovechamos la simplicidad de la ecuación de una recta para aproximar con ésta, otro tipo de funciones no tan sencillas.

Obsérvese que en la gráfica, $\boldsymbol{f(x) \approx R_T(x)}$ para valores $x$ "cercanos" a $x_o$.

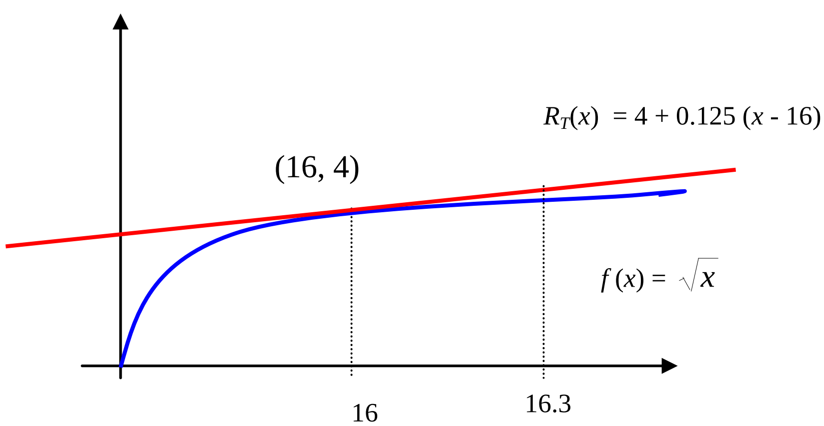



**Ejemplo 1:** Encuentre un valor aproximado para, $\sqrt{16.3}$ utilizando la recta tangente.

**Solución:** Encontremos pues la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en (16 , 4), es decir la ecuación de la recta que pasa por (16 , 4) y tiene pendiente $f'(16)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{y por lo tanto } f'(16) = 0.125$$

Así pues la ecuación buscada es $y = R_T(x) = 4 + 0.125\,(x - 16)$




Como el punto 16.3 está "muy próximo" a 16, en vez de evaluar $f$ (16.3), evaluamos $R_T$(16.3), obteniendo:

$$\sqrt{16.3} = f(16.3) \cong R_T(16.3) = 4 + 0.125(0.3) = 4.0375$$

Así pues $\sqrt{16.3} \cong 4.0375$

Nótese que si comparamos con el valor que nos da la calculadora, $\sqrt{16.3} = 4.0373$ , nuestra aproximación es buena hasta dos diezmilésimas, lo cual puede resultar suficiente para ciertos fines prácticos. Cuando estudiemos El Teorema de Taylor, seremos capaces de obtener la aproximación con el grado de precisión deseado.

**<u>Observación</u>:** En la ecuación de la recta tangente en el punto $(x_o , f(x_o))$

$$R_T(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o)$$

Si tomamos $x = x_o + h$, tendremos la expresión:

$$R_T(x) = f(x_o) + f'(x_o)\, h$$

Y si sustituimos $f'(x_o)h = df$, obtendremos:

$$R_T(x) = f(x_o) + df.$$

Como sabemos que para valores de $x$ cercanos a $x_o$, $f(x) \cong R_T(x)$, obtenemos:

$$\boxed{f(x) \cong f(x_o) + df}$$

Este resultado lo podemos expresar de la siguiente manera:

***Podemos estimar el valor de f en x, cercano a $x_o$, agregándole a f ($x_o$) el diferencial correspondiente.***

**Observación.** Nótese que es necesario conocer el valor de f y de su derivada en el punto $x_0$.

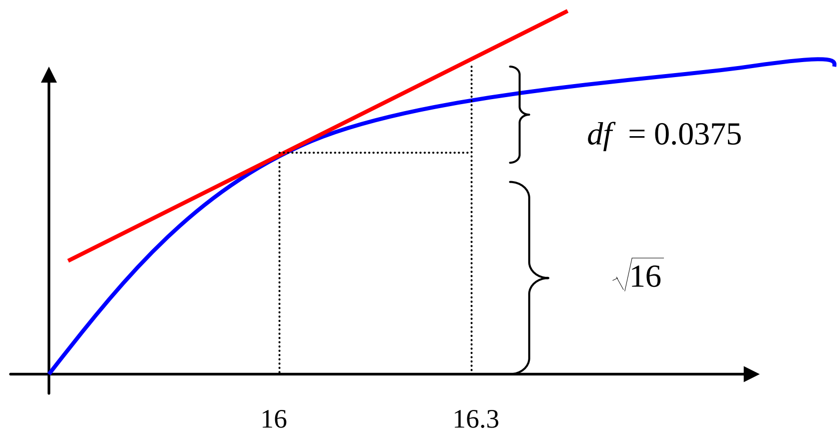
En el ejemplo anterior tendríamos los siguiente datos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$
b) $x_o = 16$
c) $x = 16.3$
d) $dx = 0.3$

Con estos datos, $df = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=16}\right)(0.3) = 0.0375$, y por lo tanto:

$$\sqrt{16.3} \approx \sqrt{16} + 0.0375 = 4.0375.$$

Gráficamente lo que estamos haciendo es evaluar a 16.3 en la recta tangente, como se aprecia en la gráfica anterior que aquí presentamos amplificada.




**Ejemplo 2.** Utilizando diferenciales, encuentre un valor aproximado para $\sqrt[5]{32.8}$

**Solución:** Resumiendo lo anteriormente expuesto:

$$\sqrt[5]{32.8} \cong \sqrt[5]{32} + df$$

donde:

a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
b) $x_o = 32$
c) x = 32.8
d) $dx$ =0.8

$$f'(x) = \frac{1}{5\,(\sqrt[5]{x})^4}$$ , por lo que f ' (32) = 1/80 = 0.0125

y por lo tanto $df$ = (0.0125)(0.8) = 0.01.

Así pues $\sqrt[5]{32.8} \cong 2.01$.

**Ejemplo 3.** Utilizando diferenciales, encuentre un valor aproximado para $\sqrt[5]{31.5}$

**Solución:**

$$\sqrt[5]{31.5} \cong \sqrt[5]{32} + df$$

donde:

e) $f(x) = \sqrt[5]{x}$
f) $x_o = 32$
g) $x = 31.5$
h) $dx = -0.5$

$$f'(x) = \frac{1}{5\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}$$ , por lo que $f'(32) = 1/80 = 0.0125$

y por lo tanto $df = (0.0125)(-0.5) = -0.00625$

Así pues $\sqrt[5]{31.5} \cong 2 - 0.00625 = 1.99375$

**Ejemplo 4.** Utilizando diferenciales, encuentre un valor aproximado para sen31.5º

**Solución:**

$$sen31.5^{\circ} \cong sen30^{\circ} + df$$

Donde

a) $f(x) = senx$
b) $x_o = \pi/6$ medida en radianes de 31º
c) $x = \pi/6 + 1.5(\pi/180)$ medida en radianes de 31.5º
d) $dx = 1.5(\pi/180)$ medida en radianes de 1.5º

$f'(x) = cosx$, por lo que $f'(\pi/6) = cos(\pi/6) = 0.86660254$
y por lo tanto $df = (0.8660254)(1.5)(\pi/180) = (0.8660254)(0.026179) = 0.02267$

Así pues $sen(31.5^{\circ}) \cong 0.5 + 0.02267 = 0.52267$

$$sen(31.5^{\circ}) \cong 0.52267$$

### 1.3.4 Problemas del tipo IV

***Utilización del diferencial para estimar cambios de una variable con respecto a otra sin explicitar las variables dependiente e independiente.***

**Ejemplo 1**. La Ley de Boyle para la expansión de un gas es $PV = C$, donde $P$ es la presión expresada como el número de libras por unidad de área, $V$ es el volumen del gas y $C$ es una constante. Demuestre que si la ley de Boyle se cumplen entonces $VdP + PdV = 0$

**Solución.** En este tipo de situaciones tenemos dos posibilidades para establecer una función: a $P$ como función de $V$ ó a $V$ como función de $P$.
Supondremos que $P$ ó $V$ son diferentes de cero, ya que en caso contrario trivialmente se cumple lo que queremos probar.

a) *Forma 1*: Supongamos que $V \neq 0$ y consideremos a $P$ como función de $V$.
De la ley de Boyle, despejamos $P$ en términos de $V$:

$$P = \frac{C}{V} \qquad \text{ó bien} \qquad P(V) = \frac{C}{V},$$

calculamos el Diferencial de *P* en el punto *V* con un incremento *dV* y obtenemos:

$$dP = -\frac{C}{V^2}dV$$

de nuevo de la Ley de Boyle sabemos que $P = \frac{C}{V}$ y si lo sustituimos en la expresión para *dP*, obtenemos:

$$dP = -\frac{C}{V^2}dV = \left(\frac{C}{V}\right)\left(-\frac{1}{V}\right)dV = -\frac{P}{V}dV$$

pasamos multiplicando a *V* de la última a la primera expresión de la igualdad anterior, obteniendo $VdP = -PdV$ ó bien $VdP + PdV = 0$.

b) *Forma 2*: Supongamos que $P \neq 0$ y consideremos a *V* como función de *P*.
De la ley de Boyle, despejamos V en términos de P:

$$V = \frac{C}{P}$$

(no hacemos explícita a la variable independiente)

calculamos el Diferencial de *V* en el punto *P* con un incremento *dP* y obtenemos:

$$dV = -\frac{C}{P^2}dP$$

de nuevo de la Ley de Boyle sabemos que $V = \frac{C}{P}$ y si lo sustituimos en la expresión para *dP*, obtenemos:

$$dV = -\frac{C}{P^2}dP = \left(\frac{C}{P}\right)\left(-\frac{1}{P}\right)dP = -\frac{V}{P}dP$$

obteniendo también la expresión deseada $PdV + VdP = 0$

**Ejemplo 2**. La resistencia eléctrica R de un conductor (cable) es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su diámetro. Suponiendo que la longitud es constante, ¿con qué precisión debe medirse el diámetro (en términos del error porcentual) para mantener el error porcentual de *R* entre -3% y 3%?

**Solución**. $R = \frac{kL}{D^2}$

Nos piden calcular $dD$ sabiendo que $dR = (0.03)R$

$$dR = \frac{-2kL}{D^3}dD$$

despejando $dD$, obtenemos:

$$dD = \frac{(0.03)RD^3}{-2kL}$$

como $\frac{R}{kL} = \frac{1}{D^2}$

$$dD = \frac{(0.03)D^3}{-2D^2} = (0.015)D$$

En consecuencia el diámetro debe medirse con una precisión del 1.5%.

**Ejemplo 3.** Si el error posible en la medición del volumen de un gas es de 0.1 pie$^3$ y el error permitido en la presión es de (0.001)C lb/pie$^2$, determine el tamaño del recipiente más pequeño para el cual se cumple la ley de Boyle.

**Solución.** Si la ley de Boyle ha de cumplirse, debe pasar que $VdP + PdV = 0$, de donde despejando $V$, obtenemos:

$$V = \sqrt{-\frac{CdV}{dP}}$$

De acuerdo a los datos $dP$ varía de $-(0.001)C$ lb/pie$^2$ a $(0.001)C$ lb/pie$^2$ y $dV$ de -(0.1) pie$^3$ a 0.1 pie$^3$.

La expresión dentro del radical fuerza a que uno de los dos diferenciales sea negativo y para que la fracción sea lo más pequeña posible, el numerador debe ser lo más pequeño y el denominador lo más grande posible, consiguiéndose esto con $dV = -0.1$ y $dP = (0.001)C$.

$$V = \sqrt{-\frac{C(-0.1)}{0.001C}} = \sqrt{100} = 10$$

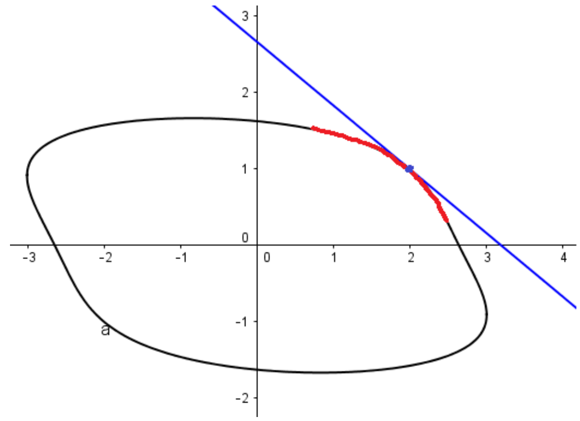
Por lo que el recipiente debe ser de 10 pie$^3$.

### 1.3.5 Problemas del tipo V

***Utilización del diferencial para estimar raíces de polinomios mediante derivación implícita.***

**Ejemplo 1.** Encuentre una solución aproximada de la ecuación

$$y^4 + (2.01)^2 + (2.01)y = 7$$




Asociemos, a esta ecuación, la función implícita $y = f(x)$, definida por la ecuación

$$y^4 + x^2 + xy = 7$$

que en la gráfica se muestra en rojo.

Observe que resolver la ecuación $y^4 + (2.01)^2 + (2.01)y = 7$, significa encontrar el valor de la función implícita, $y = f(x)$, para $x = 2.01$. Este valor lo estimaremos utilizando el concepto de diferencial y para ello calculamos primeramente la derivada de la función implícita en el punto (2,1).

$$y^4 + x^2 + xy = 7$$
$$4y^3y' + 2x + xy' + y = 0$$
$$y' = \frac{-2x - y}{4y^3 + x}$$

Evaluamos en $x = 2$, $y = 1$, obteniendo:

$$y' = -\frac{5}{6},$$

es decir, $f'(2) = \frac{-5}{6}$. Así pues:

$y = f(2.01) \approx 1 + f'(2)dx = 1 + f'(2)(0.01) = 1 + (-\frac{5}{6})(0.01) = 0.991666...$, en consecuencia, una solución aproximada a la ecuación es $y = 0.991666666$.

## Ejercicios

1. En cada caso encuentre $\Delta f = f(x_o+h) - f(x_o)$ para $x_o$ y h que se indican y encuentre df para los mismos datos.

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $x_o = 2$ y $h = 0.1$

b) $f(x) = 3x^2 - 1$ en $x_o = 2$ y $h = -0.003$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_o = 16$ y $h = -0.05$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_o = 64$ y $h = 0.75$

e) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ en $x_o = 2$ y $h = 0.3$

f) $f(x) = senx$ en $x_o = \pi/4$ y $h = -0.1$

g) $f(x) = tanx$ en $x_o = \pi/6$ y $h = 0.03$

h) $f(x) = arctanx$ $x_o = 1$ y $h = 0.013$

i) $f(x) = lnx$ en $x_o = 1$ y $h = 0.018$

j) $f(x) = e^x$ en $x_o = 0$ y $h = -0.0145$

**2.** En cada caso encuentre un valor aproximado, utilizando diferenciales.

a) $\sqrt{16.5}$

b) $\sqrt{16.8}$

c) $\sqrt{17}$

d) $\sqrt{17.54}$

e) $\sqrt{15.9}$

f) $\sqrt{20}$

g) $\sqrt[3]{27.5}$

h) $\sqrt[3]{28.65}$

i) $\sqrt[3]{30}$

j) $\sqrt[5]{26}$

k) $\sqrt[5]{33.16}$

l) $\sqrt[5]{35}$

m) $\sqrt[7]{130}$

n) $sen(45.14º)$

ñ) $sen(46º)$

o) $sen(44º)$

p) tan(59º)

q) $tan(61º)$

r) $ln(1.007564)$

s) $cos(29.5º)$

t) $(0.98)^4$

u) $(3.0023)^4$

v) $(2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2$

w) $arctan(1.0145)$

x) $ln(0.987)$

y) $arctan(0.998)$

3. En cada caso encuentre la ecuación de la recta tangente $R_T$ , en el punto $x_o$ indicado, y grafique en el mismo sistema a la función y su recta tangente.

   a) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_o = 16$; evalúe $R_T(16.5)$; compare con 2 a)

   b) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_o = 16$; evalúe $R_T(15.9)$; compare con 2 e)

   c) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_o = 16$; evalúe $R_T(20)$; compare con 2 f)

   d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_o = 27$; evalúe $R_T(27.5)$; compare con 2 g)

   e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_o = 27$; evalúe $R_T(30)$; compare con 2 i)

   f) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en $x_o = 32$; evalúe $R_T(26)$; compare con 2 j)

   g) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ en $x_o = 32$; evalúe $R_T(35)$; compare con 2 l)

   h) $f(x) = senx$ en $x_o = \pi/4$; evalúe $R_T(\pi/4+\pi/90)$; compare con 2 ñ)

   i) $f(x) = senx$ en $x_o = \pi/4$; evalúe $R_T(\pi/4-\pi/180)$; compare con 2 o)

4. Resuelva los siguientes problemas utilizando diferenciales.

   a) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el área de un cuadrado, si al medir el lado encontramos que mide 15 cm con un posible error del 1.5%.

   b) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el área de un cuadrado, si la medición del lado se efectúa con un posible error del 1.5%

   c) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el volumen de un cubo, si al medir el lado encontramos que mide 27 cm con un posible error de dos milímetros.

   d) Encuentre aproximadamente el error porcentual que se comete al calcular el volumen de un cubo, si al medir el lado encontramos que mide 27 cm con un posible error del 2%.

   e) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el volumen de un cubo, si la medición del lado se efectúa con un posible error del 2%

   f) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular la altura de un poste sabiendo que proyecta sobre el suelo una sombra de 10 m y el ángulo de elevación entre la punta de la sombra la del poste es de 60º con un posible error de 0.3º.

g) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el volumen de un cubo, si al medir el lado encontramos que mide 27 cm. con un posible error de dos milímetros.

h) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular la altura de un poste sabiendo que proyecta sobre el suelo una sombra de 10 m. y el ángulo de elevación entre la punta de la sombra y la del poste es de $60^{o}$ con un posible error de 0.3º

i) Encuentre aproximadamente el error que se comete al calcular el volumen de una esfera, si se encuentra que el radio mide 3m. con un posible error de 2cm.

j) Al calentar una pieza cúbica de metal de 10 cm. de lado, este se incrementa un 0.003%. ¿En qué porcentaje se incrementa el volumen?.

k) Al calentar el cubo del problema anterior, su lado se incrementa un *p*%. ¿En qué porcentaje se incrementa el volumen?.

l) La arena que se escapa de un recipiente va formando un montículo cónico cuya altura siempre es igual a su radio. Use diferenciales para estimar el incremento del radio correspondiente a un incremento de 2 $cm^3$ en el volumen del montículo, cuando el radio mide 10 cm.

m) Un globo esférico se infla con gas, use diferenciales para estimar el incremento del área de la superficie del globo cuando el diámetro varía de 60 cm. a 60.6 cm.

n) Se desea revestir un techo semiesférico de 5 m de radio con una losa de concreto de 10 c. De espesor. Estime la cantidad en metros cúbicos, de concreto a utilizar.

o) La pared frontal de una casa tiene la forma de un cuadrado coronado por un triángulo equilátero. La base mide 48 pies con un error máximo en la medición de una pulgada. Encuentre aproximadamente el máximo error que se comete en la medición del área.

p) La Ley de Gravitación de Newton dice que la fuerza de atracción **F** entre dos partículas de masas $\boldsymbol{m_1}$ y $\boldsymbol{m_2}$ está dada por

$$F = \frac{gm_1m_2}{s^2}$$

donde ***g*** es una constante y ***s*** es la distancia entre las dos partículas. Utilice diferenciales para estimar el incremento en ***s*** debido a un aumento del 10% en ***F***, cuando ***s*** = 20cm.

q) Encuentre una solución aproximada a las siguientes ecuaciones:
1. $y^4 + (1.9)^2 + (1.9)y = 7$
2. $y^3 + y + 0.8 = 11$
3. $10y^3 + 10y + 9 = 11$