Memorias de la XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México. Mosaicos Matemáticos No. 20, agosto 2007, pp. 163-169.

Nivel Medio Superior y Superior

DISEÑO DE HERRAMIENTAS INTERACTIVAS EN LÍNEA COMO APOYO A LOS CURSOS DE CÁLCULO.

Eduardo Tellechea Armenta (etellech@gauss.mat.uson.mx)
Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora

Resumen

En este trabajo se pretende motivar el uso de los recursos del Internet para su aplicación en el aula, en particular en los cursos de Cálculo que se imparten en las carreras de Ciencias e Ingeniería.
Con el objetivo de desarrollar en los estudiantes habilidades de exploración, descubrimiento y conjetura, se diseñan Applets de Java para el estudio de los temas de Funciones y Derivación que, mediante la visualización dinámica, ayudarán al estudiante en la articulación de las representaciones Gráfica, Numérica y Simbólica de funciones y derivadas. El software utilizado es el Applet "Descartes", propiedad del Ministerio de Educación y Cultura de España, el cual es configurable y puede insertarse en páginas Web, permitiendo la interactividad a través del Internet.

Introducción

En la Universidad de Sonora se implementa un nuevo modelo educativo con el objetivo de centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante, y no en el maestro, fomentando el descubrimiento y construcción del conocimiento, en oposición a la tendencia predominante de sólo transferencia de conocimientos. En este contexto, el Departamento de Matemáticas ha impulsado un "**Proyecto de seguimiento del curso de Cálculo Diferencial e Integral I en la División de Ingeniería**", teniendo como uno de sus objetivos el diseño de actividades didácticas, creando para ello ambientes computacionales de aprendizaje en los que la interactividad con la computadora permita al alumno verificar sus resultados, explorar de manera gráfica, numérica y simbólica, detectar patrones de comportamiento y conjeturar sobre lo visualizado, todo ello como una preparación para acceder a un enfoque más abstracto. En este trabajo se presenta un conjunto de Applets con actividades interactivas para el laboratorio de cómputo, las cuales pueden ser utilizadas también a través del Internet. Los Applets utilizados en este trabajo pueden ser consultados en http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1. Cabe mencionar que, por lo restringido de este espacio, sólo se mencionan líneas generales para que el profesor diseñe sus propias actividades.

En la primera sección se presenta un "**Graficador de Funciones**" que permite la graficación de familias de funciones, mediante el uso de parámetros. También se presentan propuestas de actividades a desarrollar por el estudiante, principalmente aquéllas que permitan el tránsito del registro gráfico al simbólico, es decir, desarrollar en el estudiante las habilidades necesarias para reconocer la expresión analítica que corresponde a una gráfica dada.

En la segunda sección se presenta un "**Trazador de Derivadas**" que, para ilustrar el concepto de derivada, muestra de manera gráfica y numérica las pendientes de secantes y tangentes, así como la gráfica de la función derivada. Con las habilidades desarrolladas en la sección anterior, el alumno será capaz de conjeturar y descubrir las expresiones analíticas de las derivadas de las principales funciones del Cálculo.

En **descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Funcion_derivada_Tellechea/index.htm** puede encontrarse un tratamiento muy extenso del tema, con una versión anterior del software. Sin embargo en este trabajo, que utiliza la versión más actualizada de Descartes, se presentan actividades que, al incorporar las nuevas capacidades del software, incrementan notablemente la potencia del programa, permitiendo una mejor interactividad, que redundará en un mayor aprovechamiento por parte del estudiante.

Es conveniente observar que existen otros programas informáticos que permiten diseñar actividades como las que aquí se presentan, pero con más restricciones y sin la capacidad de poder insertarse en páginas Web y ser consultados e interactuar con ellas a través del Internet. El Applet Descartes cuenta con estas capacidades, además de ser más versátil en el sentido de que, a diferencia de los otros programas, permite configuraciones generales, es decir; el diseño de una actividad con una función dada se mantiene con el sólo hecho de cambiar la expresión de la función, permitiendo la exploración en un universo muy amplio de funciones.

1. Graficación de Funciones

En esta primera sección se presenta al estudiante un Applet como el de la figura 1, que permite visualizar hasta cinco funciones simultáneamente.

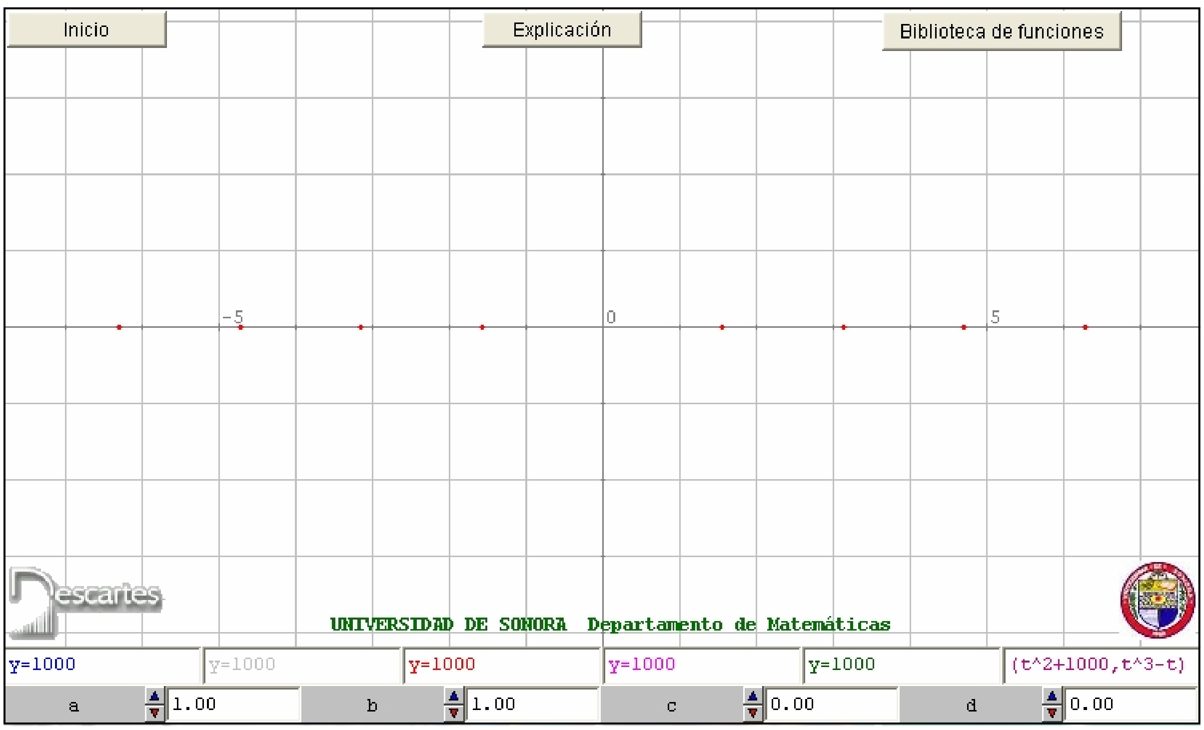

Figura 1

Basta teclear en cada casilla, la ecuación de la forma $y = f(x)$ y oprimir "Enter" para obtener su gráfica. El Applet dispone de cuatro parámetros a, b, c y d, modificables en pantalla, para graficar familias de funciones, como por ejemplo las de la forma $y = af(b(x-c))+d$

En la figuras 2 y 3 se muestran funciones de la forma $y = a(x-b)^2 + c$ para valores a = -0.5, b = 3 y $c = 2$, así como $y = asen(b(x-c)) + d$ con valores a = 3, b = 2, c = 1 y d = -1

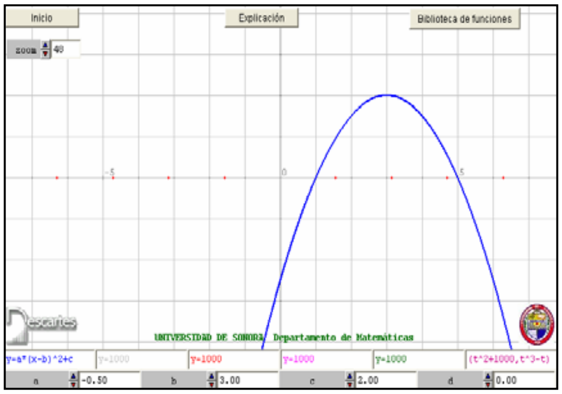

Figura 2

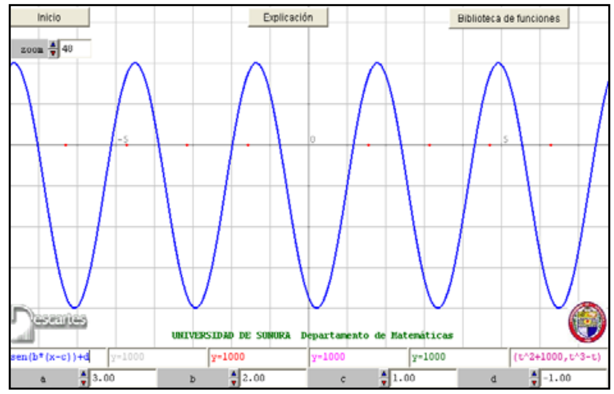

Figura 3

Con el fin de conocer el efecto que ocasiona la modificación de los parámetros de la función $y = a(x-b)^2 + c$ sobre su gráfica, se interactúa con el Applet, descubriendo que la gráfica es una parábola, que se abre hacia arriba (a>0) o hacia abajo (a<0), dependiendo del signo de a, y que tiene el vértice en el punto (b, c). Además, podrá observarse que, si $|a| < 1$, la parábola es más abierta que $y = x^2$ y, si $|a| > 1$, es más cerrada.

Una vez explorado lo anterior, se aborda el proceso inverso: dada la gráfica de una parábola que pasa por un punto dado y con vértice conocido, el alumno determinará su expresión analítica.

Análogamente, en el caso de la función senoidal, el alumno descubrirá mediante una exploración libre, el efecto de modificar cada uno de los parámetros sobre la gráfica de la curva y, a la inversa, dada la gráfica de una onda senoidal, determinará su expresión analítica.

En las figuras 4 y 5 se muestra el tipo de problemas a resolver. Al estudiante se le presentan las gráficas y debe obtener las expresiones analíticas respectivas.

***<u>Problema</u>: Encuentre la ecuación de la parábola con vértice en* (-1, -2) *y que pasa por* (0, 1).**

***<u>Problema</u>: Encuentre la expresión analítica de una onda senoidal de período* 5 *y amplitud* 2.**

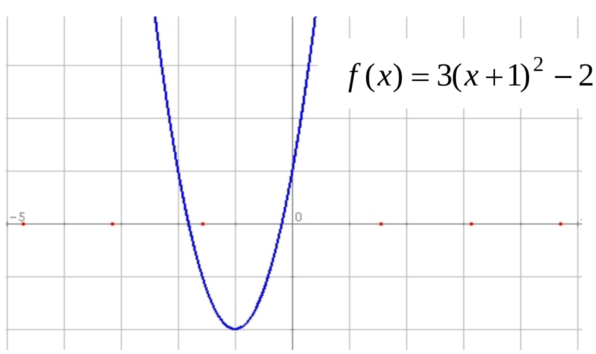

Figura 4

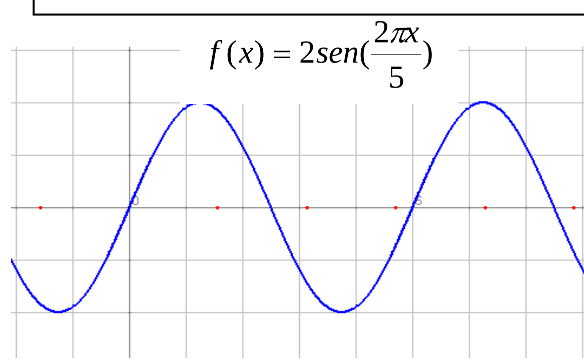

Figura 5

También se podrá interactuar con un Applet tomado de http://descartes.cnice.mecd.es que permite al alumno evaluar su desempeño, calificándole aciertos y errores como se muestra en la figura 6.

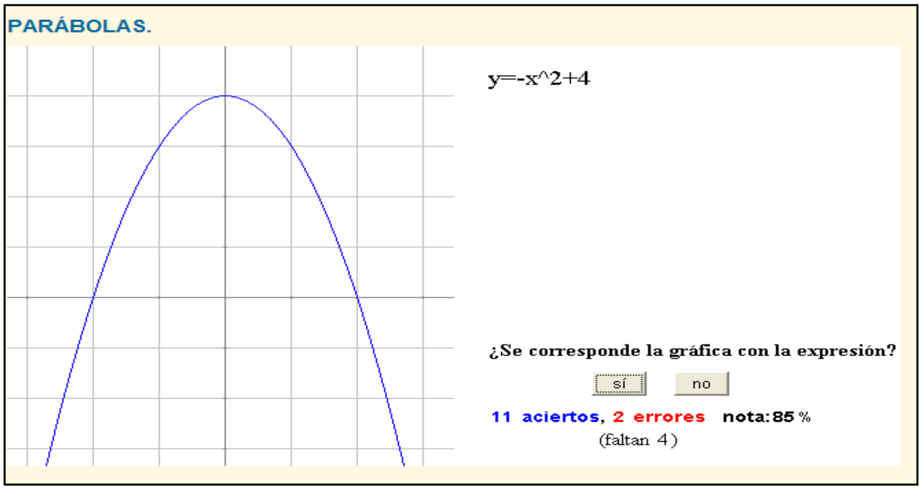

Figura 6

2. Derivación de Funciones

Como apoyo al aprendizaje del concepto de derivada, se presenta el Applet denominado "**Trazador de Derivadas**", el cual permite la articulación de las representaciones gráfica, numérica y simbólica que serán de gran ayuda en la comprensión de dicho concepto.

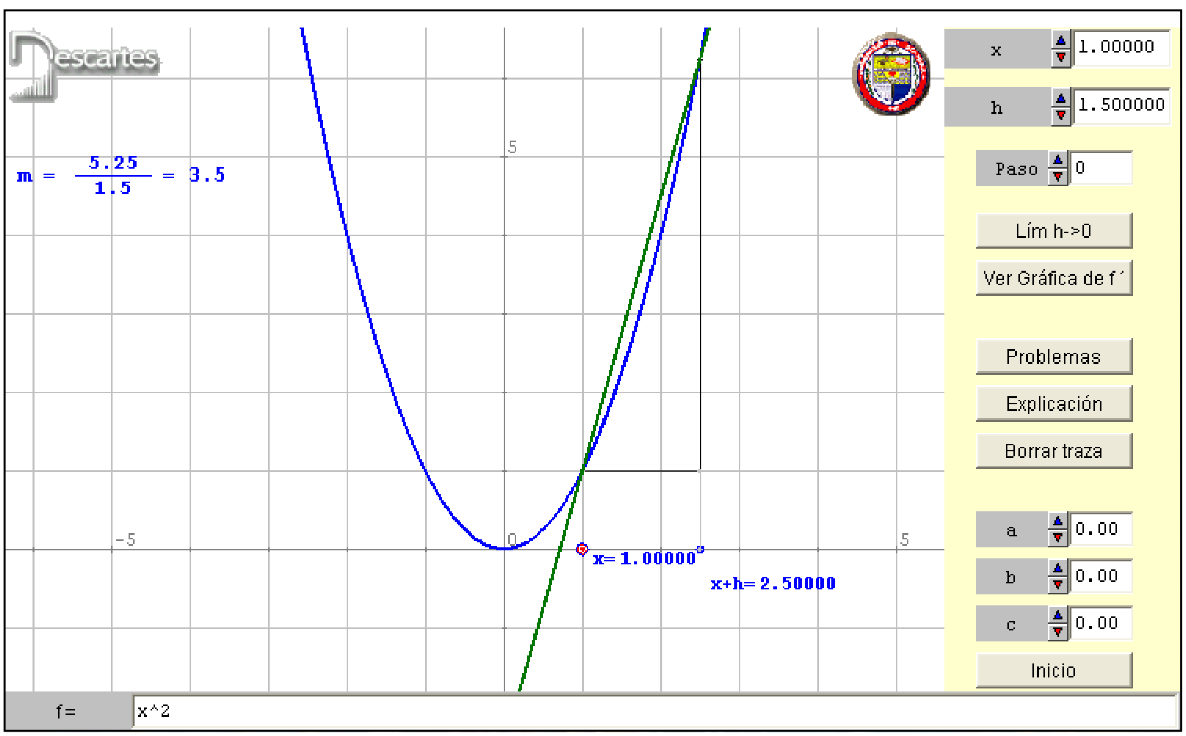

Figura 7

El Applet muestra la gráfica de $f(x) = x^2$ y la recta secante que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x + h = 2.5$. También se muestra, en la parte superior izquierda, el valor numérico de la pendiente de dicha recta. Es posible modificar en pantalla la expresión analítica de la función, así como los valores de *x* y *h*, para observar las correspondientes modificaciones gráficas y numéricas.

Utilizando el control "Paso", podemos hacer un recorrido gráfico de la construcción de la función derivada, mediante la siguiente secuencia:

1. En "Paso = 0" se muestra el Applet como en la figura 7
2. En "Paso = 1", como se aprecia en la figura 8, se muestra el valor de la pendiente de la recta secante como el valor correspondiente a la longitud del cateto opuesto AB, a partir de un triángulo rectángulo de cateto adyacente unitario, además del cálculo numérico de la pendiente. Si hacemos tender *h* a cero, la secante se aproxima a la tangente y para *h* = 0.000001, el Applet muestra a la recta como tangente y, numéricamente, la pendiente como la derivada, como se aprecia en la figura 9. Este último efecto puede lograrse también oprimiendo el botón "Lim $h \to 0$".
3. En "Paso = 2", se traslada el segmento AB, como en la figura 10. La ordenada del punto P, representa la pendiente de la recta secante. Al mover el punto *x*, el punto P deja una traza que describe, punto a punto, la función pendiente de secantes.
4. En "Paso = 3", el punto P deja una traza ininterrumpida, como en la figura 11, y por supuesto que, si *h* es "muy pequeña", podemos considerar esta traza como la correspondiente a la función pendiente de tangentes, es decir, la función derivada.
5. En "Paso = 4", se oculta el trazador, mostrándose solamente la función y su derivada, en forma gráfica y numérica (figura 11). Este último efecto puede lograrse oprimiendo el botón "Ver gráfica de *f* ' ".

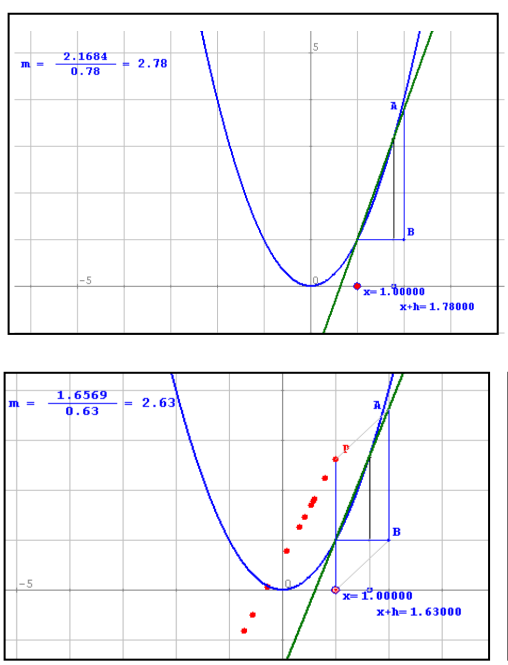

Figura 10

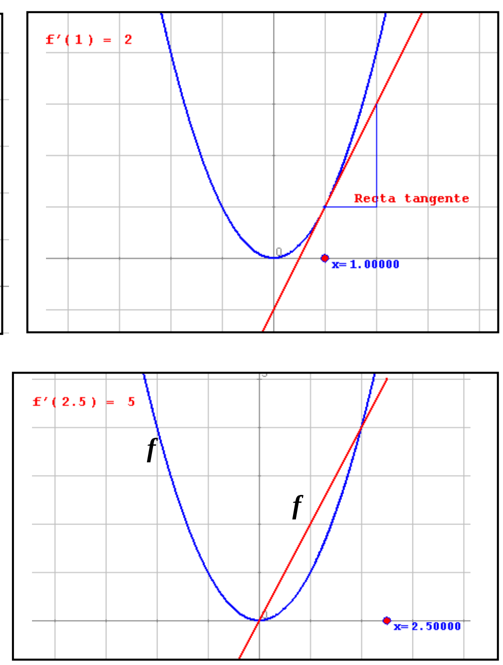

Figura 11

Como puede apreciarse, esta herramienta permite visualizar tanto el valor numérico de la derivada en un punto dado, como la gráfica de la función derivada (figura 11). En este sentido, pueden diseñarse actividades guiadas para que el alumno reconozca las expresiones numéricas y gráficas que le permitan obtener las correspondientes representaciones analíticas.

Por ejemplo, como se observa en la figura 12, en la interactividad con el Applet, el alumno descubrirá que la derivada de la función $f(x)=x^3-3x^2+x+2$ es una parábola con vértice en el punto (1, -2) y pasa por el punto (0, 1). De lo estudiado en la sección 1, se obtiene que $f'(x)=3(x-1)^2-2$, es decir: $\frac{d}{dx}(x^3-3x^2+x+2)=3x^2-6x+1$.

También descubrirá, como puede apreciarse en la figura 13, que la derivada de la función $f(x)=sen(2x)$ es una onda senoidal del mismo período, desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda y de amplitud 2, obteniéndose $f'(x)=2\cos(2x)$, es decir: $\frac{d}{dx}sen(2x)=2\cos(2x)$.

Haciendo uso del paso 2 del trazador, podemos representar numéricamente en una tabla los valores puntuales de la derivada de $f(x)=\ln x$, y conjeturar que el valor de la derivada en cada punto, es el recíproco del punto dado, es decir: $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$. En la figura 14, $f'(0.5)=2$.

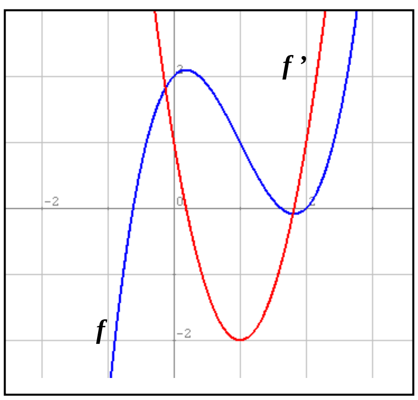

Figura 12

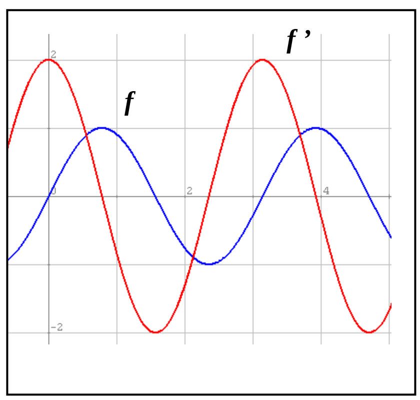

Figura 13

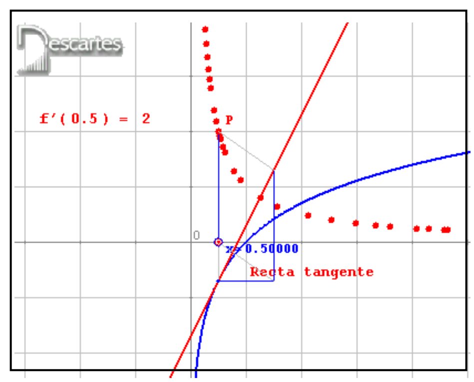

Figura 14

Es importante observar que estos Applets permitirán a los profesores, de acuerdo a su experiencia, diseñar sus propias actividades guiadas que conduzcan al estudiante al aprendizaje de otros temas del Cálculo Diferencial, como por ejemplo, el uso de la derivada para determinar regiones de monotonía y concavidad, así como descubrir visualmente los criterios de máximos y mínimos.

Conclusiones

En el estudio de la derivada, es de suma importancia la graficación para visualizar su interpretación geométrica. Con el aprovechamiento de las capacidades de la computadora, podemos ir más allá de la graficación tradicional, logrando que el dinamismo de las representaciones gráficas nos arroje nueva luz y nos permita descubrir algunas propiedades de la derivada, así como obtener las representaciones analíticas de las derivadas de las más importantes funciones del Cálculo. Además, es posible avanzar en el descubrimiento de algunas reglas de derivación, como la Regla de la Cadena.

Actividades como las que aquí se proponen, permiten generar vínculos entre lo visual y lo simbólico, desarrollando en el alumno habilidades de exploración, descubrimiento y conjetura, esenciales para que un ambiente computacional pueda considerarse significativo en el aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Abreu, J. L.; Oliveró, M.: 2003. *Applet Descartes* (software), Ministerio de Educación y Cultura de España.

PROYECTO DESCARTES, Página web: http://descartes.cnice.mecd.es/

Tellechea A., E.: 1999. Página web: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1

Tellechea A., E.: 2004. *El Applet Descartes en el diseño de actividades interactivas de Matemáticas* Notas de curso para profesores. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.

Tellechea A., E.; Robles, A., G.: 2004. *Un Aparato Virtual para trazar la función Derivada y su utilización en la Enseñanza del Cálculo Diferencial*
http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Funcion_derivada_Tellechea/index.htm