El Teorema de Borsuk-Ulam

José Luis Cisneros Molina
Instituto de Matemáticas, UNAM-Cuernavaca
jlcm@matcuer.unam.mx
Gabriela Hinojosa Palafox
Instituto de Matemáticas, UNAM-Cuernavaca
gabriela@matcuer.unam.mx

Carlos A. Robles Corbalá
Universidad de Sonora
crobles@gauss.mat.uson.mx

junio de 2000.

Introducción

En matemáticas, uno de los problemas principales consiste en clasificar los objetos de estudio. Para ello, generalmente se define una noción de equivalencia —dependiendo de las propiedades que nos interesen— entre dichos objetos y un problema fundamental consiste en, dados dos objetos, determinar si éstos son equivalentes o no. Por ejemplo, en geometría plana, si las propiedades que nos interesan son el tamaño y la forma, la noción de equivalencia estaría dada por el concepto de *congruencia*, así dos objetos (polígonos por ejemplo) serán equivalentes si y sólo si éstos son congruentes, es decir, si tienen la misma forma y tamaño. Si lo que nos interesa es únicamente la forma, la noción de equivalencia será la de *semejanza* y de esta manera, dos objetos serán equivalentes, si son proporcionales, no importando así su tamaño.

En el caso de la topología, la noción de equivalencia es la de *homeomorfismo*: dos espacios topológicos son homeomorfos (o equivalentes) si existe entre ellos una aplicación invertible (homeomorfismo), donde ella y su inversa sean continuas. Intuitivamente, esto quiere decir que podemos "deformar continuamente" uno de los espacios hasta obtener el otro. El problema de determinar si dos espacios son homeomorfos o no, utilizando directamente la definición de homeomorfismo, puede ser muy difícil. Para probar que son homeomorfos, tenemos que dar un homeomorfismo entre ellos, lo cual puede ser nada fácil. Por otro lado, para probar que no lo son tenemos que demostrar que no existe *ningún* homeomorfismo entre ellos, lo cuál puede ser aún más difícil. Otra forma más fácil de atacar el problema, consiste en buscar propiedades de los espacios topológicos que se preserven bajo homeomorfismo, de esta manera, si uno de los espacios posee dicha propiedad y el otro no, entonces no pueden ser homeomorfos. Ejemplos de dichas propiedades son la *conexidad* y la *compacidad*. Para el lector interesado en más detalles y en las definiciones formales recomendamos [2, 15].

Veámos algunos ejemplos de esta técnica. Usando el concepto de compacidad podemos ver que la recta real $\mathbb{R}$ y el círculo unitario $\mathbb{S}^1$ *no* son homeomorfos, ya que $\mathbb{S}^1$ es un espacio compacto, lo que equivale a decir que como subconjunto del plano euclideano es cerrado y acotado, mientras que $\mathbb{R}$ no es compacto por no ser acotado. Ahora usemos el concepto de conexidad. Intuitivamente, el que un espacio sea conexo significa que conste de un sólo "pedazo". Denotemos por $\mathbb{R}^n$ al espacio euclideano n-dimensional. Veámos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, no son homeomorfos. A primera vista, parece que la conexidad no nos ayuda a probar nuestra afirmación, ya que ambos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son conexos, pero nos valemos del siguiente truco: supongamos que existe un homeomorfismo ϕ entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, si quitamos un punto p de $\mathbb{R}$ y su imagen bajo ϕ en $\mathbb{R}^n$ entonces seguiremos teniendo un homeomorfismo entre $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(p)\}$. Esto es imposible, ya que al quitarle un punto a $\mathbb{R}$ éste se separa en dos "pedazos", es decir, deja de ser conexo, mientras que $\mathbb{R}^n$ menos un punto no se separa. Por lo tanto, concluimos que no puede existir un homeomorfismo entre dichos espacios. Sin embargo, ésta técnica no sirve para ver en general que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, *no* son homeomorfos, ya que $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ es siempre conexo para $n \geq 2$. Para ello fueron necesarias nuevas técnicas. La búsqueda de dichas técnicas dió origen a la topología algebraica.

La idea principal en topología algebraica es la de *invariante topológico*, la cual consiste en que a cada espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico $h(X)$ (grupo, espacio vectorial, módulo, etc.) y a cada función continua f entre dos espacios topológicos X e Y, se le asocia una función

$h(f) : h(X) \to h(Y)$ que preserva la estructura algebraica en cuestión (*homomorfismo*), de tal manera que si X e Y son homeomorfos, entonces $h(X)$ y $h(Y)$ son isomorfos, es decir, equivalentes como objetos algebraicos. Por lo tanto, si dos espacios X e Y son tales que $h(X) \neq h(Y)$, es decir, sus invariantes topológicos son distintos, entonces X e Y *no* pueden ser homeomorfos. Algunos ejemplos de invariantes topológicos son: los grupos de homotopía, los grupos de homología y los anillos de cohomología.

En las secciones subsiguientes, describiremos algunos de estos invariantes. En primer lugar, al primer grupo de homotopía, tambien conocido como el grupo fundamental, el cuál nos permitirá demostrar que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, con $n > 2$ no son homeomorfos. Otro invariante que mencionaremos será el anillo de cohomología singular, con el cuál finalmente es posible demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$, no son equivalentes como espacios topológicos.

Los invariantes topológicos no sólamente sirven para ver si dos espacios topológicos son equivalentes o no, combinando los diferentes invariantes mediante algunas técnicas desarrolladas en topología algebraica es posible demostrar numerosos resultados sobre los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre ellos. Un ejemplo de ésto es el Teorema de Borsuk-Ulam. Desde su solución por K. Borsuk [4] en los 30's, tras una conjetura de S. Ulam, ha cautivado a los matemáticos por más de 70 años.

En la formulación clásica, el Teorema de Borsuk-Ulam establece que dada una función continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ existe un punto $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $\mathbb{S}^n$ denota a la esfera n-dimensional (los puntos en $\mathbb{R}^n$ de norma 1) y $-x_0$ es el punto antípoda de x_0 en la esfera. Hemos escogido este ejemplo por las siguientes razones:

- Es un resultado básico de topología que, a pesar de su sorprendente conclusión, es fácil convencerse de su veracidad, pues su demostración en el caso $n = 1$ es elemental, sólo se necesita el Teorema del valor intermedio del cálculo para entenderla.

- Por otro lado, el caso general $n > 1$ requiere técnicas de topología algebraica y su demostración ilustra claramente, el uso de cada una de ellas y como se combinan para dar el resultado deseado.

- Es un resultado muy importante, pues ha tenido influencia en numerosas ramas de las matemáticas, lo que ha dado origen a diversas generalizaciones en muchos sentidos, siendo en la actualidad un campo activo de investigación.

De la formulación del Teorema de Borsuk-Ulam presentada, podemos observar que lleva implícito un teorema de existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones que cumplan cierta “simetría”. De aquí, que este teorema haya tenido un desarrollo formidable en la teoría de ecuaciones. Otro aspecto del teorema es la presencia de “simetría” con respecto a la función continua f, la cuál tiene una formulación moderna en las técnicas de “espacios con acciones de grupos”. También existen versiones y generalizaciones del teorema en este contexto. Actualmente existen mas de 500 artículos que llevan una variante del Teorema de Borsuk-Ulam, y aún se siguen escribiendo versiones del mismo. Incluimos una breve bibliografía para beneficio del lector.

El presente trabajo esta organizado de la siguiente forma: en la sección 1 enunciamos dos versiones del Teorema de Borsuk-Ulam, probamos su equivalencia y damos su demostración para el caso $n = 1$. Posteriormente, en la sección 2 damos los rudimentos del grupo fundamental. En la sección 3 definimos los espacios cubrientes y presentamos sus principales propiedades. A continuación, en la sección 4 mencionamos algunas características de la cohomología singular y en la sección 5 proporcionamos una prueba del teorema. Finalmente, en la sección 6 damos algunos ejemplos de trabajos que han generalizado el Teorema de Borsuk-Ulam en diversas ramas de las matemáticas.

Hacemos énfasis en que mas que proporcionar una prueba nueva del teorema, el objetivo principal de estas notas es proporcionar un ejemplo de como se usan las técnicas de topología algebraica en un caso específico.

1 Teorema de Borsuk-Ulam

En estas líneas veremos la versión clásica del teorema y una formulación equivalente del mismo.

Teorema de Borsuk-Ulam. *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, entonces existe x_0 en $\mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, donde $-x_0$ denota la antípoda de x_0.*

Este teorema puede ser replanteado de la siguiente manera:

Teorema. *Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que $-f(x) = f(-x)$ para toda x en $\mathbb{S}^n$ (i.e., f es una función que conmuta con la antípoda). Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x_0) = 0$.*

En efecto:

Sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que $-f(x) = f(-x)$ para toda x en $\mathbb{S}^n$. Definimos $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ como $g(x) = f(x) - f(-x)$, asi g es continua y por el teorema de Borsuk-Ulam existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x_0) = g(-x_0)$, es decir, $f(x_0) - f(-x_0) = f(-x_0) - f(x_0)$. Esto implica que $2f(x_0) = 2f(-x_0)$, pero por hipótesis $f(-x_0) = -f(x_0)$; así $f(x_0) = f(-x_0) = -f(x_0)$, por lo tanto $f(x_0) = 0$.

Recíprocamente, sea $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ continua. Definimos $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ como $g(x) = f(x) - f(-x)$; g es continua y satisface $-g(x) = g(-x)$, pues $g(-x) = f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)] = -g(x)$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tal que $g(x_0) = 0$, es decir, $f(x_0) - f(-x_0) = 0$. Esto implica que $f(x_0) = f(-x_0)$. Obteniendo así el Teorema de Borsuk-Ulam.□

A continuación probaremos el enunciado equivalente al teorema de Borsuk-Ulam para el caso $n = 1$:

Teorema. *Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^1$ continua, tal que $-f(x) = f(-x)$ para toda $x \in \mathbb{S}^1$. Entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(x_0) > 0$, entonces $f(-x_0) < 0$, ya que $-f(x_0) = f(-x_0)$.

Por otro lado, $\mathbb{S}^1$ es conexo y f es continua, lo que implica que $f(\mathbb{S}^1)$ es conexo en $\mathbb{R}$, pero los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos, por lo que $f(\mathbb{S}^1)$ es un intervalo. Ahora, debido a que $f(x_0) > 0$ y $f(-x_0) < 0$, existe $y \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(y) = 0$ (Teorema del valor intermedio).

El caso $f(x_0) < 0$ es análogo; por lo tanto, el Teorema de Borsuk-Ulam es válido para $n = 1$. □

Notemos que la demostración anterior se basó esencialmente en el orden de $\mathbb{R}$, orden que perdemos para $n > 1$; para probar este último caso se utilizan algunas técnicas de topología algebraica. A continuación daremos una breve introducción al Grupo Fundamental y a la Teoría de Espacios Cubrientes.

2 Grupo Fundamental

Dado un espacio topológico X, este invariante se basa en el estudio de funciones continuas $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = f(1) = x$, con $x \in X$, a las cuáles llamaremos *lazos con punto base* x. Definimos un producto en este tipo de funciones de la siguiente manera:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Decimos que dos lazos $f, g : [0,1] \to X$ con punto base x son equivalentes, si existe una función continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que

$$\begin{array}{lcll} F(t,0) = f(t) & \text{y} & F(t,1) = g(t) & \text{para } t \in [0,1] \\ F(0,s) = f(0) & \text{y} & F(1,s) = f(0) & \text{para } s \in [0,1] \end{array}$$

y en este caso diremos que f es homotópica a g y lo escribimos $F : f \sim g$. Donde $\sim$ es una relación de equivalencia.

Denotemos por $\Pi(X,x)$ el conjunto de clases de equivalencia de lazos con punto base $x \in X$. Se define el producto de clases como

$$[f]\,[g] = [f * g]$$

Es fácil verificar que este producto no depende de los representantes de las clases.

Se demuestra que $\Pi(X,x)$ con la operación anterior es un grupo, donde el elemento neutro es la clase de equivalencia del lazo constante $\epsilon(t) = x$ para $t \in [0,1]$; y el inverso de $[f(t)] \in \Pi(X,x)$ es $[f(1-t)]$. Este grupo recibe el nombre de *Grupo Fundamental de* X *con punto base* x.

Si X es conectable por trayectorias se prueba que su grupo fundamental es independiente del punto base. Es decir, si x, $y \in X$, entonces $\Pi(X,x) \simeq \Pi(X,y)$.

De esta manera, al espacio topológico X se le ha asociado el grupo $\Pi(X,x)$. Ahora, a una función continua $\varphi : X \to Y$ le vamos a asociar un homomorfismo de grupos $\varphi_{\#} : \Pi(X,x) \to \Pi(Y,\varphi(x))$ de la siguiente forma:

$$\varphi_{\#}([f]) = [\varphi f]$$

Esta asignación satisface las siguientes propiedades:

- Si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son funciones continuas; entonces, $(\psi\varphi)_\# = \psi_\#\varphi_\#$.
- Si $1 : X \to X$ es la identidad, entonces $1_\#$ es el homomorfismo identidad.

En lenguaje categórico, las propiedades anteriores significan que el grupo fundamental es un funtor covariante de la categoría de espacios topológicos punteados en la categoría de grupos.

He aquí algunos ejemplos primordiales:

1. Si X es el espacio que consta de un punto, $\Pi(X, x)$ es el *grupo trivial*, es decir, el grupo que consta de un solo elemento, más aún si X es el disco unitario en $\mathbb{R}^n$, entonces $\Pi(X, x)$ tambien es el grupo trivial.
2. Si $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, con $n > 2$, entonces $\Pi(X, x)$ es el grupo trivial.
3. Si $X = \mathbb{S}^1$, entonces $\Pi(X, x) = \mathbb{Z}$.
4. Si $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, entonces $\Pi(X, x) = \mathbb{Z}$.
5. Si $X = \mathbb{S}^n$ con $n > 1$, entonces también $\Pi(X, x)$ es el grupo trivial.
6. Si X es el espacio proyectivo real de dimension $n \geq 2$ (ver siguiente sección) entonces $\Pi(X, x) = \mathbb{Z}_2$, es decir, es el grupo que consta de dos elementos. Este ejemplo se elaborará mas en la siguiente sección.

A un espacio X con la propiedad de que $\Pi(X, x)$ es el grupo trivial, se le denomina *simplemente conexo*. Nótese que usando el truco de quitarle un punto a cada espacio y usando los ejemplos 2 y 4 anteriores, podemos concluir que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^n$, con $n > 2$, no son homeomorfos, pues $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ no es simplemente conexo, mientras que $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, con $n > 2$ si lo es. Sin embargo, aún no podemos probar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$ y $n, m \geq 2$, *no* son homeomorfos, pues en este caso, al quitarles un punto, ambos son simplemente conexos.

3 Espacios Cubrientes

Definición: $\widetilde{X} \overset{p}{\to} X$ es un *espacio cubriente* de X si para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U de x tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos S_i en $\widetilde{X}$, tal que cada S_i es transformado homeomórficamente en U por p. A p se le denomina aplicación cubriente.

Ejemplos:

1. Los homeomorfismos son espacios cubrientes.
2. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definido por $\exp(t) = \mathsf{e}^{2\pi i t}$ es un espacio cubriente.
3. Para $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definido por $p(x) = x^n$ es un espacio cubriente.
4. Considere el espacio proyectivo real de dimensión n, $\mathbb{RP}^n$, definido como $\mathbb{S}^n/(x \sim -x)$. Nótese que $\mathbb{RP}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. La proyección natural $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ dada por $x \mapsto \{x, -x\}$ es una aplicación cubriente.

Como consecuencia de la definición, tenemos:

- Para cada $x \in X$, la fibra $p^{-1}(x)$ es discreta.
- p es un homeomorfismo local.
- p es sobre y así X tiene la topología cociente de $\widetilde{X}$.

Dado un espacio cubriente $\widetilde{X} \overset{p}{\to} X$, el grupo G de *transformaciones cubrientes* es el grupo de todos los homeomorfismos de $\widetilde{X}$ que preservan las fibras, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\phi} & \widetilde{X} \\ p \searrow & & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

Existe una estrecha relación entre el grupo fundamental y espacios cubrientes, dada por los siguientes dos teoremas, cuyas demostraciónes se encuentra en [11] y [18].

Teorema de Levantamiento. *Sean* $X \xrightarrow{p} Y$ *una aplicación cubriente,* $x_0 \in X$ *y* Z *un espacio conectable por trayectorias y localmente conectable por trayectorias. Tomemos* $f : (Z, z_0) \to (Y, f(z_0))$ *una aplicación continua. Entonces existe* $\widetilde{f} : Z \to X$ *tal que* $\widetilde{f}(z_0) = x_0$ *si y sólo si* $f_\#(\Pi(Z, z_0)) \subseteq p_\#(\Pi(X, x_0))$.

Cabe observar que el teorema anterior es uno de los pocos resultados donde una condición topológica (levantar f) es equivalente a una algebraica $(f_\#(\Pi(Z, z_0)) \subseteq p_\#(\Pi(X, x_0)))$.

Teorema. *Dado un espacio cubriente* $(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \xrightarrow{p} (X, x)$ *con grupo de transformaciones cubrientes* G*. Si* $\widetilde{X}$ *es simplemente conexo y localmente conectable por trayectorias, entonces* G *es canónicamente isomorfo a* $\Pi(X, x)$.

A $\widetilde{X}$ se le conoce como el *cubriente universal* de X.

Este último teorema nos proporciona una vía para calcular el grupo fundamental de $\mathbb{RP}^n$, el espacio proyectivo real de dimensión n. Este ejemplo será muy importante en las secciones subsiguientes.

Ejemplo: El grupo de transformaciones cubrientes de $\mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ consiste de la identidad y la aplicación antípoda $(x \mapsto -x)$ sólamente; como $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo para $n \geq 2$, tenemos

$$\Pi(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}_2, \text{ para } n \geq 2$$

4 Cohomología Singular

En esta sección no pretendemos dar todos los conceptos para definir cohomología singular, puesto que no es el objetivo de este trabajo, más bien, daremos los elementos más fundamentales de cohomología singular que utilizaremos en la siguiente sección.

Como mencionamos en la introducción, este es otro ejemplo de invariante topológico. A diferencia de la sección 2, sólo diremos que a un espacio topológico X se le asocia un álgebra graduada $H^*(X)$ (con $* \in \mathbb{N}$) de cierta manera, llamada el *álgebra de cohomología singular*; y a una función continua $f : X \to Y$ se le asocia un homomorfismo de algebras graduadas $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$, observe que f^* va en dirección opuesta a f. Existen versiones de la cohomologia singular "con coeficientes en un grupo abeliano A", denotada por $H^*(X;A)$, donde la idea es captar la informacion de cada divisor a la vez. Cuando no se escriba explícitamente el grupo de coeficientes A, como al principio del presente párrafo, es una convención usual suponer que se trata del grupo de los números enteros $\mathbb{Z}$, es decir, $H^*(X) = H^*(X;\mathbb{Z})$.

En el lenguaje categórico, se tiene que la cohomología singular es un funtor contravariante de la categoría de espacios topológicos en la categoría de algebras graduadas.

Notemos que cada $H^*(X;A)$ (con $* \in \mathbb{N}$) tiene estructura de anillo, es esta propiedad la que nos es útil como veremos más adelante. Para mas detalles una excelente referencia es [11].

Como ejemplo mencionamos

- Si X consta de un punto, $H^0(X) = \mathbb{Z}$ y $H^*(X) = 0$ para $* > 0$.
- Si $X = \mathbb{S}^n$ o $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{p\}$, con $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces $H^i(X) = \mathbb{Z}$ para $i = 0, n$ y $H^i(X) = 0$ para $i \neq 0, n$ y cualquier elemento en $H^n(X)$ al cuadrado es cero.

Denotemos por $\mathbb{Z}_2$ al grupo con dos elementos, entonces,

- Si X es el espacio proyectivo real de dimension $n > 1$, se tiene que $H^*(X;\mathbb{Z}_2)$ es un algebra polinomial truncada en un elemento $\gamma_n \in H^1(X)$, es decir $H^*(X;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\gamma_n]/\gamma_n^{n+1}$.

Nótese que con el segundo ejemplo, ahora si podemos demostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, con $n \neq m$ no son homeomorfos, pues al quitarles un punto tienen grupos de cohomología diferentes.

5 Demostración del Teorema de Borsuk-Ulam para $n > 1$

La demostración del teorema de Borsuk-Ulam se basa en el siguiente:

Teorema. *Para $n > m \geq 1$, sea $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ una aplicación continua. Entonces existe una función continua $f' : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^m$ tal que $p \circ f' = f$, donde $p : \mathbb{S}^m \to \mathbb{RP}^m$ es la aplicación cubriente.*

Demostración. Por el teorema de levantamiento es suficiente probar que $f_{\#}(\Pi(\mathbb{RP}^n)) = 0$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^m \\ & & \downarrow p \\ \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^m \end{array}$$

Para el caso $m = 1$, sabemos que $\Pi(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ y $\Pi(\mathbb{RP}^1) \simeq \mathbb{Z}$. Debido a que todo homomorfismo de $\mathbb{Z}_2$ en $\mathbb{Z}$ es trivial, se sigue que $f_{\#}$ es trivial.

Para probar el caso $m > 1$ se hace uso de la teoría de cohomología singular para espacios proyectivos. Asumiremos solamente los mencionados en la seccion 4 y a continuación daremos un bosquejo de la demostración. Los detalles se encuentran en [11] y [18].

Como mencionamos anteriormente para $n \geq 1$ el álgebra de cohomología graduada para el n -espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$, $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$; es un álgebra polinomial truncada sobre $\mathbb{Z}_2$ generada por γ_n de grado 1 y altura $n+1$.

Ahora consideremos el homomorfismo inducido en álgebras graduadas

$$f^* : \; H^*(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}_2) \to H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{Z}_2)$$

Sean γ_m, γ_n los generadores de estas álgebras. Como $0 = f^*({\gamma_m}^{m+1}) = f^*(\gamma_m)^{m+1}$ y $n > m$, se sigue que $\gamma_n \neq f^*(\gamma_m)$. Pero $H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ tiene únicamente dos elementos 0 y γ_n; de aquí que $f^*(\gamma_m) = 0$.

Por otro lado $\Pi(\mathbb{RP}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$, y un generador para este grupo es la clase de homotopía de la inclusión $i : \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^n$; y por lo anterior $i^* \circ f^*(\gamma_m) = (f \circ i)^*(\gamma_m) = 0$. Si $j : \mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{RP}^m$ es la inclusión, se sabe que $j^* : H^1(\mathbb{RP}^m, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{RP}^1, \mathbb{Z}_2)$ es un isomorfismo [18] y así $j^*(\gamma_m) \neq 0$. Esto implica que $f \circ i$ no es homotópica a j. Debido a que $\Pi(\mathbb{RP}^m) \simeq \mathbb{Z}_2$ y j es un generador para este grupo, se tiene que $f \circ i$ es homotópica a la constante y así $f_{\#}(\Pi(\mathbb{RP}^n)) = 0$. $\square$

Corolario. *Para $n > m \geq 1$, no existe una función continua $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ tal que $g(-x) = -g(x)$ para $x \in \mathbb{S}^n$.*

Demostración. Supongamos que g con esa propiedad existe. Entonces g define una aplicación continua $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^m \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^m \end{array}$$

donde p y p' son las aplicaciones cubrientes.

Por el teorema anterior, existe una aplicación continua $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^m$ tal que $p \circ f' = f$. Así,

$$pf'p' = fp' = pg$$

por lo que $f'p'$ y g son levantamientos de la misma función.

Para $x \in \mathbb{S}^n$, $g(x) = f'p'(x)$ ó $-g(x) = f'p'(x)$; pero $-g(x) = g(-x)$, de aquí que $-g(x) = g(-x) = f'p'(x) = f'p'(-x)$; por lo que $f'p'$ y g coinciden en algún punto de $\mathbb{S}^n$ y por la unicidad del levantamiento, concluimos que $f'g' = g$. Esto es una contradicción ya que p' envía a x y $-x$ al mismo punto, mientras que g los envía a puntos diferentes. $\square$

Con lo anterior, podemos probar el teorema de Borsuk-Ulam.

Teorema. *Dada una aplicación continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ para $n \geq 1$, existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^n$. Definimos $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ como

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

entonces $g(-x) = -g(x)$; lo cual contradice el corolario anterior. $\square$

Este teorema admite una interpretación física: En cada instante existe un par de puntos antipodales de la superficie de la Tierra que tienen simultáneamente la misma presión y la misma temperatura.

En particular, el Teorema de Borsuk-Ulam nos dice que no existe una aplicación continua inyectiva de $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Corolario. *Ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$.*

Por lo tanto, no hay manera de hacer un mapa (uno-a-uno) de la tierra sobre un pedazo plano de papel sin romper la imagen en alguna parte.

6 Consideraciones Finales

El teorema de Borsuk-Ulam, como mencionamos ha atraido a una gran cantidad de matemáticos, quizá por la simplicidad de su formulación (observe que las hipótesis son mínimas) y su inesperadad conclusión (existencia de un punto en la esfera con cierta cualidad). Este teorema ha sido llevado a muchísimas ramas de la matematica, por ejemplo existen versiones numéricas como [1], formulaciones en variedades [7], en términos de la categoría de Lusternik-Schnirelman [8], en análisis funcional [5], aplicaciones a problemas con valores en la frontera [16], y dos versiones recientes: órbitas cuya imagen satisface un sistema de ecuaciones [3] y aplicaciones continuas en polihedros [10], (agradecemos al árbitro nos haya proporcionado estas últimas referencias); en ecuaciones diferenciales [17] y generalizaciones del mismo [9]. También hay generalizaciones [6, 12] motivadas por problemas en economía [13, 14]. La anterior no pretende abarcar todas las referencias al teorema, sino sólo dar al lector una idea de las distintas formas que ha dado pié el Teorema de Borsuk-Ulam.

Referencias

[1] Bàràny, I., Borsuk's theorem througout complementary pivoting, Math. Programming **18** (1980), 84-88.

[2] Brayton Gray., *Homotopy Theory and Introduction to Algebraic Topology.* Academic Press (1975).

[3] Bogaty, S.A., Cyclic systems, configuration spaces, and the Borsuk-Ulam-Munkholm-Fenn-Connett-Cohen-Lusk theorem, Proc. Steklov Inst. Math. **212** (1996), 40-54.

[4] Borsuk, K., *Drei Sätze Über die n-dimensionale euklidische Sphäre.* Fund Math. 20(1933) pág. 177-190.

[5] Brown, A. L., The Borsuk-Ulam theorem and orthogonality in normed linear spaces. Amer. Math. Monthly **86** (1979), 766-767.

[6] Brown, D., Eaves, C., Computing Zeros of Sections of Vector Bundles using Homotopies and Relocalization, Mathematics of Operations Research, **21**, (1996) 26-43.

[7] tom Dieck, T., Smith, L., On coincidence points of maps from manifolds to spheres, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 251-255.

[8] Fadell, E., The relationship between Lusternik-Schnirelman category and the concept of genus, Pacific J. Math **89** (1989), 33-42.

[9] Fadell, E., Husseini, S., Rabinowitz, P. Borsuk-Ulam theorems for arbitrary $\mathbb{S}^1$ actions and applications, Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 345-360.

[10] Izydorek, M. and Jaworowski, J., Antipodal incidence for maps of spheres into complexes, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 1947-1950.

[11] Greenberg M., Harper J. *Algebraic Topology: A First Course*. Addison-Wesley (1981).

[12] Hirsch M., Magill M., A generalization of the Borsuk-Ulam Theorem, `http://www.mathcs.emory.edu/ hirsch/Papers/bu.html`.

[13] M. D. Hirsch, M. Magill, and A. Mas-Colell. A geometric approach to a class of equilibrium existence theorems. Journal of Mathematical Economics, **19** (1990), 95-106.

[14] S. Y. Husseini, J.-M. Lasry, and M. J. P. Magill. Existence of equilibrium with incomplete markets. Journal of Mathematical Economics, **19** (1990), 39-67 .

[15] Kosniowski, C., *Topología Algebraica*. Editorial Reverté (1992).

[16] Pruszko, T., Some applications of the topological degree theory to multivalued boundary value problems. Dissertationes Math. **229** (1984), 52 pp.

[17] Rabinowitz, P., Periodic solutions of hamiltonian systems. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 157-184.

[18] Spanier E., *Algebraic Topology*. Mc-Graw Hill (1966).