APORTACIONES DE LOS BERNOULLI AL CÁLCULO

Oscar Mario Rodríguez Sánchez

INTRODUCCIÓN

A causa de una violenta persecución de protestantes en Amberes, mucha gente buscó refugio en otras partes. Uno de los refugiados fue Jacques Bernoulli, quien encontró asilo en Francfort, en 1583. En 1622, su hijo mayor se instaló en Basilea; lo mismo hizo otro de sus hijos, Nicolaus (1623-1708), quien procreó a Jacques I (1654-1705), Nicolaus I (1662-1716) y Jean I (1667-1748), los primeros matemáticos de la familia. El ordinal romano se les agrega para distinguirlos de sus homónimos de las generaciones posteriores.

La notable familia suiza Bernoulli realizó grandes aportaciones a las matemáticas y a las ciencias. En tres generaciones produjo no menos de nueve miembros de la familia que lograron preeminencia en matemáticas o en física (cuatro de ellos recibieron distinciones de la Academia de Ciencias de París), los que a su vez produjeron un enjambre de descendientes que dejaron huella en muchos campos del conocimiento.

JACQUES I

Jacques Bernoulli nació el 27 de diciembre de 1654 y murió el 16 de agosto de 1705; fue el quinto hijo de una gran familia. También se le encuentra como Jacob, por la traducción de su nombre al alemán, y como James, por su traducción al inglés. Estudió teología; pero la abandonó en favor de las ciencias. De manera autodidacta aprendió el nuevo cálculo de Newton y Leibniz y fue profesor de matemáticas en Basilea desde 1687 hasta su muerte. Escribió sobre series infinitas, estudió muchas curvas especiales, inventó las coordenadas polares y presentó los números de Bernoulli que aparecen en la expansión en serie de potencias de la función tan(x) y que son útiles para escribir el desarrollo en series infinitas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

En su libro *Ars Conjectandi*, publicado en 1713 y que se considera como el primer volumen substancial en la teoría de probabilidad, formuló el principio básico de teoría de probabilidad que se conoce como Teorema de Bernoulli o Ley de los grandes números: si la probabilidad de algún evento dado es p y si se han hecho n intentos independientes con k éxitos, entonces $k/n \to p$ conforme $n \to \infty$.

Este teorema fue el primer intento para deducir medidas estadísticas a partir de probabilidades individuales y Bernoulli tardó veinte años en perfeccionarlo. Para poder dar una idea de la importancia del resultado de Bernoulli y los problemas que lo rodean, habría que extenderse y exponer varios puntos.

En 1690 sugirió el nombre "integral" a Leibniz y puntualizó que en un punto máximo o mínimo la derivada de la función no tiene que anularse; sino que puede tomar un "valor infinito" o asumir una forma indeterminada.

En su primer artículo sobre series infinitas, en 1689, presentó la "desigualdad de Bernoulli":

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

aunque ésta puede encontrarse antes en la séptima lectura de *Lectiones geometriae* de Barrow, de 1670.

En base a la correspondencia frecuente con matemáticos de la época, sabía de los problemas populares, muchos de los cuales resolvió independientemente. Así, encontró las ecuaciones y propiedades de la catenaria (formada al colgar libremente por sus extremos una cadena pesada), la tractriz y la isocrona, que habían sido tratadas por Huygens y Leibniz. La isocrona es una curva plana a lo largo de la cual un objeto caería con velocidad vertical uniforme; mostró que la curva requerida es la parábola semicúbica. Por otra parte, la tractriz es la curva descrita por un objeto que inicia en la parte positiva del eje de las ordenadas y es "jalado" desde la parte positiva del eje de las abscisas con una lanzadera rígida de longitud fija. Jacques también encontró propiedades de las figuras isoperimétricas, por ejemplo, las que encierran el área mayor en un perímetro dado.

En este tipo de trabajos los hermanos Bernoulli descubrieron el poder del cálculo. En el trabajo sobre la isocrona en el *Acta Eruditorum* de 1690 usó la palabra "integral" y Leibniz aceptó que era mejor nombre que *summatorius*

Contribuyó al estudio de la "ecuación de Bernoulli":

$$y' + A(x)y = f(x)y^n$$

la que fue resuelta por él mismo, Leibniz y Jean.

En el *Acta Eruditorum* de 1694, describió la llamada "lemniscata de Bernoulli", dada por la ecuación polar

$$r^2 = a\cos 2\theta$$

De otra curva, la espiral logarítmica, que había sido mencionada por Descartes y rectificada por Torricelli, mostró que tenía varias propiedades no notadas antes. Esta curva comparte, con la línea recta y el círculo, que son casos límite de la espiral logarítmica, la propiedad de volver sobre sí misma por un grupo continuo de semejanzas.

Esta curva, conocida también como espiral equiangular, puede hallarse en la trama de la tela de araña, en las conchas (como en la del Nautilus en que se ve la espiral logarítmica continua) y en las espirales de las nebulosas; los estambres del girasol gigante aparecen dispuestos, de modo natural, en espirales logarítmicas en dos series curvadas en sentidos opuestos.

Matemáticamente, la espiral logarítmica se halla relacionada con el círculo en geometría y con el logaritmo en análisis. Es notable la relación que guardan los círculos en ella, y ella misma, con sus radios. Así mismo, cómo algunos de sus elementos y operaciones sobre algunos de sus elementos son a su vez espirales logarítmicas. Las propiedades de dicha curva fueron tan simbólicas para Bernoulli que pidió que fuera grabada sobre su lápida con las palabras *Eadem mutata resurgo*.

Jacques Bernoulli, como Newton, se interesó en las aplicaciones del cálculo; derivó fórmulas para la longitud de arco y radios de curvatura en coordenadas polares. De su "espiral parabólica" $r^2 = a\theta$, notó que el problema de la longitud de arco lleva, a través de

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

a la integral de la raíz cuadrada de un polinomio cuártico, primera instancia de lo que se conoce como una integral elíptica.

G. C. Fagnano (1682-1766) continuó con el trabajo sobre la lemniscata de Bernoulli y, entre 1717 y 1718, mostró que la rectificación de esta curva lleva a una integral elíptica, como la longitud de arco de la elipse.

El nombre de Fagnano continúa ligado a la elipse

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

la cual presenta algunas analogías con la hipérbola equilátera o rectangular. La excentricidad de esta elipse, por ejemplo, es $1/\sqrt{2}$, mientras la excentricidad de la hipérbola equilátera es $\sqrt{2}$.

NICOLAUS I

Nicolaus Bernoulli (1662-1716) obtuvo un doctorado en Filosofía a los 16 años y el más alto grado disponible en Derecho a la edad de 20 años; fue profesor en ese campo antes de cambiar, también, a las matemáticas. Fue padre de Nicolaus II (1687-1759).

NICOLAUS II

Nicolaus Bernoulli (1687-1759), hijo de Nicolaus I, tuvo por algún tiempo la cátedra de matemáticas de Padua, que había ocupado Galileo.

Mientras los Bernoulli lograban desarrollos en geometría analítica, cálculo y probabilidad, los matemáticos italianos continuaron prefiriendo la geometría. Muy cercanas a los intereses de los Bernoulli, fueron las contribuciones de Jacobo Riccati (1676-1754), quien dio a conocer los trabajos de Newton en Italia.

Riccati es recordado especialmente por su estudio extensivo de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

que ahora lleva su nombre, aunque Jacques Bernoulli había estudiado anteriormente el caso especial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Riccati pudo saber de este estudio, ya que Nicolaus enseñó en Padua, donde Riccati fue estudiante de Stefano degli Angeli (1623-1697) y donde tuvo contacto con Nicolaus Bernoulli y con Jacob Hermann (1678-1733). Así, el trabajo de los Bernoulli fue bien conocido en Italia.

JEAN I

Jean Bernoulli nació el 27 de julio de 1667 y murió el primero de enero de 1748; fue el hermano más joven de Jacques y el décimo hijo en la familia. A veces se encuentran referencias a él como Johann o John, por la traducción de su nombre al alemán y al inglés. Estudió medicina y se doctoró en Basilea en 1694, con una tesis sobre la contracción de los músculos. También quedó fascinado por el cálculo, lo dominó rápidamente y lo aplicó a muchos problemas de geometría, ecuaciones diferenciales y mecánica. En 1695, se le designó como profesor de matemáticas y física en Groningen, Holanda y, al morir su hermano Jacques, lo sucedió como profesor en Basilea.

De 1691 a 1692 escribió dos pequeños libros de texto sobre el cálculo diferencial e integral, que no fueron publicados; sino hasta mucho tiempo después. El de cálculo diferencial fue impreso hasta 1924 y el de cálculo integral apareció cincuenta años después de que fue escrito, en su *Opera omnia* de 1742.

En 1696, Jean Bernoulli, como desafío para los matemáticos de Europa, propuso el problema de determinar qué curva proporcionaría el tiempo más breve posible de descenso. Esta curva se conoce como *braquistócrona* (de la palabra griega *brachistos*, el más corto, y *cronos*, tiempo). El problema fue resuelto por Newton y Leibniz, así como por los hermanos Jacques y Jean Bernoulli, nietos del refugiado de Amberes. La solución de Jean fue la más elegante; algunos autores se refieren a esa maravillosa solución como una obra de arte, de orden muy elevado, para este difícil problema. Además de su interés, el problema de la braquistócrona tiene gran importancia, ya que fue la fuente histórica del *cálculo de variaciones*, una rama poderosa del análisis para el estudio del mundo físico.

Una exposición de la solución de Jean, para este problema, puede encontrarse en el libro *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George F. Simmons, en la que se aprecian la interconexión de varios campos y conceptos del conocimiento, como son: Óptica, la Ley de Refracción de Snell, el Principio del Menor Esfuerzo de Fermat, Mecánica, el Principio de Conservación de la Energía y el Cálculo.

Estando en París en 1692, instruyó a G. F. A. de L´Hospital (1661-1704) en el cálculo de Leibniz y firmó un pacto bajo el cuál, en reciprocidad por un salario regular, enviaría a L´Hospital sus descubrimientos en matemáticas. El resultado es que una de las principales contribuciones de Bernoulli, de 1694, se conoce desde entonces como regla de L´Hospital sobre formas indeterminadas. Bernoulli encontró que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$ tales que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$ y

$$\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$$

existe, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f´(x)}{g´(x)}$$

Esta regla fue incorporada por L´Hospital en el primer libro de texto sobre el cálculo diferencial: *Analyse des infiniment petits*, publicado por él en París en 1696.

Escribió sobre muchos aspectos avanzados de análisis: la isocrona, sólidos de mínima resistencia, la catenaria, la tractriz, trayectorias, curvas cáusticas, problemas isoperimétricos.

Contribuyó a la geometría diferencial a través de su trabajo sobre líneas geodésicas en una superficie.

Se le atribuye también el cálculo exponencial, porque, además de las curvas exponenciales simples $y = a^x$, estudió exponenciales generales como $y = x^x$. Para el área bajo la curva $y = x^x$, de $x = 0$ a $x = 1$, encontró la representación en serie infinita

$$\frac{1}{1^1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+....$$

Para llegar a este resultado escribió $x^x = e^{x\ln x}$, lo desarrolló en la serie exponencial e integró término a término, utilizando integración por partes.

En 1702, a través de ecuaciones diferenciales, descubrió la relación

$$\arctan(z) = \frac{1}{i}\ln\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

con lo que apreció relaciones entre funciones trigonométricas inversas y logaritmos imaginarios.

Fueron hijos de él: Nicolasus III (1695-1726), Daniel I (1700-1782) y Jean II (1710-1790). Daniel y Nicolaus fueron también matemáticos muy capacitados e influyeron en Leonard Euler (1707-1783) para que descubriera su vocación.

DANIEL I

Daniel Bernoulli nació el 8 de febrero de 1700 y murió el 17 de marzo de 1782; hijo de Jean, estudió medicina como su padre y se doctoró con una tesis sobre la acción de los pulmones. También, debido a su talento, se hizo profesor de matemáticas en San Petersburgo. En 1733 regresó a Basilea y fue sucesivamente profesor de botánica, anatomía y física. Obtuvo 10 premios de la Academia Francesa, incluyendo uno que hizo que su padre se enfureciera, ya que éste aspiraba a dicho premio. Publicó muchas obras de física, probabilidad, cálculo y ecuaciones diferenciales. En su libro *Hydrodynamica*, analizó la mecánica de fluidos y produjo el primer tratado sobre la teoría cinética de los gases. Se le considera como el primer fisicomatemático.

El interés de Daniel en el cálculo de probabilidades, aplicado a los juegos de azar, lo llevó a la discusión de la *fortune morale* y la *fortune physique*, valores físicos y mentales que consideraba relacionados entre sí, de tal manera que un cambio en la cantidad de “fortuna mental” influye proporcionalmente a la razón en que se encuentra, respecto a la fortuna física, en el total de la fortuna del posesor. Así, al apostar con un riesgo igual al del oponente, uno se arriesga a perder más que a ganar, pues una pérdida dada será mayor respecto a la fortuna reducida que lo que sería la misma ganancia física respecto a una fortuna total aumentada.

Dedujo una fórmula del supuesto de que la importancia de un incremento es inversamente proporcional a la cantidad de la fortuna a la que se añada. Así, si x es la fortuna “física” e y la fortuna “moral”,

$$dy = k\,\frac{dx}{x}$$

Esto es

$$y = k\log\frac{x}{a}$$

donde k y a son constantes.

El propio Bernoulli y Pierre Simon de Laplace (1749-1827) construyeron una importante teoría sobre la base de esta fórmula de Bernoulli.

En dinámica de fluidos se encuentran aportaciones de Daniel con frecuencia. Así podemos hacer referencia al Teorema de Bernoulli para movimiento estacionario, problemas de flujo irrotacional, superficies de Bernoulli, etcétera.

OTROS MIEMBROS DE LA FAMILIA

Entre los Bernoulli que no siempre se mencionan se encuentran tres hijos de Jean II:

Jean III (1744-1807), quien fue profesor de matemáticas en la Academia de Berlín a la edad de 19 años; Daniel II (1751-1834) y Jacques II (1759-1789).

Otros miembros destacados de la familia fueron Chistoph (1782-1863), hijo de Daniel II y Johann Gustav (1811-1863), hijo de Chistoph.

CARTA GENEALÓGICA

En la carta genealógica siguiente, se aprecia que la participación de los miembros más destacados de la familia abarca un período de aproximadamente doscientos años.

```
                  Nicolaus
                 (1623-1708)
_________________/\________________________
 Jacques I      Nicolaus I          Jean I
(1654-1705)    (1662-1716)        (1667-1748)
               ____/\___          ____/\_____________________________________
                Nicolaus II       Nicolaus III    Daniel I            Jean II
               (1687-1759)        (1695-1726)   (1700-1782)         (1710-1790)
                                        ______________________________ /\____
                                        Jean III       Daniel II     Jacques II
                                       (1744-1807)   (1751-1834)    (1759-1789)
                                                         /\
                                                      Chistoph
                                                    (1782-1863)
                                                         /\
                                                    Johann Gustav
                                                    (1811-1863)
```

REFERENCIAS

[1] Batchelor G. K. (1967). *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
[2] Boyer Carl B. (1968). *A History of Mathematics*. John Wiley and Sons.
[3] Newman James R. (1969). *Sigma, el mundo de las matemáticas*. Grijalbo.
[4] Simmons George F. (1977). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.

SITIOS EN RED

[5] O'Connor J. J. and Robertson E. F. (Sept. 1998). *Jacob Bernoulli*. http://www-history.mcs.st-andrew.ac.vk/history/References/Bernoulli_Jacob.html

[6] O'Connor J. J. and Robertson E. F. (Jan. 1997). *Brachistochrone*. http://www-history.mcs.st-andrew.ac.vk/history/HistTopics/Brachistochrone.html