

ÁLGEBRA INDIA

Francisco Armando Carrillo Navarro

INTRODUCCIÓN

El estudiar la aportación matemática que hicieron los hindúes de la antigüedad, uno sospecha que se ha perdido información muy valiosa, ya que se conoce muy poco de lo que produjeron debido en parte al material que usaban para sus escritos, al parecer una especie de papel poco durable; la sospecha de esta pérdida se debe a que sus aportaciones matemáticas se encuentran registradas en períodos muy aislados, es decir, hay decenas y hasta centenas de años de un escrito a otro, de lo que resulta una falta de continuidad en su estudio. Sin embargo, han sobrevivido algunos documentos que nos dan una idea del avance que se tenía en la India en aquellos tiempos, es sobre estos escasos documentos de que comentaremos aquí, principalmente sobre los que tratan del álgebra. Por otro lado, la obra matemática en India muestra, en algunos aspectos, una falta de motivación y justificación en el sentido de que al realizar sus escritos nunca se preocuparon realmente por el rigor matemático, ni daban una ilustración del por qué se creó o se llegó a tal o cual resultado.

Las matemáticas aquí descritas se desarrollaron en el valle del Indo; las primeras civilizaciones de la India fueron identificadas en 1921 en Harappa, en el Punjab, y un año después en Mohenjo-daro, cerca del río Indo, en el Sindh. Ambos lugares se encuentran ahora en Pakistán, pero por sus características e influencia, los descubrimientos hechos en ellos son considerados como parte de la cultura de la India.

LOS PERSONAJES

Existe una buena cantidad de matemáticos hindúes, pero cuatro de ellos son los más sobresalientes y conocidos hasta la fecha; sus nombres son:

ARYABHATA: Cuya obra *Aryabhatiyam* (499 d.C.) incluye problemas sobre series, permutaciones y ecuaciones lineales y cuadráticas.

BRAHMAGUPTA: Su *Brahmasiddhānta* (628 d.C.) contiene una regla satisfactoria para resolver ecuaciones cuadráticas y problemas que incluyen temas tratados por Aryabhata.

MAHAVIRA: Su *Ganita-Sāra Sangraha* (850 d.C.) contiene un largo número de problemas que involucran series, radicales y ecuaciones.

BHASKARA: Su *Bija Ganita* (1150 d.C.) contiene nueve capítulos y extiende su trabajo a través de las ecuaciones cuadráticas.

ÁLGEBRA: ¿LAS OTRAS MATEMÁTICAS?

En la India, alrededor del siglo V d.C. se desarrolló un sistema de matemáticas que permitía hacer cálculos astronómicos de manera sencilla. Al inicio, su aplicación fue limitada a la astronomía ya que sus pioneros fueron astrónomos. Los cálculos astronómicos eran complejos e involucraban muchas variables que representaban cantidades desconocidas. El álgebra es un método de cálculos manuales que resume mucha escritura y por esta razón sustituyó a los cálculos aritméticos convencionales.

En la India antigua las matemáticas convencionales conocidas antes del álgebra se denominaban *Ganitam* y a esta última se le denominó *Bijaganitam*, donde el término *Bija* significa ‘otro’ o ‘en segundo lugar’ y *Ganitam* significa matemáticas. El hecho de que haya sido elegido este término para este sistema de cómputo implica que fue reconocido como sistema paralelo, pero diferente al convencional. Algunos han interpretado el término *Bija* como el germen o semilla, que simboliza el origen o principio. Y se infiere que *Bijaganitam* era la forma original de cálculo. Pero cualquiera que sea el origen del álgebra, lo cierto es que éste se dio en la India, 1500 años atrás. Aryabhata, quien vivió en el siglo V d.C., se refiere a la *Bijaganitam* en su tratado de matemáticas, *Aryabhattiya*. Un matemático y astrónomo indio, Bhaskaracharya, también trató este tema; su tratado, que data de alrededor del siglo XII d.C., lo tituló ‘*Siddhanta-Shiromani*’ del cual una sección se titula precisamente *Bijaganitam*.

Del siglo VIII en adelante, la India fue invadida por los árabes y otras comunidades islámicas como los turcos y los afganos. A lo largo de esas invasiones comienzan las crónicas y críticas como las de Al-biruni, quien estudió la sociedad y la política hindúes, y los sistemas matemáticos indios no escaparon de su atención. Los árabes mejoraron las artes y las ciencias que imperaban en las tierras que invadieron durante su gran *Jihad*. El sistema de matemáticas que observaron en la India fue adaptado por ellos y le dieron el nombre de ‘*Al-Jabr*’ que significa ‘*la unión de las partes sueltas*’, puesto que *Al* significa ‘La’ y *Jabr* significa ‘reunión’.

Entre los siglos X y XIII, los reinos cristianos de Europa hicieron numerosos intentos por reconquistar el lugar de nacimiento de Jesucristo, desplazando al Islam. Esos intentos, llamados cruzadas, fallaron en sus objetivos militares, pero los contactos entre naciones orientales y occidentales dieron como resultado un intercambio masivo de ideas. La técnica del álgebra pudo pasar al oeste rápidamente.

Durante el renacimiento en Europa, que fue seguido por la revolución industrial, el conocimiento recibido desde el oriente tuvo un desarrollo adicional. El álgebra, como la conocemos hoy en día, perdió algunas características que dejaban ver su origen oriental, salvo el hecho de que conservó el nombre de ‘álgebra’, que es una corrupción del término ‘*Al-jabr*’, el cual a su vez había sustituido el nombre original *Bijaganitam*. Aún en la India se usa el término *Bijaganit* para referirse a este tema.

En el año de 1816, el inglés James Taylor tradujo a su idioma el *Lilāvatti* de Bhaskara. Una segunda traducción apareció al año siguiente (1817), realizada por el astrónomo, también inglés, Henry Thomas Colebruke. Así, los trabajos de este astrónomo matemático indio fueron dados a conocer al mundo occidental aproximadamente 700 años después de que él los había incluido en su obra, aunque sus ideas habían alcanzado ya el occidente, a través de los árabes, desde muchos siglos antes.

En las palabras del indologista australiano A.L. Basham, en ‘La maravilla que fue la India’:
“... *el mundo debe la mayoría del reino de las matemáticas a la India, que fueron desarrolladas en el período de Gupta a una etapa más avanzada, no alcanzada por ninguna otra nación de la antigüedad. El éxito de las matemáticas indias era debido principalmente al hecho de que los hindúes tenían una concepción clara del número abstracto, a diferencia de la cantidad numérica de objetos o extensión espacial.*”

Así, los hindúes pudieron llevar sus conceptos matemáticos a un plano abstracto y con la ayuda de una notación numérica simple inventar un álgebra rudimentaria; en cambio, los griegos y los antiguos egipcios, debido a su preocupación por la medida inmediata de los objetos físicos, permanecieron confinados a la medida y a la geometría.

LOS SULVASUTRAS

El conjunto de conocimientos necesarios para erigir los templos y altares se encuentran en los *Sulvasūtras* o reglas de las cuerdas, *Sulva* se refiere a las cuerdas utilizadas para efectuar mediciones y *sutra* al conjunto de reglas. Los *sulvasūtras* son básicamente un tratado de geometría, sin embargo, tienen algo que ver con el álgebra toda vez que éstos se interesaron por el teorema de Pitágoras en la medida en que les era útil para sus necesidades, pero su comprensión de número irracional se encontraba aún en estado embrionario. Es muy probable que haya un lapso de tiempo considerable entre el período de los *Sulvasūtras* y los primeros desarrollos posteriores de la matemática India, influenciada por los conceptos astronómicos, como se mencionó anteriormente, de los pueblos occidentales. En otras palabras, así como los *Sulvasūtras* contienen matemáticas aplicadas esencialmente al terreno religioso, los *Siddhāntas*, que les suceden contienen matemáticas que tienen como principal objeto la astronomía.

LOS SIDDHANTAS

Hacia el siglo IV d. C. aparecen en la literatura sánscrita los *Siddhāntas* o sistemas astronómicos, al parecer como producto del renacimiento iniciado al final del siglo II, bajo la dinastía de los Gupta. Conocemos cinco versiones distintas de los *Siddhāntas* –Paulisha, Surya, Vasisishta, Paitamaha y Romanka– y entre ellas la única que parece estar completa es la del *Surya Siddhanta* o *Sistema del Sol*, escrito aproximadamente en el año 400 d.C. El contenido astronómico de los *Siddhāntas* es de origen netamente griego, pero aparecen en ellos muchas antiguas creencias hindúes. Además, las matemáticas contenidas en los *Siddhāntas*, que pertenecen a la trigonometría esencialmente, tienen un origen desconocido aún y sigue siendo un punto controvertido si hubo influencias externas sobre las

matemáticas indias o si, por el contrario, su origen es verdaderamente hindú, sin influencias importantes de las matemáticas griegas, babilónicas y chinas.

A partir del siglo VI, podemos conocer los nombres de los matemáticos indios que contribuyeron al avance de la trigonometría, el álgebra y la teoría de las ecuaciones con los trabajos que han llegado hasta nosotros, mientras que a sus predecesores sólo los conocemos por un pequeño número de fragmentos muy poco elaborados.

Al principio de este escrito se mencionan los nombres de los cuatro matemáticos hindúes más importantes de la antigüedad, de los cuales sólo ahondaremos en los que trabajaron principalmente en álgebra. El primero que se mencionó fue **Aryabhata**, el más antiguo y probablemente el más importante, sólo que sus estudios fueron esencialmente en matemáticas aplicadas a la astronomía, donde hizo uso del álgebra para hacer los cálculos para mediciones necesarias en esta última disciplina. Su obra *Aryabhatiya* del siglo VI se puede resumir de la siguiente forma: reglas para hallar las raíces cuadradas y las raíces cúbicas; reglas de medición (bastantes de ellas falsas); elementos de geometría expresados en fórmulas; reglas arbitrarias en lo que respecta a progresiones aritméticas, en términos de la suma, del número de términos y de la diferencia entre los términos; problemas de interés compuesto en función de progresiones geométricas; identidades algebraicas sencillas.

BRAHMAGUPTA

Brahmagupta fue el más grande los matemáticos hindúes del siglo VII; vivió en Ujjain, centro de astronomía situado en la India central. Hacia el año 628, escribió una obra de astronomía titulada *Brahmasiddhānta* o *Brahmasphutasiddhanta* o *Sistema revisado de Brama*, que comprende 21 capítulos, algunos de los cuales tratan esencialmente de matemáticas.

Entre su contribuciones más valiosas ha de mencionarse su generalización de la fórmula de Herón para el área de un cuadrilátero, soluciones generales de las ecuaciones cuadráticas que incluyen raíces negativas y positivas, la aritmética de los números negativos y del cero, y la solución general de una ecuación diofantina lineal $ax+by=c$ en la que a, b y c son enteros y se buscan todas las soluciones enteras. La generalización de la fórmula de Herón expresada en la forma

$$A = \sqrt{(-a)(-b)(-c)(-d)}$$

en la que a, b, c, d son los lados y s es el semiperímetro, sólo es válida para un cuadrilátero cíclico, pero parece que los estudiosos posteriores a Brahmagupta se dieron cuenta de esta limitación. En la geometría algebraica griega se encuentra el equivalente de ciertas relaciones numéricas que incluyen número negativos como $(+b) \times (-b)$, $(-b) \times (-b)$, etc., pero la importante contribución de los hindúes consistió en convertir estas reglas geométricas en reglas numéricas en las que la cantidad negativa es considerada como un número y en las que el cero también es un número. Sin embargo, Brahmagupta encuentra dificultades en su aritmética, que no logra dilucidar claramente cuando afirma:

*positivo dividido por positivo, o negativo dividido por negativo, es positivo.
Cero dividido por cero no es nada. Positivo dividido por negativo es negativo.
Negativo dividido por positivo es negativo. Positivo o negativo dividido por
cero es una fracción en relación con el denominador.*

El álgebra de Brahmagupta está escrita en una forma sincopada; la suma fue usualmente indicada por yuxtaposición. La resta fue indicada poniendo un punto encima del sustraendo, la multiplicación escribiendo «bha» (la primera sílaba de la palabra *bhavita* ‘el producto’) y después los factores, la división escribiendo el divisor debajo del dividendo, la raíz cuadrada escribiendo «ka» (de la palabra *karana*, ‘irracional’) antes de la cantidad. Brahmagupta indicaba la incógnita por «yā» (de *yāvattāvat*, ‘tanto como’). Enteros conocidos fueron prefijados por «rū» (de *rūpa*, ‘el número absoluto’). Incógnitas adicionales fueron indicadas por las sílabas iniciales de palabras de diferentes colores. Así una segunda incógnita podía ser denotada por «kā» (de *kalaka*, ‘negro’), de esta manera, $8xy + \sqrt{10} - 7$ podía aparecer como *yā kā 8 bha ka 10 rū 7*. De igual manera, $3xy + 2x + 2y + \sqrt{13} - 8$, en hindú antiguo, sería *yā kā 3 bha yā 2 bha kā 2 bha ka 13 rū 8*.

En el análisis indeterminado, Brahmagupta fue probablemente el primero en hallar una solución general a la ecuación diofantina $ax + by = c$, en la que a , b y c son enteros. Se obtiene una solución entera de esta ecuación si el máximo común divisor de a y b divide también a c . Brahmagupta sabía que cuando a y b son primos entre sí, todas las soluciones vienen dadas por $x = r - mb$; $y = s - ma$ en las que m es cualquier entero. Además, halló todas las soluciones enteras de la ecuación diofantina, mientras que Diofanto frecuentemente se conformaba con hallar una solución. Por último, estudió también la ecuación de Pell, $y^2 = ax^2 + 1$ en la que a es un entero de raíz cuadrada irracional, cuya teoría completa no quedaría terminada hasta los estudios de Lagrange en el siglo XVIII.

BHASKARA

Después de Brahmagupta, la India conoció algunos matemáticos como Mahāvira (siglo IX), que escribió principalmente sobre matemáticas elementales, pero el más famoso de todos ellos fue un matemático de talento, Bhāskara, cuyas actividades matemáticas se sitúan en el siglo XII. Último de la serie de matemáticos hindúes del período medieval, Bhāskara superó con sus obras las contribuciones matemáticas anteriores y llenó algunas lagunas que en ellas se encontraban, en particular en las contribuciones de Brahmagupta. En su tratado principal, *Lilāvatti* –nombre de su hija que, según la leyenda, perdió la ocasión de casarse a causa de una predicción astrológica de su padre– compiló algunos problemas de Brahmagupta así como de algunos otros, añadiendo un contenido original y personal. En otra obra, titulada *Bijaganita*, se encuentra, en particular, el primer enunciado de que un número diferente de cero dividido por cero da un cociente infinito, pero algo más tarde Bhāskara admite que $\frac{a}{0} \cdot 0 = a$, indicando mediante esta afirmación que su comprensión de la aritmética del cero no era del todo perfecta.

Encontramos, tratados en sus dos obras, los temas matemáticos preferidos por los hindúes:

las ecuaciones lineales y cuadráticas, determinadas o indeterminadas; las medidas; las progresiones aritméticas y geométricas; los números irracionales; las ternas pitagóricas y numerosos problemas de naturaleza geométrica y algebraica. El análisis indeterminado ocupa un lugar importante en los problemas tratado por Bhāskara: en concreto, halló soluciones particulares de la ecuación $x^2 = 1 + py^2$, estudiada por Brahmagupta, para $p = 8, 11, 32, 61$ y 67 . Por ejemplo, cuando $x^2 = 1 + 61y^2$ encuentra la solución $x = 1,776,319,049$ e $y = 22,615,390$, resultados que exigen largos cálculos que serían fáciles de realizar con la ayuda de una calculadora electrónica.

En general, Bhāskara no distingue entre resultados exactos y estimados y ello nos impide pronunciarnos con objetividad sobre la exactitud de las matemáticas indias. Por otra parte, Bhāskara acusó enérgicamente a sus predecesores de haber utilizado las fórmulas falsas de Brahmagupta para el área y las diagonales de un cuadrilátero cualquiera. Sin embargo, no se dio cuenta de que dichas fórmulas eran exactas para todos los cuadriláteros cíclicos.

RESUMEN

Las matemáticas indias, cultivadas sobre todo por los sacerdotes, se caracterizan por el desarrollo del cálculo numérico y algebraico, una trigonometría basada en la función *seno*, una alternancia de enunciados verdaderos y falsos en lo relativo al álgebra y, sobre todo, a la geometría, una geometría poco desarrollada, salvo quizá en el estudio de los cuadriláteros y sus propiedades, un análisis indeterminado que supera netamente al de Diofanto y al de Hipatía en dificultades y en generalidades, y un sistema de numeración – notación brāhmi–, fuente de la que surgirá, con las contribuciones de los árabes, nuestro sistema decimal.

REFERENCIAS

- [1] Boyer, Carl B. (1968). *Historia de las Matemáticas*, Alianza Editorial.
- [2] Collete, Jean-Paul (1986). *Historia de las Matemáticas, Vol. I*. Siglo XXI editores.
- [3] Eves, Howard (1983). *Great Moments in Mathematics, Before 1650*. The mathematical Association of America.

SITIOS EN RED

- [4] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Indian_mathematics.html.
- [5] <http://india.coolatlanta.com/GreatPages/Sudnneer/maths.html>.