

## PAVEL SERGUEIEVICH ALEKSANDROV

*José Luis Díaz Gómez*

Pavel Sergueievich Aleksandrov nació el 25 de abril de 1896 en Bogorodsk, Rusia y murió el 16 de noviembre de 1982. Se graduó en la Universidad de Moscú en 1917, se unió a la facultad de matemáticas de esta universidad en 1921 y en 1929 fue nombrado su director. Planeo, en colaboración con el matemático suizo H. Hopf, la escritura de un tratado definitivo de topología de tres volúmenes. De este tratado sólo se publicó el primer volumen, llamado Topología I (1935) ([7]).

Aleksandrov influyó y alentó el desarrollo de la escuela de topología de Moscú. Inicialmente su trabajo se desarrolló en la topología de la teoría de conjuntos y posteriormente se desarrolló en el campo de la topología algebraica<sup>1</sup>.

Aleksandrov introdujo muchos de los conceptos básicos de topología, como la noción de que un espacio topológico arbitrariamente general puede aproximarse con un grado arbitrario de exactitud por medio de figuras geométricas simples como los poliedros. Pero, antes de continuar destacando su influencia en la matemática, hagamos un recorrido sobre su vida desde el inicio.

El padre de Pavel Sergueievich Aleksandrov, Serguei Aleksandrovich Aleksandrov, fue un médico graduado en la Universidad de Moscú, que había decidido no seguir una carrera académica, pero que en cambio eligió usar sus habilidades para ayudar a las personas, y para esto trabajó como médico general en Yaroslavskii. Posteriormente trabajó en el hospital de Bogorodskii con una mejor posición, que es donde estaba cuando nació Pavel Sergueievich ([1], [2],[6]).

Cuando Pavel Sergueievich tenía un año, su padre se mudó al hospital Estatal de Smolensk, donde adquirió una gran reputación como un buen cirujano, por lo que la familia cambió su residencia por un cierto tiempo a Smolensk. La ciudad de Smolensk está a la orilla del Dnieper, 420 km al oeste de Moscú. La educación inicial de Pavel Sergueievich la recibió de su madre Tsezariya Akimovna Aleksandrova, quien aplicó todo su talento en la educación de sus hijos. Pavel aprendió de ella el idioma francés y el alemán. La casa de la familia era muy alegre y siempre estaba llena con música y sus hermanos y hermanas tenían un gran talento en este campo ([1], [2],[6]).

La educación inicial que su madre le dio le permitió aventajar siempre en la escuela primaria a la que asistió en Smolensk. Su maestro de matemáticas, Aleksandr Romanovich

---

<sup>1</sup> La topología algebraica es una parte de la topología que tiene por objeto descubrir las propiedades de los espacios topológicos por medio del álgebra y hallar las condiciones necesarias para que dos espacios topológicos sean homeomorfos, o sea equivalentes.

Eiges, comprendió pronto que su alumno tenía un notable talento para las matemáticas ([3] y [4],[6]):

*... en la escuela primaria estudió mecánica celeste y análisis matemático. Pero su interés estaba dirigido principalmente hacia los problemas fundamentales de la matemática: los fundamentos de la geometría y la geometría no-euclidiana. Eiges tenía gran aprecio por su alumno y ejerció una influencia firme en su elección de una carrera en la matemática.*

En 1913 Aleksandrov se graduó de la escuela primaria siendo el primero de su escuela y ganó una medalla de oro. Ciertamente en este momento ya había decidido estudiar una carrera en matemáticas, pero no había puesto sus ojos tan alto como en llegar ser un maestro universitario, sino más bien, estaba pensando en hacerse maestro de matemáticas de la escuela preparatoria. Eiges era el modelo al que aspiraba en esta fase, pero Eiges había hecho algo más que enseñarle matemáticas a Aleksandrov, él también había influenciado su gusto por la literatura y las artes ([6]).

Aleksandrov ingresó a la Universidad de Moscú en 1913 e inmediatamente le ayudó Stepanov. Stepanov trabajaba en la Universidad de Moscú y era siete años, pero su casa también estaba en Smolensk y visitaba con frecuencia la casa de Aleksandrov. Stepanov fue una influencia importante para Aleksandrov en este período y le sugirió a Aleksandrov que se uniera al seminario de Egorov, incluso en el primer año de sus estudios en Moscú. En su segundo año de estudios, Aleksandrov entró en contacto con Luzin, quien había regresado a Moscú. Aleksandrov escribió ([3], [4], [6]):

*A finalizar la conferencia de Luzin, me dirigí hacia él y le solicité un consejo sobre cual es la mejor forma de continuar mis estudios de matemáticas, e impactó a la mayoría la amabilidad de Luzin hacia el hombre que se dirigió a él - un estudiante de 18 años de edad... después me convertí en un estudiante de Luzin, durante su período más creativo... ver a Luzin por esos años era ver una representación de lo que se llama una relación inspirada en la ciencia. No sólo aprendí matemáticas de él, sino que también recibí una lección de lo que hace a un verdadero estudioso y lo que un profesor universitario puede y debe ser.*

Aleksandrov demostró su primer resultado importante en 1915, a saber, que todo conjunto no numerable de Borel contiene un subconjunto perfecto. No sólo era un resultado muy importante para la teoría de conjuntos, sino también los métodos que Aleksandrov usó y qué resultaron ser de los más útiles en la teoría de conjuntos. Después de los grandes éxitos de Aleksandrov, Luzin hizo lo que muchos supervisores deberían hacer, comprendió que tenía en Aleksandrov a uno de los más grandes talentos matemáticos, así que pensó que merecía la pena pedirle que tratara de resolver el mayor problema abierto en la teoría de conjuntos, ciertamente la hipótesis del continuo.

*La hipótesis del Continuo establece que no hay ningún conjunto cuya cardinalidad esté entre la de los números Naturales y la de los números Reales.*

Cuando Aleksandrov no pudo resolver la hipótesis del continuo<sup>2</sup>, pensó que no estaba capacitado para una carrera matemática y se fue a Novgorod-Severskii, donde se hizo productor de teatro. Posteriormente se fue a Chernikov donde, además del trabajo teatral, enseñó ruso e idiomas extranjeros, e hizo amistad con poetas, artistas y músicos. Después de un período corto en la cárcel, en 1919 durante la revolución rusa, Aleksandrov regresó a Moscú en 1920. Luzin y Egorov habían formado un grupo de investigación impresionante en la Universidad de Moscú al que los estudiantes llamaron “Luzitania” y ellos, junto con Privalov y Stepanov, recibieron muy bien a Aleksandrov en su regreso ([6]).

Sin embargo, el regreso de Aleksandrov a Moscú no fue inmediato, ya que pasó de 1920-21 en su casa en Smolensk, donde enseñó en la Universidad. Durante este tiempo trabajó en su investigación, yendo a Moscú por lo menos un mes para estar en contacto con los matemáticos y prepararse para sus exámenes. Alrededor de este tiempo Aleksandrov se hizo amigo de Urysohn, quien era un miembro de 'Luzitania', y la amistad pronto desarrolló una mayor colaboración matemática.

Después de presentar sus exámenes en 1921, Aleksandrov fue designado como conferencista en la universidad de Moscú y disertó en una variedad de temas incluyendo funciones de una variable real, topología y teoría de Galois. En julio 1922 Aleksandrov y Urysohn fueron a pasar el verano a Bolshev, cerca de Moscú, donde empezaron a estudiar los conceptos de la topología. Del libro de Topología tomamos la siguiente definición [5]:

*“En un conjunto  $R$  de elementos cualesquiera se dice que se define una correspondencia topológica, si a cada subconjunto  $M$  de  $R$ , se le asocia un subconjunto  $\bar{M}$  de  $R$ . Al conjunto  $R$  y la correspondencia topológica en él definida se le llama espacio topológico general. Lo designaremos, siempre que no haya lugar y confusión con  $R$ ...”*

En 1914 Hausdorff publicó un libro llamado Grundzüge der Mengenlehre, en el que, construyendo sobre el trabajo de Fréchet y otros, había creado una teoría topológica y de los espacios métricos. Aleksandrov y Urysohn impulsaron esta teoría hacia los espacios compactos contables, produciendo resultados de importancia fundamental. La noción de un espacio compacto y un espacio localmente compacto se debe a ellos. Del libro Topología tomamos las siguientes definiciones [5]:

**Definición:** *Un espacio topológico se llama, según Fréchet, compacto si todo subconjunto infinito de él posee, al menos, un punto de acumulación.*

**Teorema:** *Un espacio métrico es compacto si y sólo si, toda sucesión de puntos del espacio contiene una sucesión parcial convergente.*

---

<sup>2</sup> Lo que no es sorprendente, ya que no puede demostrarse ni refutarse, como lo mostró Cohen en los años sesenta. Se demostró que es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos, en el mismo sentido en que el Quinto Postulado de Euclides es independiente de los otros axiomas de la geometría euclidiana.

*Definición:* Un espacio topológico se dice bicomacto, si toda cubierta de él contiene una cubierta finita.

En los veranos de 1923 y 1924 Aleksandrov y Urysohn visitaron Göttingen e impresionaron a Emmy Noether, Courant y Hilbert con sus resultados. Los matemáticos de Göttingen estaban particularmente impresionados con sus resultados sobre cuándo un espacio topológico es metrizable.

*“Metrizable:* Un espacio topológico  $E$  es metrizable si existe una distancia en  $E$  tal que la topología asociada a esta distancia no sea mas que la topología dada.”

En el verano de 1924 visitaron también a Hausdorff en Bonn y éste quedó fascinado al escuchar la dirección que los dos estaban tomando en la topología. Sin embargo mientras visitaban a Hausdorff en Bonn ([3], [4], [6]):

*Todos los días Aleksandrov y Urysohn nadaron en el Rhin - una acción que estaba lejos de ser segura y provocó el disgusto de Hausdorff.*

Después Aleksandrov y Urysohn visitaron a Brouwer en Holanda y París en agosto de 1924, antes de tomar unas vacaciones en el pueblo de pescadores de Bourg de Batz en Bretaña. Por supuesto que los matemáticos continuaron trabajando mucho y hacían matemáticas mientras estaban de vacaciones. En la mañana del 17 agosto Urysohn empezó a escribir un nuevo artículo, pero trágicamente ése mismo día se ahogó mientras nadaba en el Atlántico. Aleksandrov determinó que ninguna de las ideas de su gran amigo y colaborador deberían perderse, así que pasó gran parte de los años de 1925 y 1926 en Holanda trabajando con Brouwer en la escritura del artículo de Urysohn para su publicación.

La atmósfera en Göttingen había demostrado ser muy útil para Aleksandrov, particularmente después de la muerte de Urysohn, y pasó allí todos los veranos desde 1925 hasta el año de 1932. Allí se hizo muy amigo de Hopf y entre los dos mantuvieron un seminario de Topología en Göttingen. Claro que Aleksandrov también enseñó en la Universidad de Moscú y desde 1924 organizó allí un seminario de topología. En Göttingen, Aleksandrov dictó conferencias y participó en el seminario de Emmy Noether. De hecho Aleksandrov siempre incluyó a Emmy Noether y Hilbert entre sus maestros, así como a Brouwer en Amsterdam y a Luzin y Egorov en Moscú. En 1926 trabajó con Brouwer en Holanda en la preparación del artículo de Urysohn para su publicación ([6]).

Desde 1926, Aleksandrov y Hopf se hicieron grandes amigos y trabajaron juntos. Pasaron algún tiempo en 1926 en el sur de Francia con Neugebauer. Posteriormente, Aleksandrov y Hopf pasaron un año sabático en Princeton, en los Estados Unidos, de 1927 a 1928. Con Aleksandrov y Hopf en Princeton y con la colaboración de Lefschetz, Veblen y Alexander, este fue un año muy importante para el desarrollo de la topología. Durante su año en Princeton, Aleksandrov y Hopf planearon la escritura conjunta de tres volúmenes de Topología, pero el primer volumen apareció hasta 1935. Este fue el único de los tres volúmenes que apareció ya que la Segunda Guerra Mundial impidió la colaboración para la escritura de los dos volúmenes restantes. De hecho, antes de que el trabajo conjunto con

Hopf apareciera impreso, Aleksandrov había empezado otra amistad y colaboración importante.

En 1929 inició la amistad con Kolmogorov y ellos ([3], [4], [6]):

*... viajaron mucho a lo largo del Volga, el Dnieper, y otros ríos, por el Caucaso, Crimea, y el sur de Francia.*

El año 1929 marca no sólo el principio de la amistad con Kolmogorov, sino también la designación de Aleksandrov como Profesor de Matemática en la Universidad de Moscú. En 1935 Aleksandrov fue a Yalta con Kolmogorov, y cerca de Crimea terminó su libro de Topología, siendo publicado en este mismo año. El período "Komarovski" también empezó por ese año ([3], [4], [6]):

*Durante los últimos cuarenta años, muchos de los eventos en la historia de la matemática de la Universidad de Moscú se han unido con Komarovka, un pueblo pequeño fuera de Moscú. Aquí está la casa que desde 1935 poseían Aleksandrov y Kolmogorov. Muchos matemáticos famosos extranjeros también visitaron Komarovka - Hadamard, Fréchet, Banach, Hopf, Kuratowski, y otros.*

En los años 1938-1939 un grupo de varios matemáticos de la Universidad de Moscú, entre ellos Aleksandrov, se unieron al Instituto de Matemáticas Steklov de la Academia de Ciencias Rusa pero al mismo tiempo conservaron su posición en la Universidad.

Aleksandrov escribió aproximadamente 300 trabajos científicos en su larga carrera. Ya en 1924 introdujo el concepto de una cubierta localmente finita que usó como una base para su criterio para la métrica de espacios topológicos.

**"Cubierta:** Una familia de conjuntos de un espacio topológico no vacío se llama cubierta de un conjunto de puntos  $A$  de  $R$ , si todo punto de  $A$  pertenece al menos a un conjunto de la familia criterio para la métrica de espacios topológicos."

Dió los fundamentos de la teoría de la homología en una serie de artículos fundamentales entre 1925 y 1929. El trabajo de Aleksandrov en homología<sup>3</sup> avanzó hacia su teoría homológica de la dimensión alrededor de 1928-30.

Aleksandrov fue el primero en usar la frase "kernel de un homomorfismo" y alrededor de 1940-41 descubrió los ingredientes de una sucesión exacta.

**"Kernel:** Sea  $f$  un homomorfismo de un grupo  $G$  en un grupo  $H$ . La imagen recíproca de un elemento neutro de  $H$  bajo  $f$ , es un grupo distinguido de  $G$ , llamado kernel de  $f$  e indicado con la notación,  $Ker(f)$ ."

---

<sup>3</sup> La homología es una manera de vincular grupos abelianos (u objetos algebraicos más detallados) a un espacio del topológico para obtener invariantes algebraicos.

*“Sucesión exacta: Sea  $A$  un anillo unitario. Una sucesión exacta de  $A$ -módulos es la dada por una familia  $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $A$ -módulos, y para todo entero racional  $n$ , por una aplicación lineal  $f_n$  de  $E_n$  en  $E_{n+1}$ , siendo igual la imagen de  $f_n$  al núcleo de  $f_{n+1}$ :  $\text{Im}(f_n) = \text{Ker}(f_{n+1})$ .”*

Trabajó en la teoría de mapeos continuos de espacios topológicos. En 1954 organizó un seminario sobre este último tema dirigido a estudiantes de primer año en la Universidad de Moscú y aquí mostró uno de los aspectos de su carrera que fue de gran importancia para él, a saber, la educación de los estudiantes. Esto se describe en ([3], [4], [6]):

*Aleksandrov consagró literalmente toda su fuerza a la enseñanza de estos estudiantes y a la de aquellos que vinieron detrás de ellos. Su influencia sobre los jóvenes que estudiaban topología con él, no sólo fue en la matemática,...*

Se dieron muchos honores a Aleksandrov por su excelente contribución a la matemática. Fue presidente de la Sociedad Matemática de Moscú de 1932 a 64, vicepresidente del Congreso Internacional de Matemáticos de 1958 a 62, un miembro correspondiente de la Academia Soviética de Ciencias desde 1929 y un miembro de tiempo completo desde 1953. Muchas sociedades eligieron a Aleksandrov como miembro, entre ellas la Academia de Ciencias de Göttingen, la Academia Austriaca de Ciencias, la Academia Leopoldina en Halle, la Academia de Ciencias de Polonia, la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos, la Sociedad Matemática de Londres, la Sociedad Filosófica Americana, y la Sociedad Matemática Holandesa ([6]).

Editó varias revistas matemáticas, en particular la famosa revista Soviética Uspekhi Matematicheskikh Nauk, y recibió muchos premios soviéticos, incluso el premio Stalin en 1943 y cinco Órdenes de Lenin.

Hoy el Departamento de Topología General y Geometría de la Universidad Estatal de Moscú es el centro líder de investigación en Rusia en topología y teoría de conjuntos. Después de la muerte de Aleksandrov en noviembre de 1982, sus colegas del Departamento Superior de Topología y Geometría en la que fuera director, enviaron una solicitud al rector de la Universidad de Moscú, A. Logunov, proponiendo que uno de los estudiantes formados por Aleksandrov fuera el director del Departamento, para conservar la escuela científica de Aleksandrov. El 28 de diciembre de 1982 el rector emitió una circular creando el Departamento de Topología General y Geometría. Siendo electo Vitaly Vitalievich Fedorchuk como director del Departamento ([6]).

También en memoria de las contribuciones de Aleksandrov a la topología en la Universidad de Moscú y su trabajo con la Sociedad Matemática de Moscú, hay un simposio anual de topología de Aleksandrov cada mes de mayo.

## REFERENCIAS

- [1] Dictionary of Scientific Biography. *Pavel Sergeevich Aleksandrov* (New York 1970-1990).
- [2] *Enciclopedia Britannica. Pavel Sergeevich Aleksandrov.*
- [3] A. V. Arkhangel'skii, A. N. Kolmogorov, A. A. Malcev and O. A. Oleinik, *Pavel Sergeevich Aleksandrov : on his 80th birthday*, Russian Mathematical Surveys **31** (5) (1976), 1-13.
- [4] A. V. Arkhangel'skii, A. N. Kolmogorov, A. A. Malcev and O. A. Oleinik, *Pavel Sergeevich Aleksandrov : on his 80th birthday* (Russian), Uspekhi Mat. Nauk **31** (5) (1976), 3-15.
- [5] Alexandroff, Pavel, y Hopf, Heinz. *Topología de conjuntos*. Versión castellana del original alemán por Oscar Valdivia Gutiérrez, C. I. E. A. I. P. N., 1965.

## SITIOS EN LA RED

- [6] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. *Pavel Sergeevich Aleksandrov*.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Aleksandrov.html>
- [7] *Aleksandrov, Pavel Sergeevich*  
<http://www.xrefer.com/entry/170311>