LA DAMA DEL ÁLGEBRA

Francisco Javier Tapia Moreno

Las mujeres han tenido, a lo largo de la historia, muchas y muy serias dificultades para introducirse en el mundo de la ciencia, y el de las matemáticas no ha sido la excepción. Mujeres tales como Hipatía, María Gaetana Agnesi, Sophie Germain y Emmy Noether, lucharon por sus ideales hasta alcanzar sus metas y propósitos, obteniendo al fin plazas para distintas universidades, en las cuales hicieron grandes descubrimientos, muchos de ellos muy importantes. En las siguientes secciones, conoceremos un poco de la vida de Emmy Amalie Noether y de sus relevantes aportaciones a las matemáticas y la física.

SU FORMACIÓN

Emmy Amalie Noether nació el 23 de marzo de 1882 en Erlangen, Alemania, donde siguió la escuela elemental de 1889 a 1897. En 1900, en su ciudad natal, obtuvo un certificado como maestra de inglés y francés; sin embargo, no era ese su destino, pues realizó grandes contribuciones al mundo de las Matemáticas y de la Física. Hizo frente a muchos problemas durante el trayecto de su vida, ya que estaba empeñada en lograr una educación que la mayoría de las mujeres no conseguían debido a que, en Alemania y a inicios del siglo XX, las mujeres no podían matricularse en las universidades de manera oficial y se tenía que solicitar autorización a cada profesor para asistir a su asignatura.

Emmy luchó para poder obtener el permiso y, así, logró asistir a clases en las universidades de Erlangen, de 1900 a 1902 y de Göttingen, en 1903 y 1904. En Göttingen, asistió a cátedras de matemáticos tan importantes como David Hilbert (1862-1943), Felix Klein (1849-1925) y Hermann Minkowski (1864-1909). En 1904 obtuvo la aprobación para matricularse y tres años después, el viernes 13 de diciembre de 1907, obtuvo el doctorado con la tesis "*Los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias*" bajo la dirección de Paul Gordan.

Al doctorarse, Emmy emprendió una nueva batalla, para poder dar clases en las universidades; tuvo que hacerlo bajo el nombre de su padre, distinguido matemático y profesor en Erlangen, o de su amigo, el matemático David Hilbert (a quien se le atribuye la deducción de las ecuaciones de campo de la teoría de la relatividad, independientemente de Albert Einstein) quien, conjuntamente con Félix Klein, mantuvo una dura pugna con las autoridades académicas para que le concedieran a Emmy una plaza.

SU TRABAJO

La fama de Emmy creció cuando aparecieron sus publicaciones, las que tuvieron importante influencia en el desarrollo del álgebra moderna y la teoría de la relatividad. De entre sus contribuciones, el concepto más conocido es el de anillos ideales, los cuales son conocidos como *anillos noetherianos*. Para presentar la idea de anillo noetheriano, iniciamos primeramente con un conjunto *A* que cumple con las siguientes condiciones de anillo conmutativo:

a) $a, b \in A$ implica que $a + b \in A$
b) $a + b = b + a$ para $a, b \in A$
c) $(a + b) + c = a + (b + c)$ para $a, b \in A$
d) Existe un elemento $0 \in A$ tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in A$.
e) Dado $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $a + b = 0$
f) $a, b \in A$ implica que $a * b \in A$
g) $a * (b * c) = (a * b) * c$ para $a, b, c \in A$
h) $a * (b + c) = a * b + a * c$ y $(b + c) * a = b * a + c * a$ para $a, b, c \in A$

Un subconjunto no vacío I de un anillo conmutativo A es un ***ideal*** si se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. Si $a,\ b \in I,$ entonces $a - b \in I$
2. Si $a \in I$ y si $r \in A,$ entonces $r * a \in I$

En otras palabras, un ideal es un ***subanillo*** *S* de *A* tal que, para todo $a \in A$ y $s \in S$, se tiene que $as,\ sa \in S$.

Por ejemplo:

1) Los enteros pares forman un ideal *I* en el anillo de los enteros porque, si 2*n* y 2*m* están en *I*, entonces 2*n* – 2*m* = 2(*n* - *m*) está en *I*. Además, si *r* es un entero cualquiera *r*(2*n*) = 2(*rn*). De hecho, todos los subgrupos de la forma $nZ,$ con $n \in Z$ son ideales.

2) $\{2\} \subset Z_4$ es un ideal del semigrupo $(Z_4, \bullet)$ y no es un ideal del anillo Z_2 ya que contiene a 2 y 4 pero no a 2 + 4 = 6.

3) El subconjunto *I* de un anillo A, cuyos elementos son de la forma $ra + na,$ donde $r \in A$ y *n* es un entero, forman un ideal en *A* porque, si $r_1 a + n_1 a$ y $r_2 a + n_2 a$ están en el subconjunto *I*, $r_1 a + n_1 a - (r_2 a + n_2 a) = (r_1 - r_2)a + (n_1 - n_2)a$ es de la forma dada. Además, si $r \in A$ entonces, $r(r_1 a + n_1 a) = r(r_1 + n_1 r)a = r' a + 0 \cdot a$ donde $r' \in A$. Este ideal recibe el nombre de ***ideal principal*** generado por el elemento *a* del anillo *A* y se indica por (*a*). Así, todo ideal de *Z*, el anillo de los enteros, es principal. Con esta

notación, (2) es el ideal del anillo A, cuyos elementos son de la forma $2r+2n,$ donde $r \in A$ y n es un entero.

4) El subconjunto I de un anillo A cuyos elementos son de la forma $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{j=1}^{n} n_j a_j$ donde $r_i \in A$ y los n_j son enteros, es un ideal en el anillo A, generado por el número finito de elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de A y denotado por $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Se dice que $a_1, a_2, \cdots, a_n$ forman una ***base*** del ideal. Por ejemplo (9, 25) es el ideal del anillo A, cuyos elementos son de la forma $9r_1 + 25r_2 + 9n_1 + 25n_2$ donde $r_1, r_2 \in A$ y n_1, n_2 son enteros.

Entre los ideales, también están definidas operaciones. Por ejemplo, si M y N son dos ideales de un anillo conmutativo A; la suma $M + N$ es el conjunto de todas las sumas $m + n$ para $m \in M$ y $n \in N$. Para ilustrar el caso consideremos el anillo Z de enteros, y sea M = (9) y N = (12). Entonces $M + N$ es el conjunto de todos los enteros que pueden expresarse en la forma 9a +12b, con a, b enteros. Un pequeño examen muestra que $M + N$ = (3). $M \cap N$ es el conjunto de todos los enteros que son múltiplos de 9 y de 12, por lo tanto, $M \cap N = (36)$.

El producto AB de dos ideales de un anillo conmutativo R, es el conjunto de todas las sumas finitas

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \text{ con } a_i \in M \text{ y } b_i \in N.$$

Así, MN = (108) y, el cociente de A y B denotado por $A : B$ es el conjunto de todos los elemento c de R tal que $cB = Bc \subseteq A$, así, $M : N = (3)$ y $N : M = (4)$.

Por último, si A y B son dos ideales del anillo conmutativo R, se tiene que:

$$AB \subseteq A \cap B \subseteq A(B) \subseteq A + B$$

Ahora bien, para que un anillo N sea noetheriano, debe satisfacer la siguiente **condición de encadenamiento ascendente** para ideales (CEA): Un anillo R se dice que satisface CEA, si toda sucesión de ideales $I_1, I_2, \cdots$ de N tal que $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ tiene un número finito de términos. Por ejemplo, si I consiste de todos los múltiplos de 27, es decir, I = (27), entonces (27) es un subconjunto de (9) y (9) es un subconjunto de (3), así los tres ideales (27), (9) y (3) es la cadena más larga posible correspondiente al ideal I.

En 1918, Emmy Noether probó un importante teorema y su inverso, este teorema reveló la conexión general entre las simetrías y las leyes de conservación en la física. Surgió de los **intereses de Hilbert por la relatividad general einsteiniana. El teorema, que lleva su nombre, es empleado en mecánica y teoría de campos. Pertenece al cálculo diferencial y pasó inadvertido en su momento. Actualmente goza de enorme prestigio entre los físicos de partículas. Este teorema se basa en las propiedades de invariancia del lagrangiano de un sistema, bajo la acción de ciertas transformaciones llamadas *simetrías*. A las leyes de conservación a las que obedece dicho sistema, se**

les llama también "*principios*" porque rigen en todas las leyes de la naturaleza gobernadas por lagrangianos invariantes bajo el mismo grupo de transformaciones. Así ocurre con el principio de conservación de la energía, o el principio de conservación de la cantidad de movimiento o impulso de los cuerpos o el principio de conservación del momento angular. El principio de conservación de la energía en mecánica clásica, por ejemplo, enuncia que la energía total, la cinética y potencial de un sistema aislado, es decir, de un sistema que no intercambie energía con el exterior, es constante. Otros principios de conservación son el de la carga eléctrica, el del número bariónico o el del número leptónico. El teorema de Noether expresa, de manera general, que *si al principio de una reacción se cuenta con cierto número de entidades (cargas, bariones, leptones), al final se encontrará el mismo número de entidades.*

•

Emmy Noether funda los principios de conservación en la invariancia formal de las leyes de la física. Es decir, en mecánica, un sistema queda descrito por una función matemática que depende de sus coordenadas de posición y velocidad, así como del tiempo. Esta función se llama *lagrangiano* del sistema y es igual a la diferencia entre la energía cinética y la potencial. La cuestión es: ¿qué leyes físicas son válidas aunque se cambie el sistema de coordenadas, efectuando en él unas transformaciones llamadas, muy genéricamente, simetrías, entre las que podemos incluir, por ejemplo, traslaciones o rotaciones?

El teorema de Noether presenta una correspondencia entre cada principio de conservación de una magnitud física (así, la energía, el impulso, la cantidad de movimiento) y una invariancia formal de las leyes de la física. Dicho de otro modo, *para toda simetría continua (por ejemplo, una rotación espacial) del lagrangiano del sistema, hay una magnitud conservada a lo largo de la evolución del mismo*. Las conclusiones más interesantes se obtienen en el caso de las transformaciones euclídeas, como las espaciales, las rotaciones o las temporales, esto es, en aquellos casos en que la transformación no deforma los objetos. En estos casos simples, el teorema de Noether conduce a los siguientes resultados.

1. **Cuando un lagrangiano es invariante bajo traslaciones del tiempo, su expresión formal no cambia al variar la variable tiempo, entonces la energía total de sistema se conserva durante el movimiento.**

2. **Si es invariante el sistema por traslación espacial, la magnitud conservada es el impulso o momento lineal.**

3. **Cuando es invariante por rotación, se conserva el momento angular.**

Aquí están los tres grandes principios de conservación de la física clásica: el de energía, que se basa en la invariancia del lagrangiano por traslación temporal; el del impulso mecánico, que se basa en la invariancia por traslación espacial y, el del momento angular, que se fundamenta en la invariancia por rotación. ¿Podrían remitir la conservación de la energía a la constancia de las leyes de la física y, consiguientemente, a la uniformidad del tiempo; la conservación de la cantidad de movimiento, a la universalidad de las leyes físicas y, finalmente, la conservación del momento angular a la isotropía del espacio (ninguna dirección goza de privilegio alguno sobre otras)?

SU DESTIERRO

A pesar de sus indudables méritos, Emmy Noether no consiguió ningún puesto académico en la Universidad de Gottingen. Ni siquiera pudo pasar la prueba de Habilitación, requisito indispensable para obtener el derecho a la docencia en las universidades alemanas, ya que, según la ordenanza legal de 1908, sólo podía ser concedida a los candidatos masculinos. Una protesta posterior ante el Ministerio de Cultura hizo que esta ley fuese derogada. Según testimonio de Hermann Weyl (1885-1955), su colega en Göttingen, fueron los mismos matemáticos e historiadores quienes más se opusieron a su nombramiento.

Acabada la primera Guerra Mundial, las cosas cambiaron un tanto. Emmy Noether pudo superar en 1919 la última prueba para conseguir su Habilitación, que consistía en dar una conferencia. A partir de entonces pudo dar clases en la Universidad y recibir parte del dinero que pagaban sus estudiantes (*Privatdozent*). En 1922, recibió un título académico que era un mero título sin obligaciones y sin salario. Posteriormente obtuvo un modesto *Lehrauftrag* (Encargo de Magisterio) para álgebra que llevaba asociado un pequeño salario. Así permaneció hasta 1933.

Siendo judía, además de mujer, la llegada de los nazis al poder, complicó aún más su situación. En abril de este mismo año, 1933, se le retiró tanto su *venia legendi* como su *Lehrauftrag* y, con ello, su salario. Con la ayuda de Bryn Mawr, de Pennsylvania, y de Sommerville, de Oxford, ambas colegas femeninas, pudo conseguir un puesto, de un año académico de duración, en el Bryn Mawr College. En octubre de 1934, se exilió a Estados Unidos.

A partir de 1934 empezó a dar clases semanales en el Institute for Advanced Study de Princeton, no lejos del Bryn Mawr College, donde se le renovó su contrato académico por un año más. La suerte, sin embargo, no la acompañó. El 14 de abril de 1935 Emmy Noether muere en el Bryn Mawr Hospital como consecuencia de una operación que no parecía excesivamente peligrosa.

"Según el juicio de los más eminentes matemáticos en vida, Emmy Noether era la más importante inteligencia matemática creativa que había nacido desde que comenzó la educación superior de las mujeres".

REFERENCIAS

[1] Barnes Wilfred E. (1965). *Introduction to Abstract Algebra.* D.C. Heath and Company Boston.

[2] Mutafian Claude (1980). *Anillos, Campos y Teoría de Galois.* C.E.C.S.A., México.

[3] Weiss-Dubisch (1975). *Algebra Superior.* Editorial Limusa, México.

SITIOS EN RED

[4] http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/noether.htm

[5] http://cedar.evansville.edu/~ck6/bstud/noether.html

[6] http://www.awm-math.org/noetherbrochure/AboutNoether.html

[7] http://www.uwm.edu/Dept/Math/Research/Algebra/algebra.html

[8] http://www.mizar.org/JFM/Vol12/ideal_1.6.html

[9] http://www.emmynoether.com/math.htm

[10]http://www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.asg/noether.html

[11]http://cuhwww.upr.clu.edu/mate/museo/mujeres/emmy.htm

[12]http://www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.asg/noether.html

[13]http://www.math.wsu.edu/math/faculty/barbut/integer_ideals.html