

## KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS

*José Luis Díaz Gómez*

Karl Wilhem Theodor Weierstrass nació el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Bavaria (hoy Alemania) y murió el 19 de febrero de 1897 en Berlín, Alemania. Fue uno de los precursores del rigor en el *análisis* y se le conoce como el “*padre del análisis moderno*”. Su obra refina el concepto de qué es un *número* y qué es la *función* en las matemáticas y eleva el nivel de autocrítica, tanto en las definiciones como en el rigor de las demostraciones.

Aquí sólo pretendemos señalar algunos aspectos de su vida, dentro del contexto histórico de la época científica en que vivió, para conocer el por qué de estos méritos.

En el momento del nacimiento de Karl Weierstrass, su padre Wilhelm Weierstrass, era secretario del alcalde de Ostenfelde. Wilhelm Weierstrass era un hombre bien educado que tenía un conocimiento amplio de las artes y de las ciencias. Un hombre muy preparado y capaz alcanzar las metas que se proponía, pero también un padre dominante que intentaba dirigir la vida de todos sus hijos. La madre de Weierstrass fue Theodora Vonderforst y Karl fue el hijo mayor de los cuatro que procreó Theodora, de los cuales ninguno se casó [10].

Wilhelm Weierstrass fue inspector de impuestos cuando Karl tenía ocho años. Este trabajo lo obligó a pasar periodos cortos en un solo lugar, así que Karl frecuentemente cambió de una escuela a otra, a medida que la familia viajaba por Prusia. En 1827, Theodora, la madre de Karl, murió, y un año después su padre Wilhelm volvió a casarse. En el año de 1829 Wilhelm Weierstrass llegó a ser el asistente de la oficina principal de impuestos en Paderborn, y allí Karl ingresó al Gimnasio Católico. Weierstrass se distinguió en el Gimnasio a pesar de tener que asumir un trabajo de medio tiempo como tenedor de libros para ayudar a las finanzas familiares.

Karl Weierstrass logró en el Gimnasio un nivel de aptitud matemática ciertamente más allá de lo que se habría esperado. Desafortunadamente éste fue el inicio de su problema. El padre de Karl observó que su hijo era inteligente debido a todos los premios que ganó. También dedujo que su hijo podría ser un buen tenedor de libros. De estos dos hechos, pensó que su hijo podría ser un gran contador y los mejores trabajos de contabilidad estaban en el gobierno. Por consiguiente, su hijo estudiaría contaduría, comercio y leyes para prepararse para una carrera gubernamental. El único problema era que el interés de su hijo estaba en las matemáticas [10].

Así pues, el padre de Weierstrass deseaba que Karl estudiara finanzas. Karl, después de graduarse en el Gimnasio en 1834, accedió a los deseos de su padre e ingresó a la Universidad de Bonn con un curso diseñado para él, que incluía el estudio de leyes, finanzas y economía. Sin embargo, Weierstrass padeció el conflicto de obedecer los deseos de su padre, o estudiar la materia que amaba, ciertamente la matemática.

El resultado del conflicto interno de Weierstrass fue que no asistió a las clases de matemáticas, ni a las de su bien planeado curso. Reaccionó al conflicto interno pretendiendo que no le importaban sus estudios, y se pasó cuatro años practicando esgrima (con espadas), bebiendo cerveza en reuniones y leyendo libros de matemática. Después de cuatro años, regresó a casa sin graduarse en nada. Biermann escribe en [2]:

*... el conflicto entre el deber y su inclinación lo condujeron a la tensión física y mental. Intentó, en vano, superar sus problemas llevando una vida descuidada de estudiante...*

No obstante estudió matemáticas por su cuenta, leyendo la *Mecánica Celeste* de Laplace y posteriormente el trabajo de las *funciones elípticas* de Jacobi. Llegó a comprender los métodos de la teoría de las funciones elípticas, leyendo transcripciones de las conferencias de Gudermann. En una carta a Lie, escrita casi 50 años después, le explicó cómo por esa época llegó a tomar la decisión definitiva para estudiar matemáticas a pesar de los deseos de su padre (ver [2]):

*... cuando me di cuenta de esto [una carta de Abel a Legendre] en la Revista de Crelle durante mis años de estudiante, [esto] fue de suma importancia. La deducción inmediata de la forma de la representación de la función dada por Abel..., de la ecuación diferencial que define esta función, fue la primera tarea matemática que yo me propuse; y su solución afortunada me llevó a la decisión de dedicarme totalmente a las matemáticas. ; tomé esta decisión en mi séptimo semestre...*

Weierstrass tomó la decisión de hacerse matemático, aún cuando todavía estudiaba finanzas públicas y administración. Después de su decisión, pasó un semestre más en la Universidad de Bonn, su octavo semestre finalizó en 1838, y no aprobó las materias en las que se había inscrito. El padre de Weierstrass estaba desesperadamente disgustado con su hijo por haber abandonado sus estudios. Pero fue persuadido por un amigo de la familia, el presidente del tribunal de justicia de Paderborn, de permitirle a Karl estudiar en la Academia Teológica y Filosófica de Münster para que pudiera tomar los exámenes necesarios para obtener el grado de maestro de secundaria [10].

El 22 de mayo de 1839 Weierstrass se inscribió en la Academia de Münster. Allí se encontró con su inspiración matemática, el profesor de matemáticas Christoph Gudermann (1798-1852).

Weierstrass asistió a las conferencias de Gudermann sobre las funciones elípticas, y recibió una enseñanza personal en la que el profesor introdujo a Weierstrass en el tema de las series de potencias, tema que utilizaría como la base de su trabajo. Gudermann animó fuertemente a Weierstrass en sus estudios matemáticos. A lo largo del resto de su vida, Karl expresó siempre gratitud a su maestro.

Al dejar Münster en el otoño de 1839, Weierstrass estudió para el examen de maestro para el cual se había registrado en marzo de 1840. Sin embargo, por estas fechas, el padre de Weierstrass de nuevo había cambiado de trabajo, llegando a ser el director de los trabajos

de sal en enero de 1840, y la familia tenía su residencia ahora en Westernkotten cerca de Lippstadt, en el Río de Lippe, al oeste de Paderborn [10].

En mayo de 1840 como parte de su examen escrito, presentó un ensayo sobre las funciones elípticas. Este artículo, que fue el punto de partida de los descubrimientos de Weierstrass, fue muy bien recibido por Gudermann, quien evaluó y valoró así la contribución de Weierstrass:

*... de la misma jerarquía que los descubrimientos que fueron coronados con la gloria.*

Cuando Weierstrass en su nueva vida de matemático conoció los comentarios de Gudermann, dijo que, de saberlo, habría publicado antes sus resultados. Comentó también cuán generoso había sido Gudermann con su elogio, particularmente porque él había sido muy crítico de los métodos de Gudermann [10].

En abril de 1841 Weierstrass había tomado los exámenes orales necesarios e inició su noviciado como maestro en el Gimnasio en Münster. Aunque no publicó ningún escrito de matemáticas en esta época, escribió tres artículos cortos en 1841 y 1842, que se describen en [5]. En este período descubrió lo que ahora se llaman Teorema de Laurent y los estimados de Cauchy [7]:

**Teorema.** (*Expansión de Laurent.*) Sea  $f$  una función analítica en el disco perforado  $z: 0 < |z - p| < R$ , donde  $R > 0$ . Entonces existe una sucesión doblemente infinita  $a_n$  de números complejos tales que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - p)^n$$

para todo  $z$  en el mencionado disco perforado.

**Teorema** (*Estimados de Cauchy.*) Si la función  $f$  es analítica en un dominio que contiene el disco cerrado  $z: |z - p| < R$ , entonces su  $n$ -ésima derivada  $f^{(n)}(p)$  satisface  $|f^{(n)}(p)| < n!M / R^n$ , donde  $M = \max\{f(z) : |z - p| = R\}$ .

Los conceptos sobre los cuales Weierstrass basó su teoría de funciones de variable compleja de los años posteriores a 1857 se encuentran explícitamente en sus trabajos inéditos escritos en Münster de 1841 a 1842, cuando estaba bajo la influencia de Gudermann. La transformación de su concepción de una función analítica a partir de una función diferenciable, a una función expandible en una serie de potencias convergente la realizó durante este período temprano de su actividad matemática.

Weierstrass empezó su carrera como maestro de matemáticas de secundaria en el Pro-Gimnasio en Krone Alemania en 1842, donde permaneció hasta que se cambió al Colegio Hoseanum en Braunsberg, en 1848. Siendo maestro de matemáticas, le exigieron que

enseñara también otras materias y, así, Weierstrass enseñó física, botánica, geografía, historia, alemán, caligrafía e incluso gimnasia. Pasaba la mayor parte de su tiempo libre haciendo amistades en la taberna local y trabajando en sus matemáticas. Posteriormente Weierstrass describió "la tristeza inacabable y el fastidio" de estos años miserables en los cuales [2]:

*... no tenía un colega para las discusiones matemáticas, ni acceso a una biblioteca matemática, y el intercambio de cartas científicas era un lujo que no podía permitirse pagar.*

Alrededor de 1850 Weierstrass empezó a padecer ataques de vértigo muy severos y que después terminaban en aproximadamente una hora de fuertes mareos. Los ataques frecuentes en un período de aproximadamente 12 años le dificultaron el trabajo y se piensa que la causa de estos problemas fueron los conflictos mentales que sufrió cuando era estudiante, junto con la tensión de aplicarse a la matemática en cada minuto libre de su tiempo mientras realizaba el trabajo agotador de la enseñanza.

No es sorprendente que cuando Weierstrass publicó los artículos sobre las funciones abelianas en los prospectos de la escuela de Braunsberg pasaran inadvertidos por los matemáticos. Sin embargo, cuando publicó "*Zur Theorie der Abelschen Functionen*" en la Revista de Crelle<sup>1</sup> en 1854 éste indudablemente fue notado. En este artículo se da una descripción preliminar de los métodos que comprenden la representación de funciones abelianas como series de potencias convergentes [10].

Con este artículo Weierstrass salió de la oscuridad y sobresaltó a la comunidad matemática que se preguntaba cómo era que este genio estaba enseñando a niños. Casi de inmediato la Universidad de Königsberg le confirió el grado de Doctor Honoris Causa el 31 de marzo de 1854. Weierstrass solicitó la cátedra que quedó vacante en la Universidad de Breslau cuando Kummer se cambió a Berlín. Kummer, sin embargo, intentó influir en las cosas para que Weierstrass no fuera designado y se fuera a Berlín, en lugar de a Breslau. Una carta de Dirichlet al Ministro Prusiano de Cultura escrito en 1855 apoyó fuertemente a Weierstrass para que se le diera un nombramiento universitario. Los detalles se dan en [1].

Después de ser promovido como conferencista mayor en Braunsberg, Weierstrass obtuvo un año de licencia para dedicarse al estudio de la matemática avanzada. Sin embargo, ya había decidido no regresar a enseñar a la escuela.

Weierstrass publicó una versión completa de su teoría de inversión de integrales hiperelípticas en su siguiente artículo denominado "*Theorie der Abelschen Functionen*" y publicado en la Revista de Crelle en 1856. A partir de él varias Universidades le ofrecieron una cátedra. Mientras las universidades en Austria discutían la perspectiva, le llegó la oferta de una cátedra del Instituto de la Industria en Berlín. Aunque él hubiera preferido ir a la universidad de Berlín, Weierstrass no quiso volver al Colegio Hoseanum en Braunsberg por lo que aceptó la oferta del Instituto el 14 de junio de 1856 [10].

---

<sup>1</sup> Revista fundada y dirigida por el matemático August Leopold Crelle, cuyo nombre completo es: Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Weierstrass continuo recibiendo ofertas, incluso cuando impartía una conferencia en Viena en septiembre de 1856 se le ofreció a una cátedra en cualquier universidad austriaca que eligiera. Antes de decidir sobre esta oferta, en octubre la Universidad de Berlín le ofreció una plaza de profesor asociado. Éste era el trabajo que él había deseado durante mucho tiempo y aceptó rápidamente, aunque habiendo aceptado antes la oferta del Instituto de la Industria, no pudo ocupar la plaza de la Universidad de Berlín formalmente durante algunos años [10].

El éxito de las conferencias de matemáticas de Weierstrass atrajo a estudiantes de todo el mundo. Los temas de sus conferencias incluyeron: la aplicación de series de Fourier e integrales a la física matemática (1856/57), una introducción a la teoría de funciones, la teoría de funciones elípticas (su tema de investigación principal), y aplicaciones a problemas en geometría y mecánica.

En sus conferencias de 1859/60 Weierstrass presentó su *Introducción al análisis*, donde abordó los fundamentos de esta materia por primera vez. Weierstrass comprendió que el esclarecimiento conceptual de muchos teoremas, sólo sería posible mediante la construcción rigurosa de los números reales. Dio una demostración basada en lo que hoy en día conocemos como el teorema de Bolzano-Weierstrass (1874): *toda sucesión acotada tiene un punto de acumulación*.

Además del teorema del valor intermedio, Weierstrass demostró mediante argumentos puramente analíticos (es decir, sin tomar en cuenta la evidencia geométrica) que una función definida en un intervalo cerrado, tiene un máximo y un mínimo absolutos. Este resultado aparece en las conferencias de Weierstrass de 1861 bajo el nombre **Hauptlehrsatz**, esto es, Teorema Principal. [6]

En 1860/61 disertó sobre el *Cálculo Integral*. En 1861 su énfasis en el rigor lo llevó a descubrir una función que, aunque continua, no tiene derivada en ningún punto.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

en donde  $a$  es un número impar,  $b$  un número real en  $(0, 1)$  y  $ab > 3\pi/2$ . Este ejemplo era contrario a toda intuición geométrica. Los analistas que dependían fuertemente de la intuición para sus descubrimientos se desanimaron con esta función anti-intuitiva. El impacto causado a la comunidad matemática fue inmenso y provocó reacciones muy variadas que iban desde la incredulidad hasta el horror, pero la llamada de atención estaba dada, sobre el poco rigor y la engañosa intuición, y precipitó en gran medida la imperiosa necesidad de construir sobre bases irrefutables los números reales.

Los efectos causados por la existencia de esta clase especial de funciones (continuas sin derivada en punto alguno) fueron muchas. En primer lugar, la continuidad de una función no siempre representaba **una propiedad de su gráfica** pues estos ejemplos *no son graficables* ya que una continuidad sin derivabilidad quería decir que la gráfica de la función *tiene un pico en cada punto!* [6]

Anteriormente describimos los problemas de salud que Weierstrass padeció a partir de 1850. Aunque logró las posiciones con las que había soñado, su salud se agotó en diciembre de 1861, cuando se derrumbó completamente. Le tomó casi un año recuperarse para disertar de nuevo, pero nunca recuperó su salud completamente. Durante este tiempo disertaba sentado y un estudiante escribía en el pizarrón por él. Los ataques que había padecido desde 1850 se detuvieron, pero fueron reemplazados por problemas del pecho [10].

En el curso que impartió en el año de 1863/64 sobre “*La teoría general de funciones analíticas*”, Weierstrass inició la formulación de su teoría de los números reales. En sus conferencias del año 1863 demostró que los números complejos son sólo conmutativos en su extensión algebraica de los números reales. Gauss había prometido una prueba de esto en 1831 pero falló en darla.

Las conferencias de Weierstrass se desarrollaron en un curso de cuatro semestres que continuó impartiendo hasta 1890. Los cuatro cursos eran:

1. La introducción a la teoría de funciones analíticas.
2. Las funciones elípticas.
3. Las funciones abelianas.
4. El cálculo de variaciones o aplicaciones de funciones elípticas.

El enfoque de Weierstrass, hoy en día, todavía domina la enseñanza del análisis y esto se infiere claramente del contenido y estilo de estas lecciones, en particular del curso de *Introducción*. Su contenido era: los números, el concepto de función con el enfoque de serie de potencias de Weierstrass, continuidad y diferenciabilidad, la extensión analítica, los puntos de singularidad, las funciones analíticas de varias variables, en particular el "teorema de preparación" de Weierstrass, e integrales de contorno.

En Berlín, Weierstrass tenía dos colegas: Kummer y Kronecker, y los tres le dieron una reputación a la universidad de Berlín como la universidad líder en la cuál estudiar matemáticas. Kronecker fue un amigo íntimo de Weierstrass durante muchos años, pero en 1877, la oposición de Kronecker al trabajo de Cantor y el apoyo de Weierstrass a este trabajo, causó una desavenencia entre los dos hombres que continuó hasta la muerte de Kronecker en 1891. Las relaciones se pusieron tan difíciles en una etapa, que en 1885 Weierstrass pensó dejar Berlín e irse a Suiza. Sin embargo, cambió de parecer y permaneció en Berlín [9].

Un número grande de estudiantes se beneficio de las enseñanzas de Weierstrass. Mencionaremos algunos de ellos: Bachmann, Bolzano, Cantor, Engel, Frobenius, Gegenbauer, Hensel, Hölder, Hurwitz, Killing, Klein, Kneser, Königsberger, Lerch, Lie, Lueroth, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Netto, Schottky, Schwarz y Stolz. En particular, una estudiante merece una mención especial: Sofía Kovalevskaya.

El célebre químico Bunsen le escribió esta nota a Weierstrass, advirtiéndolo al matemático sobre la posibilidad de quedar fascinado por la belleza de Sofía Kovalevskaya, una de las más insignes matemáticas de la historia.

*"Es una mujer que me ha hecho renegar de mis propias palabras. Que no se quite el sombrero, porque sin él, es una mujer muy peligrosa".*

Sofía utilizaba el sombrero en ocasiones para ocultar sus ojos de forma que su interlocutor pudiera escucharla sin perder la concentración. Pero el genial Weierstrass quedó cautivado por los conocimientos y la inteligencia de Sofía [9].

En 1870 Sofía Kovalevskaya vino a Berlín y Weierstrass le enseñó en privado, puesto que no le permitieron la admisión a la universidad. Ella era una estudiante muy especial en la que Weierstrass estaba muy interesado porque escribió:

*... soñó y se embelesó con tantos enigmas que permanecen por resolver, en espacios finitos e infinitos, en la estabilidad del sistema mundial, y en todos los grandes problemas de la matemática y la física del futuro... usted ha sido íntima... a lo largo de mi vida entera... y nunca he encontrado a nadie como usted, que pueda traerme tal comprensión de los objetivos más altos de la ciencia y una alegre armonía con mis intenciones y principios básicos.*

Fue a través de los esfuerzos de Weierstrass que Kovalevskaya recibió un doctorado honorario de Göttingen, y también utilizó su influencia para ayudarlo a obtener el post doctorado en Stockholm en 1883. La correspondencia de Weierstrass y Kovalevskaya duró 20 años, de 1871 a 1890, durante la cual se intercambiaron más de 160 cartas (ver [3], [8]). Sofía murió a la edad de 41 años, su muerte quebrantó a Karl mentalmente, quien quemó todas las cartas y todo lo que le recordaba a Sofía [9].

Las normas de rigor que él expresó, definiciones, por ejemplo, números irracionales como límites de series convergentes, alteraron el futuro de la matemática. También estudió las funciones enteras, la noción de convergencia uniforme y funciones definidas por productos infinitos. Su esfuerzo se resume en [1] como sigue:

*Conocido como el padre del análisis moderno, Weierstrass ideó las pruebas para la convergencia de series y contribuyó a la teoría de funciones periódicas, las funciones de variable real, las funciones elípticas, las funciones abelianas, productos infinitos convergentes, y el cálculo de variaciones. También contribuyó a la teoría de formas bilineales y cuadráticas.*

Weierstrass publicó poco [4]:

*... porque su sentido crítico invariablemente lo impulsó a basar cualquier análisis sobre fundamentos sólidos, empezando con un acercamiento fresco y revisando y extendiendo continuamente.*

Decidió dirigir la publicación de sus obras completas, en su caso esto comprende mucho material inédito de sus cursos y conferencias y Weierstrass comprendió que sin su ayuda

ésta sería una tarea difícil. Los primeros dos volúmenes aparecieron en 1894 y 1895, siendo los únicos que aparecieron antes de su muerte en 1897. Sus últimos años fueron difíciles [4]:

*Durante sus últimos tres años estuvo confinado a una silla de ruedas, inmóvil y dependiente. Murió de pulmonía.*

Los volúmenes restantes de sus Obras Completas aparecieron despacio; el volumen 3 en 1903, el volumen 4 en 1902, los volúmenes 5 y 6 en 1915, y el volumen 7 en 1927. Los siete volúmenes se reimprimieron en 1967. Mucho de su trabajo continúa siendo publicado hoy, particularmente las versiones de sus conferencias tomadas de las notas hechas por aquellos que asistieron a las conferencias.

Irónicamente, comprendió sus propias limitaciones. Él dijo una vez: “Es cierto que un matemático que no tenga también algo de poeta nunca será un matemático perfecto”. Él entendió que la perfección matemática, así como la perfección poética, es imposible, aunque no hay nada malo en intentarlo [9].

## REFERENCIAS

- [1] Behnke H. and Kopfermann K.(eds.) (1966), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass*. Cologne-Opladen.
- [2] Biermann K.-R. (1965), *Dirichlet über Weierstrass*, Praxis Math. 7. pp. 309-312.
- [3] Bölling R. (1994), *A photo album for Weierstrass*. Braunschweig.
- [4] Dictionary of Scientific Biography (1990). *K. Weierstrass*. New York.
- [5] Encyclopaedia Britannica. *Karl Weierstrass*.
- [6] Kochina P. Ya., *Karl Weierstrass, 1815-1897* (Russian), Nauka (Moscow, 1985).
- [7] Moreno A. Luis (1977). *Weierstrass: Cien años después*. Miscelánea Matemática 25, pp. 11-27.
- [8] Neuenschwander E. (1981), *Studies in the history of complex function theory II: Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass*, Bull. of the A.M.S. 5, pp. 87-105.
- [9] Richter K. (1983), *Weierstrass*, in H Wussing and W Arnold, *Biographien bedeutender Mathematiker*, Berlin.

## SITIOS EN RED

- [10] O'Connor J. J. and Robertson E. F. *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass*.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Weierstrass.html>