

## EL PRÍNCIPE DE LAS MATEMÁTICAS

*Francisco Armando Carrillo Navarro*

Los matemáticos más importantes de la época de la Revolución Francesa fueron, casi sin excepción, franceses, pero coincidiendo con los comienzos del siglo XIX Francia tuvo que compartir de nuevo los honores del liderazgo con otros países. El matemático más grande de la primera mitad del siglo XIX, y quizá de todos los tiempos, fue un alemán que nunca viajó fuera de Alemania, es a este personaje a quien dedicaremos las siguientes páginas; su nombre: **Carl Friedrich Gauss**.

### LA VIDA FAMILIAR DE GAUSS

Carl Friedrich Gauss nació en la ciudad de Brunswick, al norte de Alemania, el 30 de abril de 1777 y murió el 23 de febrero de 1855 en Göttingen, su nombre de pila real fue Johann Friedrich Carl Gauss pero todos sus trabajos los firmó con el nombre con que es conocido actualmente. Nació en una familia muy pobre; su abuelo era un jardinero que se estableció en Brunswick, en 1740, y nunca logró superar su pobreza económica. El padre de Gauss, Gerhard Diedrich Gauss, se dedicó también a la jardinería, la albañilería y a la construcción de canales. De pequeño Gauss fue respetuoso y obediente, y aunque después nunca criticó a su padre, es notorio que no sintió por él un verdadero cariño. Poco antes de que Gauss cumpliera los 30 años, su padre murió. Todo parece indicar que el genio de Gauss y sus primeros estímulos intelectuales provienen de la familia materna. Desde el momento de su nacimiento, Gauss fue el orgullo de su madre Dorothea Benz, mujer alegre y optimista, de aguda inteligencia, que notó muy pronto que su hijo era algo especial y lo protegió hábilmente de las intenciones del padre de hacerlo jardinero y albañil. Gauss siempre estuvo cerca de su madre y hubo mucha comprensión entre ellos, al grado de que vivió con ella los últimos 22 años de su existencia; nunca permitió que nadie se hiciera cargo de ella y la cuidó hasta el final; Dorothea Benz murió ciega a los 97 años de edad, cuando Gauss tenía ya 62.

Gauss se casó por primera vez el 9 de octubre de 1805, con Johanna Üsthof, quien era 3 años menor que Gauss. Tres días después de la boda, Gauss escribió estas palabras a su gran amigo de Göttingen, Farkas Bolyai: “La vida se alza ante mí como una eterna primavera, con nuevos y brillantes colores”. En 1806 tuvieron su primer hijo, al que llamaron Joseph en honor a Piazzi, el descubridor de Ceres y responsable indirecto de la fama de Gauss. Posteriormente tuvieron una hija y otro hijo a los que les dieron también los nombres de pila de otros dos astrónomos: Wilhelmine (Minna) por Olbers, descubridor de Pallas, entre otras cosas, y Louis, en honor a Harding, que descubrió Juno, otro de los asteroides. En 1807 Gauss y su familia se trasladaron a Göttingen. Casi dos años después, en 1809, Johanna murió a consecuencia del parto en el que nació su tercer hijo: Louis, quien falleció pocas semanas después. Gauss, sin embargo, se volvió a casar muy pronto

con la mejor amiga de Johanna, Minna Waldeck, esto ocurrió en agosto de 1810 y al poco tiempo tuvieron hijos: en 1811 a Eugene, en 1813 a Wilhelm y en 1816 a Theresa. Su segunda esposa murió en el año de 1831. La relación de Gauss con sus seis hijos fue muy diferente; con sus hijas siempre fue cordial y muy cariñoso. Theresa le hizo compañía toda la vida; con su hijo mayor, Joseph, la relación fue bastante buena, era un buen ingeniero y fue asistente de Gauss en una época en que éste estaba involucrado en un proyecto geodésico. Con los otros dos hijos varones las cosas no salieron bien. Tanto Eugene como Wilhelm emigraron a Estados Unidos después de prolongados conflictos con su padre.

## LOS PRIMEROS DESCUBRIMIENTOS DE GAUSS

Gauss fue un verdadero niño prodigio, su padre, como ya se mencionó antes, intentó evitar que recibiera una educación adecuada, pero en cambio su madre, que tampoco había recibido ningún tipo de educación, animó siempre a su hijo en sus estudios, y más tarde se mostró muy orgullosa de sus logros. De niño Gauss asistió a la escuela local, dirigida por un maestro de costumbres rutinarias. Un día, con el fin de mantener la clase atareada y en silencio durante un buen rato, el maestro tuvo la idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuera terminando cada uno esta tarea, deberían colocar su pizarra sobre la mesa del maestro. Casi inmediatamente colocó Carl su pizarra sobre la mesa, diciendo: “ya está”; el maestro lo miró desdeñosamente mientras los demás trabajaban con ahínco. Cuando todos hubieron terminado y el maestro revisó al fin los resultados obtenidos, se encontró con la sorpresa notable de que la única pizarra en la que aparecía la respuesta correcta, 5.050, sin ningún cálculo accesorio, era la de Gauss. El muchachito de ocho años había hecho evidente el cálculo mental de sumar la progresión aritmética  $1+ 2+ 3+ \dots+ 98+ 99+ 100$  asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente utilizando la fórmula  $\frac{(m+1)m}{2}$ . Si la

anécdota anterior nos da una idea del genio de Gauss, se conoce otra tan sorprendente o más; se dice que Goethe escribió y dirigió pequeñas obras para un teatro de marionetas a los seis años, y que Mozart compuso su primer minuetto infantil a los cinco, pero Gauss corrigió un error en las cuentas salariales de su padre a la edad de tres.

A los quince años Gauss comenzó en Brunswick su enseñanza media, gracias a la ayuda del duque de Brunswick, el Duque quedó impresionado con el muchacho y decidió pagar su educación posterior, primero en el Colegio Carolino en Brunswick (1792-1795) y más tarde en la Universidad de Göttingen (1795-1798). En el Colegio Carolino, Gauss completó su dominio de las lenguas clásicas y exploró las obras de Newton, Euler y Lagrange. Gauss estaba entonces indeciso, dudando entre hacerse filólogo o matemático, a pesar de que había inventado ya, y justificado, el método de mínimos cuadrados, una década antes de que Legendre publicara el mismo artificio. El 30 de marzo de 1796 se decidió al fin por la matemática, porque ese mismo día, cuando le faltaba aún un mes para cumplir 19 años, hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2.000 años se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Ese crítico día

de 1796 que acabamos de mencionar, Gauss consiguió construir, de acuerdo con las normas euclídeas, el polígono regular de 17 lados. Y ese mismo día comenzó a llevar un diario en el que fue apuntando, durante los 18 años siguientes, algunos de sus más grandes descubrimientos; el primer registro es, naturalmente, el de la construcción del polígono regular de 17 lados.

El 10 de julio de 1796 confiaba Gauss a su diario el descubrimiento de que todo entero positivo es la suma de tres números triangulares como máximo. Este diario, que consta de 19 páginas solamente, es probablemente el más precioso documento de toda la historia de las matemáticas, en el que están registrados brevemente 146 resultados, el último de los cuales lleva por fecha el 9 de julio de 1814. Por medio de este diario es posible comprobar que Gauss fue el primero en obtener algunos resultados sobre los que más tarde hubo disputas de prioridad, así como, y esto es mucho más importante, seguirle la pista al desarrollo de su genio, dado que algunos de sus pensamientos más originales no se publicaron durante su vida. Dicho sea de paso, su escasa disposición a publicar es comparable únicamente a la de uno de sus rivales modernos en cuanto a la fama matemática, Isaac Newton. (El otro, Leonhard Euler, no se le parece en absoluto en este aspecto, pues ha sido el matemático más prolífico.)

El diario de Gauss, un pequeño folleto de 19 páginas, permaneció escondido entre los papeles de la familia hasta 1898, en que se descubrió en posesión de un nieto de Gauss en Hamlin. En 1901 se publicó su contenido, encargándose de ello el matemático Felix Klein, en un volumen con el que se celebraba el sesquicentenario de la Real Sociedad Científica de Göttingen, y el nieto en cuestión cedió el diario para que se conservase en los archivos de Gauss, que se encuentran principalmente en Brunswick y en Göttingen.

## LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

El sello de Gauss llevaba escrito el lema: *pauca sed matura* (“pocos pero maduros”) y lo cierto es que su mente estaba tan rebosante de ideas originales que no tenía materialmente tiempo de verlas madurar a todas ellas hasta el punto de perfección en que insistía tenerlas antes de publicarlas. Sin embargo, su descubrimiento del 30 de marzo de 1796 sí lo anunció públicamente en una revista literaria; siempre estuvo tan orgulloso de este descubrimiento que, a imitación de Arquímedes, antiguo rival en talla matemática, expresó el deseo de que se grabara sobre su tumba un polígono regular de 17 lados. Este deseo no se cumplió nunca porque el obtuso cantero encargado de tallar la lápida se negó rotundamente, insistiendo en que la figura resultante no se distinguiría de una circunferencia, pero al menos en el monumento a Gauss en Brunswick puede verse tallado realmente el egregio polígono.

Durante breves períodos de tiempo Gauss abandonaba Göttingen para asistir a la Universidad de Helmstädt, y fue en esta última en la que recibió su doctorado en 1798. La tesis, publicada en Helmstädt en 1799, lleva en latín el aplastante título: “*Nueva Demostración del Teorema que Afirma que toda Función Algebraica Racional y Entera de una variable puede resolverse en Factores Reales de Primero o de Segundo Grado*”. Este teorema, al que se refería Gauss más tarde con el nombre de “teorema fundamental del álgebra”, es esencialmente la proposición conocida en Francia como el “teorema de

d'Alembert", pero Gauss demostró que todos los intentos de demostración anteriores, incluyendo algunos de Euler y de Lagrange, eran incorrectos.

La representación gráfica de los números complejos había sido descubierta ya en 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) y publicada en la revista de la Academia de Ciencias danesa en 1798, pero lo cierto es que la obra de Wessel pasó desapercibida prácticamente, y así el plano de los números complejos se suele denominar hoy como "plano de Gauss", a pesar de que Gauss no publicó sus ideas al respecto hasta 30 años más tarde. Desde la época de Girard era bien conocido que los números reales, positivos, cero y negativos se pueden representar en correspondencia con los puntos de una recta. Wallis había llegado a sugerir incluso que los números imaginarios puros se podrían representar por los puntos de una recta perpendicular al eje de los números reales. Y, sin embargo, sorprendentemente nadie antes que Wessel y Gauss pensó en franquear la obvia etapa de considerar las partes real e imaginaria pura de un número complejo  $a+bi$  como las dos coordenadas rectangulares de un punto en el plano, al cual estaría asociado dicho número complejo. El cubrir esta simple etapa hizo sentirse a los matemáticos mucho más cómodos con los números imaginarios, ya que ahora podían visualizarse en el sentido de que todo punto del plano correspondía a un número complejo y viceversa. Lo cierto es que ver es creer, y las viejas ideas acerca de la no existencia de los números imaginarios fueron abandonadas por casi todos los matemáticos.

## EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

La tesis doctoral de Gauss venía a demostrar que toda ecuación polinómica  $f(x)=0$  tiene al menos una raíz, ya sean los coeficientes reales o complejos. No podemos entrar aquí en los detalles de la demostración, pero una ilustración indicará por lo menos las líneas generales que seguían las ideas de Gauss. Vamos a resolver la ecuación  $z^2 - 4i = 0$  gráficamente, demostrando para ello que hay un valor complejo  $z = a + bi$  que satisface la ecuación. Sustituyendo en ella  $z$  por  $a + bi$  y separando las partes real e imaginaria, nos queda que ha de ser  $a^2 - b^2 = 0$  y  $ab - 2 = 0$ .

Interpretando  $a$  y  $b$  como variables y representando estas dos ecuaciones en un mismo sistema de coordenadas, en las abscisas la parte real  $a$  y en las ordenadas la parte imaginaria pura  $b$ , obtenemos dos curvas: la primera consiste en el par de rectas  $a + b = 0$  y  $a - b = 0$ , y la segunda es la hipérbola equilátera  $ab = 2$ , tal como se observa en la Figura 1. Está claro, por la representación gráfica, que las dos curvas se cortan en un punto  $P$  en el primer cuadrante (e, incidentalmente, en otro  $P'$  en el tercero). Obsérvese en particular que una rama de la primera curva se aleja del origen en las direcciones  $\theta = 1\pi/4$  y  $\theta = 3\pi/4$ ; el punto de intersección está entre las dos direcciones  $\theta = 0\pi/4$  y  $\theta = 3\pi/4$ , y que una rama de la segunda curva se acerca asintóticamente a las direcciones  $\theta = 0\pi/4$  y  $\theta = 2\pi/4$ ; el punto de intersección está entre las dos direcciones  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Las coordenadas  $a$  y  $b$  de este punto de intersección son la parte real e imaginaria del número complejo que es solución de la ecuación  $z^2 - 4i = 0$ .

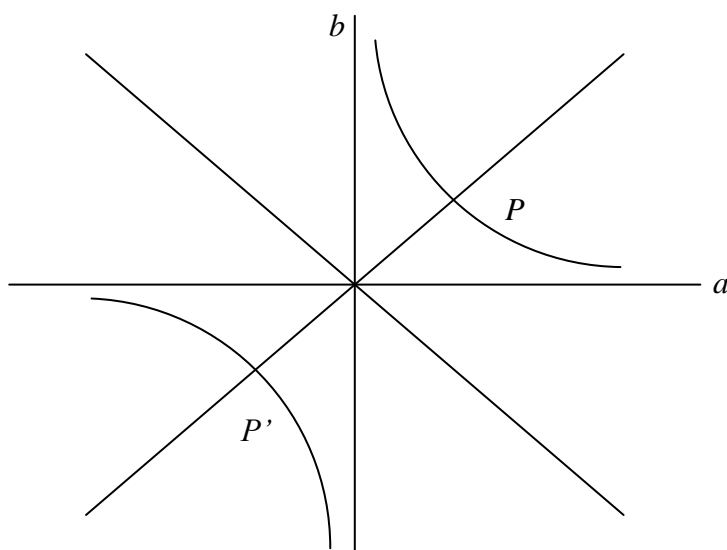


Figura 1

Si nuestra ecuación polinómica original hubiera sido de tercer grado en vez de segundo grado, habría habido una rama de una de las dos curvas que se aproximase a las direcciones  $\theta = 1\pi/6$  y  $\theta = 3\pi/6$ , y la otra curva se aproximaría a las direcciones  $\theta = 0\pi/6$  y  $\theta = 2\pi/6$ . Las ramas son continuas en todos los casos, por lo tanto tienen que cortarse en algún punto en el ángulo que va de  $\theta = 0$  a  $\theta = \pi/3$ . Para una ecuación de grado  $n$  habrá una rama de una de las dos curvas con direcciones asintóticas  $\theta = 1\pi/2n$  y  $\theta = 3\pi/2n$ , mientras que una rama de la otra curva tendrá las direcciones asintóticas  $\theta = 0\pi/2n$  y  $\theta = 2\pi/2n$ , y estas dos ramas tienen que cortarse necesariamente en un punto entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi/n$ , y las coordenadas  $a$  y  $b$  del punto de intersección serán de nuevo las partes real e imaginaria de un número complejo, que es una raíz de la ecuación. Vemos pues así que, sea cual sea el grado de la ecuación polinómica, tiene que haber al menos una raíz compleja. A partir de este resultado se puede demostrar ya fácilmente el teorema de la tesis de Gauss de que un polinomio cualquiera se puede factorizar en factores reales lineales y cuadráticos.

La demostración del teorema fundamental del álgebra dada por Gauss en su tesis se basa en parte en consideraciones geométricas, lo que no resultaba del todo satisfactorio. Años más tarde, en 1816, publicó Gauss dos nuevas demostraciones, así como otra en 1850, pugnando siempre por encontrar una demostración puramente algebraica.

## EL ÁLGEBRA DE LAS CONGRUENCIAS

Solamente dos años después de la publicación de su tesis, publicó Gauss su libro más conocido, un tratado de teoría de números en latín, titulado *Disquisitiones arithmeticae*, dedicado a su protector el duque de Brunswick. Esta obra es la principal responsable del desarrollo del lenguaje y de las notaciones de la rama de la teoría de números conocida

como el álgebra de las congruencias, ejemplo primitivo de trabajo con clases de equivalencia. La exposición se abre con la definición siguiente:

*Si un número  $a$  divide a la diferencia entre dos números  $b$  y  $c$ , entonces  $b$  y  $c$  se llaman congruentes, y en caso contrario incongruentes, y el número  $a$  se llama comódulo. Cada uno de los dos números se llama un residuo del otro en el primer caso, un no residuo en el segundo caso.*

La notación que adoptó Gauss es la misma que seguimos usando hoy,  $b \equiv c \pmod{a}$ , y a continuación procedió a construir un álgebra para la relación  $\equiv$  análoga al álgebra usual expresada en el lenguaje de la igualdad. Algunas, pero no todas las reglas estándares del álgebra, se pueden aplicar a la nueva situación. Por ejemplo, en el álgebra usual, en el anillo de los primeros enteros, si  $ax = ay$ , con  $a \neq 0$ , entonces se deduce que  $x = y$ , pero esta ley de cancelación no se verifica para las congruencias, como se ve fácilmente con un contraejemplo: si  $a = 3, x = 4$  e  $y = 7$ , se tiene que  $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 7 \pmod{9}$ . El divisor  $a$ , para que se pueda cancelar en una congruencia, ha de ser primo con el módulo. Por otra parte, si tenemos  $x \cdot y = 0$  podemos deducir en álgebra ordinaria que o bien  $x$ , o  $y$ , o *ambos*, son cero. Que éste no es el caso para congruencias se ve fácilmente del hecho que  $6 \cdot 5 \equiv 0 \pmod{15}$ , pero ni 6 ni 5 es congruente con cero módulo 15. Para que sea válida esta regla para congruencias, el módulo y los factores  $x$  e  $y$  deben ser primos entre sí. Otro ejemplo: en el álgebra usual la ecuación general de primer grado  $ax = b$ , con  $a, b, x$ , enteros y  $a \neq 0$ , tiene una solución como máximo. En cambio, una congruencia lineal puede tener varias soluciones distintas, como puede verse del hecho que  $x=1, x=4$  y  $x=7$  son soluciones de la congruencia  $6x \equiv 15 \pmod{9}$ . Sólo si  $a$  y  $m$  son primos entre sí podemos asegurar que  $ax \equiv b \pmod{m}$  tendrá una y sólo una solución menor que  $m$ . Por otra parte, la relación  $\equiv$  tiene las mismas tres propiedades fundamentales de reflexividad, simetría y transitividad que la relación  $=$ , es decir: 1)  $a \equiv a \pmod{m}$ ; 2) si  $a \equiv b \pmod{m}$  entonces  $b \equiv a \pmod{m}$ ; 3) si  $a \equiv b \pmod{m}$  y  $b \equiv c \pmod{m}$ , entonces  $a \equiv c \pmod{m}$ . Es decir, en resumen, tanto  $=$  como  $\equiv$  son relaciones de equivalencia.

## LA LEY DE RECIPROCIDAD Y LA FRECUENCIA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

En varios lugares, la obra de Gauss venía a coincidir con la de Legendre, y este último se dejó dominar por una celosa antipatía hacia el más joven y más brillante colega. En las *Disquisitiones*, por ejemplo, aparece la ley de reciprocidad cuadrática que había publicado Legendre un par de años antes. Gauss llamó a esta ley el *Theorema aureum*, o la joya de la aritmética; en trabajos posteriores, Gauss intentó demostrar teoremas análogos para las congruencias  $x^n \equiv p \pmod{q}$ , con  $n=3$  y 4, pero para estos casos descubrió que era necesario extender el significado del concepto de entero para incluir a todos los llamados “enteros de Gauss” o “enteros gaussianos”, es decir, los números complejos de la forma  $a+bi$ , con  $a$  y  $b$  enteros. Los enteros gaussianos forman un dominio de integridad como el de los enteros estándares, pero más general, evidentemente. Los problemas de divisibilidad se hacen aquí más complicados, ya que, por ejemplo, 5 no es primo, sino que es factorizable en el producto de los dos “primos”  $1+2i$  y  $1-2i$ . De hecho, ningún primo

natural de la forma  $4n+1$  es un “primo de Gauss”, mientras que los primos naturales de la forma  $4n-1$  siguen siendo primos en el sentido generalizado. En las *Disquisitiones* incluía Gauss el Teorema Fundamental de la Aritmética, uno de los principios básicos que continúa siendo válido en el dominio de integridad de los enteros gaussianos. De hecho, a cualquier dominio de integridad con la propiedad de factorización única se le conoce hoy con el nombre de “dominio de integridad gaussiano”. Una de las contribuciones de las *Disquisitiones* fue la de dar una demostración rigurosa del teorema, conocido desde Euclides, de que todo entero positivo mayor que 1 se puede expresar de una y sólo una manera (excepto por el orden de los factores) como un producto de los números primos.

No todo lo que descubrió Gauss sobre los números primos aparece en las *Disquisitiones*. En la última página de un ejemplar de una tabla de logaritmos que tenía desde que era un muchacho de 14 años, aparece escrita la siguiente críptica expresión en alemán

$$\text{Primzahlen unter } a(=\infty) \frac{a}{1a}$$

Esta es una formulación un tanto esotérica del famoso teorema de los números primos: el número de números primos menores que  $a$  tiende asintóticamente al cociente  $a/\ln a$  cuando  $a$  crece indefinidamente.

Legendre había estado muy cerca de anticipar este teorema, pero lo sorprendente es que si Gauss escribió esto, como suponemos que en efecto lo hizo, se reservó este bello resultado para sí mismo. No sabemos si tenía o no una demostración del teorema, y ni siquiera sabemos cuándo fue escrita la fórmula anterior. La distribución de los primos ha ejercido una verdadera fascinación sobre muchos matemáticos. En 1845, cuando Gauss era ya viejo, un profesor de París, Joseph L. F. Bertrand (1822-1900), conjeturó que si  $n > 3$  hay siempre al menos un número primo entre  $n$  y  $2n$  (o, más exactamente,  $2n-2$ ) inclusive. Esta conjetura, conocida como la “conjetura de Bertrand”, fue demostrada en 1850 por Pafnuti Tchebycheff (1821-1894) (o Chebychew o Chebichew o Tschelytschew, según las traducciones) de la Universidad de San Petersburgo. Tchebycheff era un rival de Lobachevsky en lo que se refiere al rango de primer matemático ruso de la época, y llegó a ser miembro extranjero del Institut de France y de la Royal Society de Londres. Tchebycheff, desconociendo evidentemente la obra de Gauss sobre los números primos,

consiguió demostrar que si  $\pi(n) \cdot \frac{\ln n}{n}$  tiende a un límite cuando  $n$  crece indefinidamente,

entonces este límite tiene que ser 1, pero no pudo demostrar la existencia del límite. Hasta dos años después de la muerte de Tchebycheff, en 1894, no se conoció ninguna demostración, pero en 1896 dos matemáticos, trabajando independiente uno del otro, consiguieron sendas demostraciones el mismo año. Estos dos matemáticos coincidieron también casualmente en alcanzar ambos una edad venerable. Uno de ellos fue el matemático belga C. J. de la Vallée-Poussin (1866-1962), que vivió casi 96 años, y el otro fue el francés Jacques Hadamard (1865-1963), que murió poco antes de cumplir los 98 años.

## LOS POLÍGONOS REGULARES CONSTRUCTIBLES

Los problemas relativos al número y distribución de los números primos han fascinado, como hemos dicho, a muchos de los matemáticos más importantes de la historia, desde Euclides o antes hasta nuestros días. Un teorema que podemos considerar como un profundo y difícil corolario al teorema de Euclides sobre la infinitud de los primos fue el que demostró un amigo de Gauss que le sucedió en Göttingen en 1855. Nos referimos a Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), el hombre que hizo más que ningún otro por extender las *Disquisitiones*. El teorema de Dirichlet afirma que no sólo el número de los primos es infinito, sino que si consideramos solamente los números naturales de una progresión aritmética indefinida

$$a, a+b, a+2b, \dots, a+nb, \dots$$

en la que  $a$  y  $b$  son primos entre sí, entonces incluso en este subconjunto relativamente “diseminado” de números naturales hay aún infinitos primos. La demostración que dio Dirichlet exigía complicadas herramientas de análisis, campo en el que el nombre de Dirichlet ha quedado asociado también al criterio llamado de Dirichlet para la convergencia uniforme de una serie de funciones. Entre otras contribuciones de Dirichlet a la teoría de números está la primera demostración del teorema conocido como conjetura de Bertrand, del que ya hemos hablado. No podemos entrar aquí en esas sutilezas cada vez más sofisticadas de la teoría de números del siglo XIX, pero sí tenemos que subrayar que el teorema de Dirichlet venía a mostrar que el dominio discreto de la teoría de números no parecía poderse estudiar aislado de la rama de la matemática que trabaja con variables continuas, es decir, que la teoría de números parecía exigir la ayuda del análisis. Gauss mismo, en sus *Disquisitiones*, había dado ya un sorprendente ejemplo del hecho que las propiedades de los números primos se infiltran de las maneras más inesperadas incluso en el dominio de la geometría.

Hacia el final de las *Disquisitiones* incluye Gauss el primer descubrimiento matemático importante que había hecho, es decir, la construcción del polígono regular de 17 lados, llevando el tema a su final lógico al demostrar cuáles de los infinitos polígonos regulares posibles se pueden construir con regla y compás y cuáles no. Los teoremas generales, tales como el que demuestra aquí Gauss, son siempre de una importancia teórica mucho mayor que un caso particular, por muy espectacular que éste pueda ser. Recordemos que Fermat creía que todos los números de forma  $2^{2^n} + 1$  eran primos, conjetura incorrecta, según lo demostró Euler. El número  $2^{2^2} + 1 = 17$  sí es primo, lo mismo que lo son  $2^{2^3} + 1 = 257$  y  $2^{2^4} + 1 = 65.537$ . Gauss había demostrado ya que el polígono de 17 lados es constructible, y por lo tanto se planteaba también de una manera natural la cuestión de si el polígono regular de 257 o de 65.537 lados se pueden construir por métodos euclídeos. Gauss contesta a esta pregunta en sentido afirmativo en las *Disquisitiones*, al demostrar que un polígono regular de  $N$  lados puede construirse con regla y compás si y sólo si el número  $N$  es de la forma  $N = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_r$ , con  $m > 0$  y  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , primos de Fermat distintos. Quedaba aún un aspecto del problema al que Gauss no dio respuesta, y que todavía no ha sido resuelto hasta hoy. Se trata de la pregunta ¿es finito o infinito el número de primos de Fermat? Para  $n=0, 1, 2, 3$  y  $4$  los números de Fermat son primos, mientras que para  $n=5, 6, 7, 8$  y  $9$  se sabe que *no son* primos, y parece posible al menos que haya

cinco y sólo cinco polígonos regulares constructibles de un número primo de lados, dos de ellos conocidos ya en la antigüedad y los tres que descubrió Gauss. Un amigo a quien Gauss admiraba mucho, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), profesor de matemáticas en Berlín, añadió una nueva conjetura sobre números primos a la teoría de números, al aventurar la hipótesis, no comprobada hasta hoy, de que todos los números de la forma  $2^2 + 1, 2^{2^2} + 1, 2^{2^{2^2}} + 1, 2^{2^{2^{2^2}}} + 1$ , etc., son primos. Se le atribuye a Gauss la afirmación de que “ha habido sólo tres matemáticos de excepcional importancia: Arquímedes, Newton y Eisenstein”. La cuestión de si Eisenstein, en el tiempo de duración de una vida normal, hubiera llegado a cumplir con predicción tan entusiasta, queda pendiente de conjetura, puesto que este joven matemático murió antes de cumplir los 30 años, siendo aún “Privatdozent”.

## LA ASTRONOMÍA Y LA LEY DE MÍNIMOS CUADRADOS

Gauss había planeado las *Disquisitiones* como una obra en dos volúmenes, pero lo cierto es que nunca llegó a escribir el segundo volumen. Aunque en una ocasión se refirió a la matemática como la reina de las ciencias y a la aritmética (es decir, la teoría de números) como la reina de las Matemáticas, durante los primeros años del siglo XIX, fue reclamada su atención por tantos otros temas interesantes. Entre los otros campos que cautivaron su atención tuvo un papel destacado la astronomía, a la que se vio conducido de una manera casi accidental. En las dos primeras décadas del siglo XIX, Gauss produjo un flujo permanente de trabajos sobre temas astronómicos, de los que destaca el tratado “*Theoria Motus Corporum Coelestium*” (1809), fue la biblia de los astrónomos planetarios durante un siglo. Más tarde se lamentaba de haber abandonado su “primer amor”. Exactamente el primer día del siglo XIX se descubrió un nuevo planeta o asteroide, al que se le puso por nombre Ceres, y que al cabo de unas semanas se perdió de vista de nuevo, debido a su tamaño pequeño. Gauss gozaba de una facilidad excepcional para el cálculo numérico, a la que venía a unirse la ventaja de su método de los mínimos cuadrados, y con estas armas se encontró al verdadero desafío que suponía el calcular, a partir de las pocas observaciones registradas del asteroide, la órbita que recorría en su movimiento. Gauss inventó un método para el cálculo de órbitas de cuerpos celestes a partir de un número limitado de observaciones, conocido como “método de Gauss”, que aún se utiliza para seguir la trayectoria de los satélites artificiales.

El resultado de los cálculos de Gauss fue un éxito resonante: a finales del año volvió a encontrarse el asteroide casi exactamente en la posición que indicaban dichos cálculos. Desde este momento la astronomía y la estadística contaron entre los intereses más serios de Gauss, que dedicó gran parte de los siguientes 20 años a cálculos astronómicos. Esta actividad está en contraste con la opinión expresada por Gauss de que “todas las medidas del mundo no equivalen a un solo teorema que produzca un avance importante en nuestra ciencia, la más grande de todas”. Sin embargo, a partir de entonces su fama en astronomía quedó tan sólidamente establecida como en matemáticas; como consecuencia de ello fue nombrado director del Observatorio Astronómico de Göttingen en 1807, puesto que ocupó durante unos 40 años. Gauss podría muy bien haber ocupado una cátedra universitaria de matemáticas, pero es probable que eligiera su cargo en el observatorio, no por preferencia

por la astronomía sino por aversión a la enseñanza. Gauss disfrutaba ayudando a unos pocos discípulos brillantes y entusiastas, pero la enseñanza rutinaria y elemental de la clase parece haberle desagradado.

## FUNCIONES ELÍPTICAS

El puesto de Gauss en el observatorio no le impidió, sin embargo, continuar haciendo importantes contribuciones a la matemática. En 1811 informaba a un astrónomo amigo, F. W. Bessel (1784-1846), de un descubrimiento que había hecho a lo que pronto se iba a convertir en un campo de investigación nuevo en las manos del matemático francés más importante de la época, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), y que hoy lleva su nombre. La teoría de funciones de una variable real la había desarrollado Lagrange, pero la teoría de funciones de una variable compleja esperaba aún los trabajos de Cauchy. Sin embargo, Gauss se dio cuenta de un teorema de una importancia fundamental en este territorio aún no explorado. Se trata del hecho siguiente: si en el plano complejo o de Gauss dibujamos una curva cerrada simple, y si la función  $f(z)$  de la variable compleja  $z=x+iy$  es analítica (es decir, tiene derivada) en todo punto de la curva y en todo punto interior, entonces la integral de línea de  $f(z)$  tomada a lo largo de la curva es cero.

Los resultados no publicados de Gauss pendían como una auténtica espada de Damocles sobre la matemática de la primera mitad del siglo XIX. Cuando algún otro matemático anunciaba un nuevo resultado importante, ocurría muy a menudo que Gauss había tenido ya la idea anteriormente, pero no se había molestado en publicarla. Entre los ejemplos más sorprendentes de esta situación está el del descubrimiento de las funciones elípticas, descubrimiento en el que estuvieron mezclados cuatro matemáticos de primera fila. Uno de ellos era Legendre, desde luego, que había estado casi 40 años estudiando las integrales elípticas de una manera casi aislada. Legendre desarrolló una gran cantidad de fórmulas en este contexto, algunas de las cuales recordaban en cierto sentido las relaciones entre las funciones trigonométricas inversas, algunas de las cuales ya eran conocidas desde mucho antes por Euler. Este hecho no es sorprendente, dado que la integral elíptica

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-K^2x^2)(1-x^2)}}$$

incluye la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

como caso particular para  $K=0$ . Sin embargo, quedaba para Gauss y dos de sus contemporáneos más jóvenes el mérito de aprovechar de una manera completa las ventajas de un punto de vista que facilita enormemente el estudio de las integrales elípticas. Si escribimos la integral

$$u = \int_b^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

como  $u = \arcsen v$ , entonces  $u$  viene expresada como función de la variable independiente  $v$  (puesto que  $x$  es la variable ligada de integración), pero resulta más ventajoso invertir los papeles de  $u$  y  $v$  eligiendo  $u$  como variable independiente. En este caso tendremos  $v = f(u)$  o, en el lenguaje trigonométrico usual,  $v = \sen u$ . Esta función  $v = \sen u$  es mucho más cómoda de manejar y tiene además una notable propiedad que  $u = \arcsen v$  no tiene: es una función periódica. Los papeles privados de Gauss muestran que quizá tan pronto como hacia el 1800 había descubierto ya la doble periodicidad de las funciones elípticas (o “lemniscáticas”). Sin embargo, hasta el 1827-1828 fue redescubierta esta notable propiedad por uno de los matemáticos más brillantes de todos los tiempos, Niels Henrik Abel (1802-1829), en una memoria publicada en el *Journal* de Crelle. El joven Abel murió cuando sólo tenía 26 años, dejando tras sí varios resultados muy profundos en álgebra y teoría de funciones.

## DISCUSIONES GENERALES ACERCA DE SUPERFICIES CURVAS

Alrededor de 1820 el gobierno de Hannover le pidió un estudio geodésico del reino, y varios aspectos de su labor, incluyendo un extensivo trabajo de campo y muchas triangulaciones tediosas, le ocuparon durante algunos años. Es natural suponer que una mente como la suya se hubiera sentido asfixiada por tal cometido, pero las grandes ideas científicas surgen por extraños caminos. Esta labor aparentemente carente de interés desembocó en una de las aportaciones más profundas y de mayor alcance a la matemática pura, sin la cual la teoría de la relatividad general de Einstein hubiese sido imposible.

La tarea encomendada a Gauss se refería a la medición precisa de grandes triángulos sobre la superficie terrestre. Esto proporcionó el estímulo que le condujo a las ideas de su artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827), en él desarrolló la geometría diferencial intrínseca de superficies curvadas arbitrarias. En ese trabajo introdujo coordenadas curvilíneas  $u$  y  $v$  sobre una superficie; obtuvo la forma diferencial cuadrática fundamental  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  para el elemento de longitud de arco  $ds$ , que hace posible determinar las curvas geodésicas; y formuló los conceptos de curvatura gaussiana y curvatura integral. Sus principales resultados fueron el famoso *theoremata egregium*, según el cual la curvatura gaussiana depende sólo de  $E$ ,  $F$  y  $G$ , siendo por tanto invariante bajo transformaciones que preserven la distancia intrínseca, y el teorema de Gauss-Bonnet sobre curvatura integral para el caso de un triángulo geodésico, que en su versión general constituyen el hecho central de la moderna geometría diferencial global. Además de sus descubrimientos específicos, la línea medular de la intuición de Gauss radica en la palabra *intrínseca*, ya que mostró cómo estudiar la geometría de una superficie operando sólo sobre la propia superficie sin prestar atención al espacio al que se halla inmersa. Para precisar más este aspecto, imaginemos una criatura bidimensional inteligente que habita en una superficie pero no es consciente de la tercera dimensión o de cualquier otro concepto exterior a su superficie. Si esta criatura es capaz de moverse por la superficie midiendo distancias y de determinar los caminos más cortos (geodésicos) entre dos puntos, entonces será capaz de medir también la curvatura gaussiana en cualquier punto y de crear una rica geometría sobre la superficie. Y esa geometría será euclídea (plana) si y sólo si la curvatura gaussiana es cero en todas partes. Cuando estas nociones se generalizan a más de

dos dimensiones, abren la puerta a la geometría riemanniana, al análisis tensorial y a las ideas de Einstein.

Gauss tuvo también una gran cantidad de contribuciones en diferentes campos de la física además de la astronomía, como ya se comentó, principalmente en electricidad y magnetismo. Tras una visita de una semana a Gauss, Jacobi escribió a su hermano: “Las matemáticas estarían en una posición bien diferente si la astronomía aplicada no hubiese desviado a este genio colosal de su carrera”.

## EL FINAL DEL GENIO

A principios de 1855 empezó a sufrir de dilatación cardiaca, disnea y algunos síntomas de hidropesía. Después de una intensa lucha por la vida, murió pacíficamente en la madrugada del 23 de febrero de 1855, sin haber cumplido los 78 años de edad. Gauss está enterrado en Göttingen, donde vivió la mayor parte de su vida. El cerebro de Gauss, con sus numerosas y profundas circunvoluciones, se encuentra en una colección anatómica en la Universidad de Göttingen. La mayor parte de sus biógrafos y muchos científicos coinciden en aseverar que Arquímedes, Newton y Gauss han sido los más grandes matemáticos de todos los tiempos. Como tributo a la monumental obra de Gauss, se le conoce como **el príncipe de las matemáticas**.

## REFERENCIAS

- [1] Boyer, Carl B. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza editorial. Págs. 627-639.
- [2] Noreña, Francisco (1992). *El develador de las incógnitas Carl F. Gauss*. Pangea editores, Consejo Nacional para la Cultura y las Artes
- [3] Simmons, George F. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Editorial McGraw-Hill. Págs. 229-237.

## SITIOS EN RED

- [4] O'Connor J.J., Robertson E.F. *Johann Carl Friedrich Gauss*.  
<http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gauss.html>.
- [5] <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/Links/MathBiog.html>.