

UNIVERSIDAD DE SONORA  
Curso Propedéutico de Matemáticas  
Área de Ciencias Biológicas y de la Salud



**UNIVERSIDAD DE SONORA**



**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

**CURSO PROPEDÉUTICO DE MATEMÁTICAS  
PARA ESTUDIANTES DEL ÁREA DE  
CIENCIAS BIOLÓGICAS Y DE LA SALUD**

**Recopilación:**

Germán Caudana Camacho

Marcelino Dórame Aguilar

Elizabeth Félix Mendivil

Myriam Virginia Morales González

Héctor Rodolfo Rodríguez Solórzano

María Teresa Valenzuela Sastré

Primera Versión

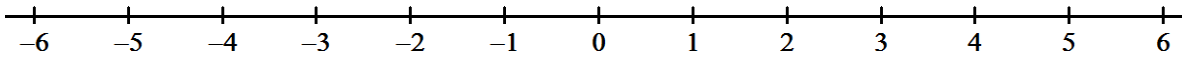
Agosto de 2009

**MODULO I. ARITMETICA E INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA**

† *Números Reales.*

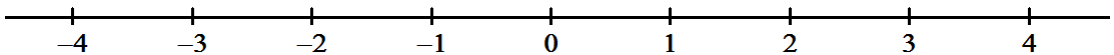
1. Localiza en la siguiente recta numérica los siguientes números:

$$6, -4, \frac{6}{4}, \frac{8}{7}, \frac{20}{3}, -\frac{4}{3}, \sqrt{3}, \pi, 0$$



2. Localiza la posición aproximada de los siguientes puntos en la recta numérica:

$$-3.8, 1.2, 2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{3}, -1.2, -0.3, 2\frac{2}{6}$$



3. Identifica el conjunto al que pertenece cada uno de los números siguientes y coloca delante de ellos la letra de dicho conjunto (el símbolo  $\in$  se lee como “pertenece a”).

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $12 \in$ _____             | f) $0.175 \in$ _____         |
| b) $-25 \in$ _____            | g) $-\frac{1}{10} \in$ _____ |
| c) $-1.25 \in$ _____          | h) $118 \in$ _____           |
| d) $-\frac{12}{15} \in$ _____ | i) $12.125 \in$ _____        |
| e) $-128 \in$ _____           | j) $-234.5 \in$ _____        |

4. Establece la relación correcta entre los siguientes pares de números utilizando las palabras “mayor que” y “menor que”:

- |                                        |                            |
|----------------------------------------|----------------------------|
| a) $8$ _____ $-4$                      | e) $-1$ _____ $0$          |
| b) $-10$ _____ $-8$                    | f) $0$ _____ $7$           |
| c) $\frac{1}{6}$ _____ $\frac{3}{2}$   | g) $\frac{0}{2}$ _____ $2$ |
| d) $-\frac{3}{4}$ _____ $-\frac{7}{9}$ | h) $0.467$ _____ $0$       |

† *Operaciones aritméticas*

5. Realiza las operaciones indicadas

- |                                  |                                                        |
|----------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $-19 + (-7) =$ _____          | i) $(-54) \div (-3) =$ _____                           |
| b) $-15 + 9 =$ _____             | j) $(-56) \div 8 =$ _____                              |
| c) $12 + (-18) =$ _____          | k) $7 - 5 + 3 - 5 =$ _____                             |
| d) $13 - 8 =$ _____              | l) $6 + 21 \div 3 - 5 =$ _____                         |
| e) $5 + (-2) + (-8) + 4 =$ _____ | m) $4 + 3^3 + 3 \times 2 - 2^2 =$ _____                |
| f) $-8 \times 5 =$ _____         | n) $(3^2 + 5^2) \times (3^3 - 2^2) =$ _____            |
| g) $(-9)(-8) =$ _____            | o) $28 - 5 \times 3 + 2^3 + 20 =$ _____                |
| h) $42 \div (-6) =$ _____        | p) $\sqrt{100} \times 30 - 2^2 - 8^2 \times 2 =$ _____ |

6. Expresa como fracción los siguientes números enteros:

- |           |            |             |
|-----------|------------|-------------|
| a) $5 =$  | c) $8 =$   | e) $10 =$   |
| b) $12 =$ | d) $100 =$ | f) $1234 =$ |

a) Clasifica las siguientes fracciones como propias e impropias:

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| a) $\frac{3}{4} =$ | d) $\frac{7}{9} =$   |
| b) $\frac{1}{2} =$ | e) $\frac{15}{16} =$ |
| c) $\frac{5}{3} =$ | f) $\frac{5}{8} =$   |

b) Convierte las siguientes fracciones mixtas a impropias:

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| a) $3\frac{1}{2} =$ | d) $6\frac{5}{8} =$    |
| b) $5\frac{2}{5} =$ | e) $5\frac{2}{7} =$    |
| c) $6\frac{2}{3} =$ | f) $10\frac{10}{20} =$ |

c) Escribe al menos una fracción equivalente a la dada:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| a) $\frac{3}{4} =$  | d) $\frac{35}{7} =$ |
| b) $\frac{5}{6} =$  | e) $\frac{7}{35} =$ |
| c) $\frac{18}{9} =$ | f) $\frac{9}{54} =$ |

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área de Ciencias Biológicas y de la Salud**

d) Realiza las siguientes operaciones:

a)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} =$

g)  $\left(-\frac{6}{5}\right)7 =$

b)  $\frac{5}{3} - \frac{1}{12} =$

h)  $(-1)\left(\frac{3}{4}\right)(0) =$

c)  $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{4}\right) =$

i)  $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{4}{5}} =$

d)  $\frac{3}{-4} \div 8 =$

j)  $-\frac{4}{\frac{2}{3}} =$

e)  $\frac{1}{5} \div \frac{5}{3} =$

f)  $3\frac{6}{5} + 2\frac{1}{3} =$

k)  $\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{2} + 5\left(\frac{1}{5} + 3\right)\right] =$

- e) Una oruga subió a la punta de un mástil de 22 metros de altura. Si en cada intento subía 4 m y resbalaba 1m. ¿Cuántos intentos necesito para llegar a la punta?
- f) En el laboratorio de QB tienen varias parillas de calentamiento múltiple para matraces con las siguientes características, 3 parillas con 7 quemadores, 5 parillas con 2 quemadores y 4 parillas con 10 quemadores cada una. ¿Cuántos quemadores hay en total en el laboratorio de QB?
- g) La temperatura de la ciudad de Monterrey es de 17°C y se estima que descenderá a razón de 2°C por hora. ¿Cuál será la temperatura estimada para dentro de 12 horas?.
- h) Con dos litros de alcohol, ¿Cuántos vasos de un cuarto de litro pueden obtenerse?
- i) En el grupo de Alicia se formaron seis equipos para trabajar en el laboratorio. El grupo dispone de  $\frac{3}{5}$  partes de cierto reactivo que necesitan repartirse en partes iguales para poder realizar la practica de laboratorio de ese día. ¿Qué porción recibió cada equipo?
- j) Un cable media  $18\frac{1}{4}$  m de largo y se utilizaron  $5\frac{1}{3}$  m, ¿Qué cantidad de cable queda?
- k) Al laboratorio de patología de la universidad ha llegado una donación procedente de un hospital local, la cual consiste en un tumor canceroso de  $1\frac{1}{2}$  kilogramos de

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área de Ciencias Biológicas y de la Salud**

peso y se usara ese día  $\frac{5}{6}$  de kilogramos para que los alumnos practiquen, ¿Cuál es la cantidad de tumor que quedara sin usar?

- l) El tesista Resendiz obtuvo una beca ya iniciado el año escolar si al mes recibirá \$2,500 pesos, ¿Cuánto será en total si solo le pagaran  $10\frac{3}{5}$  de meses?
- m) Un grupo de inversionistas locales ha convoco a la población estudiantil universitaria a participar en el evento “estudiante hoy, mañana empresario”, al proyecto ganador se le entrego un premio en efectivo, la única condición es entregar las  $\frac{3}{7}$  partes a su institución de procedencia y el resto repartirlo entre los integrantes del equipo. El premio fue de \$80,000.00, y el equipo ganador esta integrado por 3 estudiantes, ¿Cuánto le toco a cada uno y cuanto a su institución de procedencia?

† **Exponentes y radicales.**

7. Realiza las operaciones indicadas y simplifica:

a)  $4^{-3} =$

b)  $\frac{a^{-5}}{b^{-4}} =$

c)  $2^3 \cdot 2^{-2} =$

d)  $\frac{d^{-4}}{d^7} =$

e)  $\frac{b}{\frac{4}{b^3}} =$

f)  $\left(\frac{x}{y^3}\right)^2 =$

g)  $\left(\frac{a^{-2}b^0}{a^7b^2}\right)^{-2} =$

h)  $d^{-20} \cdot d^{20} =$

i)  $\sqrt{8a^3b^5} =$

j)  $\sqrt{108} =$

k)  $\sqrt[4]{64} =$

l)  $\sqrt[6]{49x^6} =$

m)  $8^{\frac{-2}{3}} =$

† **Regla de tres**

8. Para alimentar 8 ratas de laboratorio se necesitan 7.4 Kg. de alimento al mes. ¿Cuántos kilogramos de alimento se necesitaran para alimentar 15 ratas al mes?
9. Si se pueden comprar 3 gansitos por 21 pesos, con \$105 pesos cuantos gansitos se pueden comprar.
10. Cierta reacción química tarda 6 días para alcanzar el 75% de su proceso final, cuantos días tardara el proceso si continua desarrollándose al mismo ritmo?
11. Si 3 huevos cuestan \$50. ¿Cuánto costara una docena de huevos?
12. Un palo de 1.50 metros de longitud producirá una sombra de 4.50 metros. ¿Cuál será la altura del un edificio que a la misma hora origina una sombra de 75 metros?
13. Un grupo formado por 9 obreros puede hacer una obra en 6 días, ¿Cuántos obreros se necesitaran para hacer la misma obra en 3 días?
14. Un automóvil que lleva una velocidad de 60 Km/h tarda 4 horas en recorrer el trayecto entre dos ciudades. ¿Cuánto tiempo hubiera tardado si su velocidad hubiera sido de 80 Km/h?
15. Una pieza de tela tiene una longitud de 12 metros y una anchura de 50 cm. ¿Cuál será la longitud de otra pieza de tela que tiene la misma superficie sabiendo que su anchura de 60 cm?
16. Los  $\frac{2}{3}$  de la capacidad de un depósito son 60 litros. ¿Cuál será la capacidad de los  $\frac{5}{6}$  del mismo depósito?
17. Un grifo vierte 160 litros de agua en 4 minutos. ¿Cuántos litros verterá en 6 minutos?
18. Si 7 latas de de fertilizante cuestan 280 pesos. ¿Cuánto costaran 12 latas de fertilizante?
- 19.- Un comerciante compro 12 Kg. De café por \$96. ¿Cuál es el costo de 5 kg. de café?
- 20.- Una calle que mide 80 metros de largo y 6 metros de ancho está pavimentada por 12000 adoquines. ¿Cuántos adoquines se necesitaran para pavimentar otra calle de 60 metros de largo y 4 metros de ancho?

**21. Operaciones algebraicas.**

- a. Seis personas recolectaron muestras de naranjas que colocaron en una canasta. Las personas recolectaron un tercio, un octavo, un cuarto y un quinto respectivamente del contenido de naranjas de dicha canasta. La quinta persona obtuvo 10 naranjas y una la sexta. Encuentra el número total de naranjas recolectadas.

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área Ciencias Biológicas y de la Salud**

- b. Tres muchachos ganan en total \$5400. Enrique gana \$200 menos que Eduardo y Joaquín dos veces más que Enrique. Halla lo que cada uno gana.
- c. Reduce términos semejantes y realiza las operaciones indicadas:
1.  $3b^4 - 2b + 2b + b^4 =$
  2.  $6b^2 + 5bc^2 + 2b^2 - 3bc^2 =$
  3.  $(4y + 3)(y^2 + 6y - 3) =$
  4.  $(2x^3 + 3x)(3x^2 - 4x) =$
  5.  $(x^2 - 5x - 84) \div (x + 7) =$
  6.  $(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) \div (x^2 - x + 2) =$

**Serie de Ejercicios.**

22. Utilice Números Reales para escribir las cantidades dadas.
- a) Una ganancia de 20 yardas en un juego de fútbol americano
  - b) Una pérdida de 10 yardas en un juego de fútbol americano
  - c) El Mar Muerto tiene 1312 pies bajo el nivel del mar
  - d) La temperatura en Spearfish, Dakota del Sur, ascendió de 4 °F bajo cero hasta 45 °F sobre cero en un período de 2 minutos.
23. La mayor variación de temperatura en un período de 24 horas ocurrió en Montana. La temperatura cambió de 44 °F a -56 °F. ¿Cuántos grados descendió la temperatura?
24. Los cambios de temperatura (en grados Celsius) por hora en cierta ciudad, son:
- |        |     |
|--------|-----|
| 1 p.m. | + 2 |
| 2 p.m. | + 1 |
| 3 p.m. | - 1 |
| 4 p.m. | - 3 |

Si la temperatura era inicialmente de 15 °C., ¿Cuál era a las 4 p.m.?

Use esta información para los problemas 25 y 26.

1 bistec	+ 45 calorías
1 rebanada de pan	+ 65 calorías
Carrera (1 min.)	- 15 calorías
Natación (1 min.)	- 7 calorías

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área Ciencias Biológicas y de la Salud**

25. Si una persona come 2 bisteces y luego corre 5 minutos; ¿Cuál es la ganancia o pérdida de calorías?

Si una persona come 2 bisteces con 2 rebanadas de pan y luego corre 15 minutos, ¿Cuál es la ganancia o pérdida de calorías?

26. Si  $A$  es su edad, la tasa de pulsos mínimos que debería mantener durante actividades aeróbicas es  $0.72(220 - A)$ . ¿Cuál es la tasa de pulsos mínima que debería mantener si usted tiene:

- a) 20 años de edad?
- b) 45 años de edad?

27. Si  $A$  es su edad, la tasa de pulsos máxima que debería mantener durante actividades aeróbicas es  $0.88(220 - A)$ . ¿Cuál es la tasa de pulsos máxima que debería mantener si usted tiene:

- a) 20 años de edad?
- b) 45 años de edad?

Determinación de la dosis (cantidad) correspondiente de medicamentos para niños a partir de la dosis para adulto.

**Regla de Morphy** (para niño de 2 años):

$$(\text{edad en meses} \bullet \text{Dosis para adulto}) \div 150 = \text{Dosis para niño}$$

**Regla de Clarke** (para niños mayores de 2 años)

$$(\text{peso del niño} \bullet \text{Dosis de adulto}) \div 150 = \text{Dosis para niño}$$

**Regla de Young** (para niños entre 3 y 12 años)

$$(\text{edad} \bullet \text{Dosis de adulto}) \div (\text{edad} + 12) = \text{Dosis para niño}$$

28. Supongamos que un niño tiene 10 meses de edad y la dosis para un adulto de aspirina es una tableta de 75 miligramos. ¿Cuál será la dosis para niños?

29. Si un niño de 7 años pesa 75 libras y la dosis de adulto es de 4 tabletas al día, ¿Cuál será la dosis para niños?

30. Supongamos que un niño tiene 6 años y la dosis para un adulto de un antibiótico es de 4 tabletas cada 12 horas. ¿Cuál será la dosis para niños?

31. *Su peso y su vida.* El médico le ha comentado que está un poco pasado de peso. El “umbral de peso”  $T$  (en libras) para una persona entre los 40 y 49 años está definido como “el peso crucial arriba del cual el riesgo de mortalidad asciende de manera astronómica”. La fórmula que vincula  $T$  y la altura  $h$  en pulgadas es

$$12.3\sqrt[3]{T} = h$$

Resolver está ecuación para T.

32. El pulso aproximado  $p$ , en pulsaciones por minuto, de un adulto que mide  $t$  pulgadas de altura, se expresa con la fórmula  $p = \frac{590}{\sqrt{t}}$ . Calcula el pulso aproximado de un adulto de 71 pulg. de estatura (1 pulg.=2.54 cm).
33. En química, cuando V es el volumen y P es la presión de cierto gas, encontramos la expresión  $(v_2 - v_1)(CP + PR)$ , con C y R constantes. Utilice la propiedad distributiva para simplificar está expresión.



## Modulo II. PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En este módulo se expondrán algunos métodos que permiten efectuar mentalmente muchos tipos de productos y abreviar el proceso de multiplicación. De igual modo se expondrán algunos métodos para factorizar ciertos tipos de polinomios. Para la computación eficaz y rápida en álgebra, se requiere ser hábil en cada uno de estos procedimientos.

Se llama **Productos Notables** a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

**1. El cuadrado de la suma de dos cantidades** Elevar al cuadrado  $x+y$  equivale a multiplicar este binomio por si mismo y tendremos

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$$

Efectuando este producto, tenemos:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Es decir:

***El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda.***

- Ejemplo1: Desarrollar  $(x+4)^2$

**R.  $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$**

- Ejemplo2: Desarrollar  $(4a+5b^2)^2$

R.  $(4a + 5b^2)^2 = 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4$

Escribir por simple inspección, el resultado de:

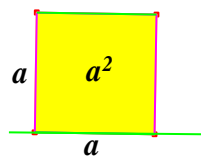
1.  $(m+3)^2$
2.  $(6a+b)^2$
3.  $(4ab^2+5xy^3)^2$
4.  $(m+3)^2$
5.  $(4m^5+5n^6)^2$

### Representación gráfica del cuadrado de la suma de dos cantidades

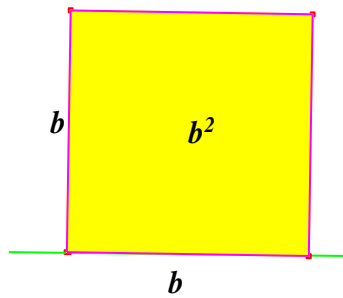
El cuadrado de la suma de dos cantidades puede representarse geoméricamente cuando los valores son positivos.

Sea  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

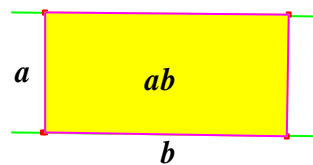
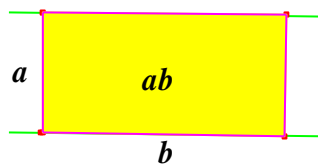
Construimos un cuadrado de  $a$  unidades de lado, es decir de lado  $a$ :



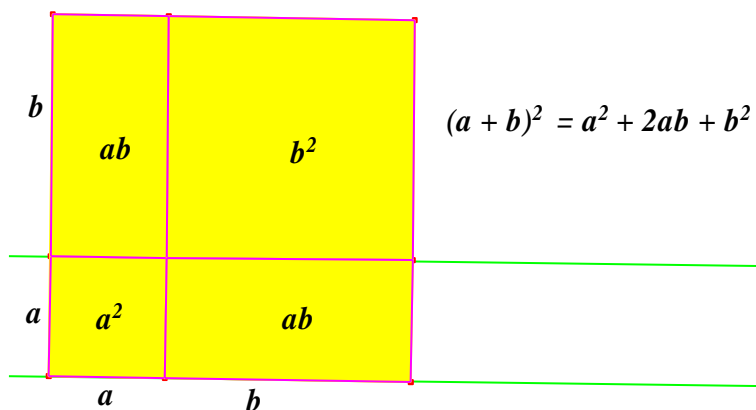
Construimos un cuadrado de  $b$  unidades de lado, es decir de lado  $b$ :



Construimos dos rectángulos de largo  $a$  y ancho  $b$



Uniendo estas cuatro figuras como se indica en el siguiente dibujo, formaremos un cuadrado de  $(a + b)$  unidades de lado. El área de este cuadrado es  $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$ , y como puede verse en el siguiente dibujo, esta área está formada por un cuadrado de área  $a^2$ , un cuadrado de área  $b^2$  y dos rectángulos de área  $ab$  cada uno o sea  $2ab$ .



## 2. Producto de la suma y la diferencia de dos cantidades

Sea el producto  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Lo que nos dice que

***La suma de dos cantidades multiplicada por la diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.***

- Ejemplo 1. Efectuar  $(a + x)(a - x)$ .

$$(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$$

- Ejemplo 2. Efectuar  $(2a + 3b)(2a - 3b)$

$$(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$$

Escribir por simple inspección, el resultado de:

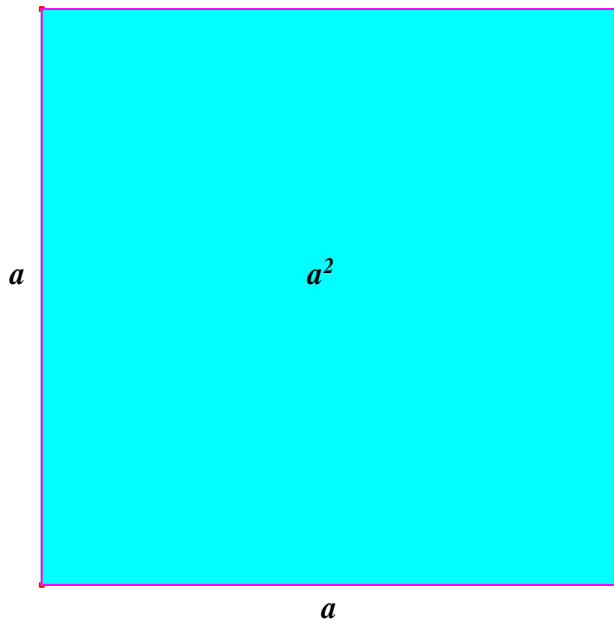
1.  $(m+3)(m-3)$
2.  $(6a+b)(6a-b)$
3.  $(4ab^2+5xy^3)(4ab^2-5xy^3)$
4.  $(m+3)(m-3)$
5.  $(4m^5+5n^6)(4m^5-5n^6)$

## Representación grafica del producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades puede representarse geoméricamente cuando los valores de dichas cantidades son positivas.

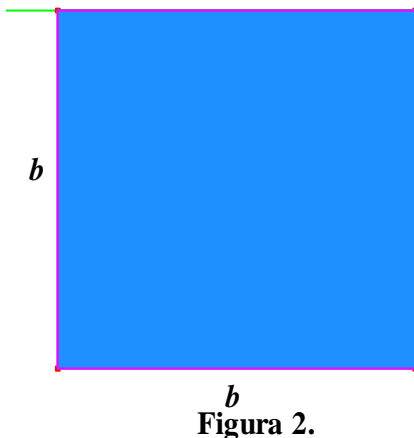
Sea  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Construimos un cuadrado de  $a$  unidades de lado, es decir de lado  $a$  como se muestra en la **figura 1**:



**Figura 1.**

Construimos un cuadrado de  $b$  unidades de lado, es decir de lado  $b$  como se muestra en la **figura 2**.



**Figura 2.**

Al cuadrado de lado  $a$  le quitamos el cuadrado de lado  $b$ , y trazando la línea de puntos obtenemos el rectángulo  $c$ , cuyos lados son  $b$  y  $(a - b)$ , como se observa en la **figura 3**.

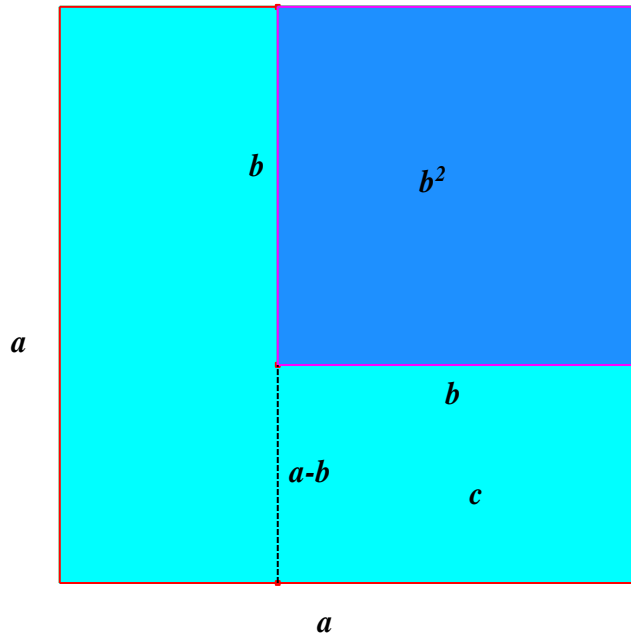


Figura 3.

Si ahora trasladamos el rectángulo  $c$  en la forma indicada en la flecha de la **figura 4**, obtenemos el rectángulo **ABCD**, cuyos lados son  $(a + b)$  y  $(a - b)$

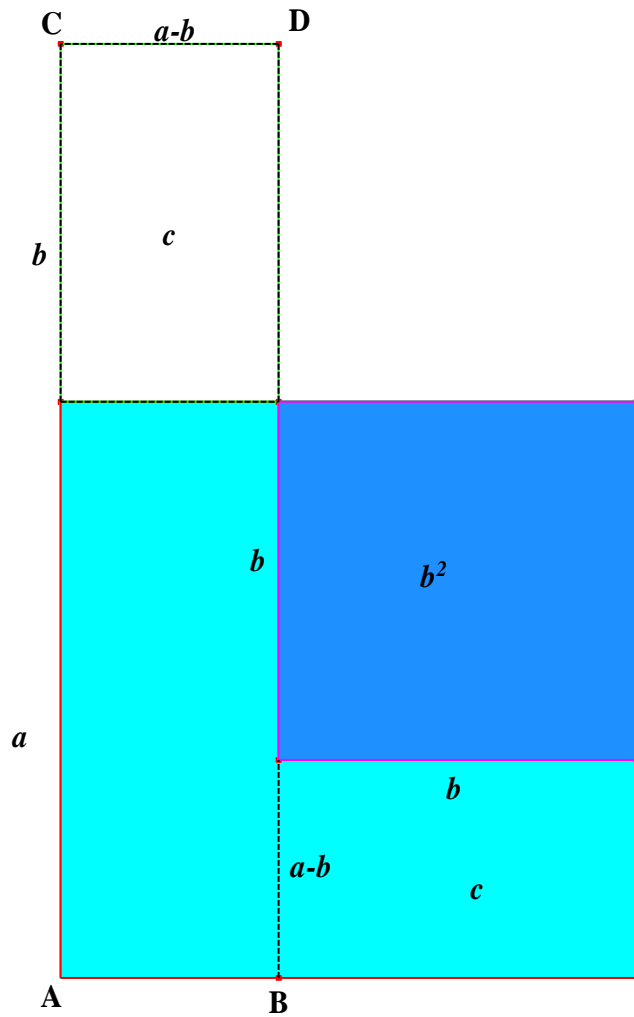


Figura 4.

y cuya área será:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Como se muestra en la **figura 5**

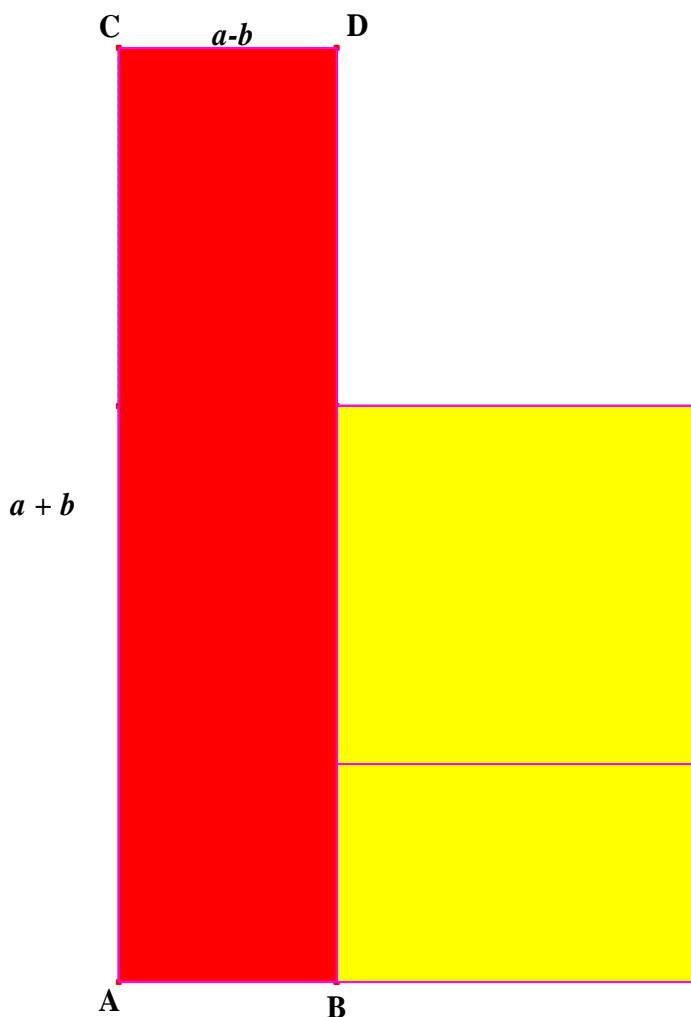


Figura 5

### 3. EL CUBO DE UN BINOMIO

**3.a** Elevando al cubo  $(x + y)$ . Tendremos:

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y) = (x + y)^2(x + y) = (x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Lo que nos dice que

*El cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, más el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.*

**3.b** Elevando al cubo  $(x - y)$ .

$$\text{Tendremos } (x - y)^3 = (x - y)(x - y)(x - y) = (x - y)^2(x - y) = (x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Lo que nos dice que

*El cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.*

- Ejemplo 1. Desarrollar  $(a + 1)^3$ .  

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2(1) + 3a(1^2) + 1^3$$

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$
- Ejemplo 2. Desarrollar  $(x - 2)^3$ .  

$$(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3$$

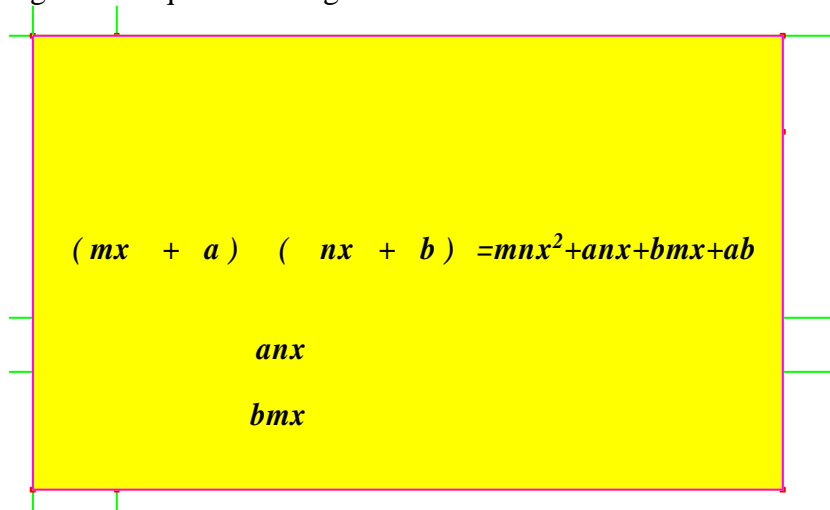
$$(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
- Ejemplo 3. Desarrollar  $(x^2 - 3y)^3$ .  

$$(x^2 - 3y)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(3y) + 3x^2(3y)^2 - (3y)^3$$

$$(x^2 - 3y)^3 = x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3$$

#### 4. El producto de dos binomios de la forma $(mx + a)(nx + b)$

El producto de dos binomios de esta forma, en los cuales los términos en  $x$  tienen distintos coeficientes, puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos que se indican en el siguiente esquema en lo general



Lo anterior lo ilustraremos con un ejemplo en lo particular  $(3x + 5)(4x + 6)$



- Ejemplo 1. Multiplicar  $(x + 7)(x - 2)$ .

Coeficiente del segundo término..... $7 - 2 = 5$   
 Tercer término..... $7 \times (-2) = -14$   
 Luego  $(x + 7)(x - 2) = x^2 + 5x - 14$ .

- Ejemplo 2. Efectuar  $(x - 7)(x - 6)$

Coeficiente del segundo término..... $(-7) + (-6) = -13$   
 Tercer término..... $(-7) \times (-6) = +42$   
 Luego  $(x - 7)(x - 6) = x^2 - 13x + 42$ .

Después de efectuados algunos ejercicios los pasos intermedios se pueden omitir y el producto escribirse directamente.

- Ejemplo 3. Efectuar  $(x^3 - 12)(x^3 - 3)$ .  
 $(x^3 - 12)(x^3 - 3) = x^6 - 15x^3 + 36$ .

#### RESUMEN DE PRODUCTOS NOTABLES

1.  $a(x + y) = ax + ay$
2.  $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
3.  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
4.  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
5.  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
6.  $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
7.  $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
8.  $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
9.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
10.  $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

RESUELVE EN CLASE DE MANERA INDIVIDUAL LOS SIGUIENTES PRODUCTOS NOTABLES:

- a)  $(x - 4)^2 =$
- b)  $(y + 9)^2 =$
- c)  $(2b + 5)^3 =$
- d)  $(6x - 1)^3 =$
- d)  $(2y - 6)(2y + 6) =$
- e)  $(x + 4)(x - 4) =$
- f)  $(3y + 2)(3y + 8) =$
- g)  $(5a^m + 16)(5a^m - 27) =$

### FACTORIZACIÓN:

**Se le llama factorización al proceso de encontrar los factores de una expresión algebraica que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión.**

#### Factor Común:

El tipo de factorización más sencillo es lo contrario de la ley distributiva de multiplicación. Este tipo de factorización se denomina eliminación de un factor común. Si cada término de una expresión contiene el mismo factor, entonces este es un factor común y puede factorizarse fuera al aplicar la ley distributiva.

$$ax+ay=a(x+y)$$

- Ejemplos: a)  $12xyz + 8x^2y^2z^2 - 4x^3y^3z^3 = 4xyz(3+2xyz-x^2y^2z^2)$   
b)  $84a^5b^4 - 108a^4b^5 + 420a^6b^3 = 12 a^4 b^3 (7ab-9b^2+35a^2)$

## II. Diferencia de Cuadrados:

En los productos notables se vio que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo.

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

Como se puede observar, para factorizar una diferencia de cuadrados se obtienen factores que son la suma y la diferencia de las cantidades.

#### Regla para factorizar una diferencia de cuadrados:

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplos:

Factorizar: a)  $1-a^2$                       b)  $16x^2-25x^4$

En el inciso a) La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de  $a^2$  es a. Multiplico la suma de estas raíces  $(1+a)$  por la diferencia  $(1-a)$  y tendremos:  $1-a^2=(1+a)(1-a)$

b)  $16x^2-25y^4$

En el inciso b) La raíz cuadrada de  $16x^2$  es  $4x$ ; la raíz cuadrada de  $25y^4$  es  $5y^2$ . Multiplicando la suma de estas raíces  $(4x+5y^2)$  por su diferencia  $(4x-5y^2)$  y tendremos:  
 $16x^2-25y^4=(4x+5y^2)(4x-5y^2)$

### III. Suma y Diferencia de Cubos:

Para factorizar la suma de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1° La suma de sus raíces cúbicas. 2° El cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda a raíz.

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

Para factorizar la diferencia de dos cubos perfectos se descompone en dos factores:

1° La diferencia de sus raíces cúbicas. 2° El cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Ejemplos: a)  $8x^3+125=(2x+5)(4x^2-10x+25)$

b)  $27x^3-y^6=(3x-y^2)(9x^2+3xy^2+y^4)$

### IV. TRINOMIOS.

#### Trinomio Cuadrado Perfecto:

Un trinomio es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de un binomio, o sea, el producto de dos binomios iguales. La regla para conocer si un trinomio es cuadrado perfecto. Cuando el primer término y el tercer termino tienen raíz cuadrada exacta y son positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer términos del trinomio y se separan estas raíces por el signo del segundo término. El binomio así formado, que es la raíz cuadrada del trinomio, se multiplica por sí mismo o se eleva al cuadrado.

Ejemplos: a)  $m^2+2m+1=(m+1)(m+1)=(m+1)^2$

b)  $4x^2-20xy+25y^2=(2x-5y)(2x-5y)=(2x-5y)^2$

#### Trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$

El trinomio de la forma  $x^2+(a+b)x+ab$  son trinomios que cumplen con las condiciones siguientes:

a) El coeficiente del primer término es 1.

b) El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

c) El tercer término es independiente de la letra que aparece en el 1° y 2° términos y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

Regla para factorizar un trinomio de la forma  $x^2+(a+b)x+ab$ .

a) El trinomio se descompone en dos factores binomios cuyo primer término es  $x$ , o sea la raíz cuadrada del primer término del trinomio

b) En el primer factor, después de x se escribe el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo factor, después de x se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del 2º término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.

c) Si los dos factores binomios tienen en el medio signos iguales se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son los segundos términos de los binomios.

d) Si los dos factores binomios tienen en el medio signos distintos se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor término de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

Ejemplos:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$$

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)$$

$$x^2+x-12=(x+4)(x-3)$$

$$x^2-x-12=(x-4)(x+3)$$

### **Trinomio de la forma $acx^2+(ad+bc)x+bd$**

Este trinomio se puede factorizar por ensayo y error. Considerando que ac es el término principal, bd es el término constante y ad+bc es el término de en medio.

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

Ejemplos:

$$6x^2+7x-20=(2x+5)(3x-4)$$

$$3x^2-8x+4=(3x-2)(x-2)$$

$$21x^2-41x+10=(7x-2)(3x-5)$$

$$2x^2-17xy+36y^2=(x-4y)(2x-9y)$$

### **Resumen de Factores Notables**

$$ax+ay=a(x+y)$$

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

## **TAREA MODULO 2**

### **I. Aplica uno de los Productos Notables**

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| 1) $(x+6)(x-6)=$   | 2) $(p+q)(p-q)=$     |
| 3) $(3a+b)(3a-b)=$ | 4) $(2x-6p)(2x+6p)=$ |

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área Ciencias Biológicas y de la Salud**

- |                                                                                    |                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 5) $(p+7)^2 =$                                                                     | 6) $(\frac{1}{2}a+b)^2 =$                          |
| 7) $(a-\frac{1}{2}y)^2 =$                                                          | 8) $(2p-\frac{3}{4}r)^2 =$                         |
| 9) $(\frac{2}{3}r-5t)^2 =$                                                         | 10) $(2a-5t^2)^2 =$                                |
| 11) $(a+2)(a+3) =$                                                                 | 12) $(x-5)(x+2) =$                                 |
| 13) $(4x+2)(3x+5) =$                                                               | 14) $(3m-n)(4m+2) =$                               |
| 15) $(7x+3y)(5x-2y) =$                                                             | 16) $4x(3x-5)^2 =$                                 |
| 17) $2a(4+a)^2 =$                                                                  | 18) $(x^2+9)(x+3)(x-3) =$                          |
| 19) $5(x+4)(x-4)(x^2+16) =$                                                        | 20) $(x+5)^3 =$                                    |
| 21) $(a-4)^3 =$                                                                    | 22) $(2a+b)^3 =$                                   |
| 23) $(2a-b)^3 =$                                                                   | 24) $(4r-s)^3 =$                                   |
| 25) $(2a-4)^3 =$                                                                   | 26) $(m+n)(m^2-mn+n^2) =$                          |
| 27) $(a+2)(a^2-2a+4) =$                                                            | 28) $(r-t)(r^2+rt+t^2) =$                          |
| 29) $(h-3)(h^2+3h+9) =$                                                            | 30) $(2x+b)(4x^2-2xb+b^2) =$                       |
| 31) $(3a-d)(9a^2+3ad+d^2) =$                                                       | 32) $(3a+\frac{2}{3}c)(9a^2-2ac+\frac{4}{9}c^2) =$ |
| 33) $(\frac{2e}{5}-\frac{5}{4}r)(\frac{4}{25}e^2+\frac{er}{2}+\frac{25}{16}r^2) =$ |                                                    |

**II. Factorice completamente los siguientes ejercicios**

- |                            |                         |
|----------------------------|-------------------------|
| 1) $12x^5y+8x^3y^2 =$      | 2) $10x^2-15 =$         |
| 3) $7b^2y+28b =$           | 4) $9ax^2+27bx =$       |
| 5) $p^2-r^2 =$             | 6) $x^2-4 =$            |
| 7) $4x^2-9 =$              | 8) $49y^2-64 =$         |
| 9) $81x^2-36t^6 =$         | 10) $a^4-81 =$          |
| 11) $121r^2-81t^2 =$       | 12) $16x^4-256y^2 =$    |
| 13) $x^2+7x+10 =$          | 14) $x^2-12x+27 =$      |
| 15) $x^2-27x+50 =$         | 16) $x^2-x-2 =$         |
| 17) $x^2-3x-10 =$          | 18) $r^2+10r+25 =$      |
| 19) $a^2+22a+121 =$        | 20) $f^2-30f+225 =$     |
| 21) $6y^2-7y+1 =$          | 22) $7t^2+9t+2 =$       |
| 23) $7b^2-34b-5 =$         | 24) $4e^2+19e-5 =$      |
| 25) $10x^2-19x+6 =$        | 26) $3r^2-18r-21 =$     |
| 27) $49t^4-105t^3+14t^2 =$ | 28) $6x^2-11xy-10y^2 =$ |
| 29) $8a^2-14ab-9b^2 =$     | 30) $4p^2+20pq+25q^2 =$ |
| 31) $8x^3-27^3 =$          | 32) $64p^3+125t^6 =$    |

**III. Aplicaciones de Productos Notables y Factorización**

- Física.** La energía cinética,  $EC$ , de un objeto está definida por la fórmula  $EC = \frac{1}{2}mv^2$ , donde  $m$  es la masa del objeto y  $v$  su velocidad. Si la velocidad de un objeto en cualquier instante  $t$ , está dada por la ecuación  $v=3t+1$ , encuentre una ecuación para expresar la energía cinética en términos de  $m$  y  $t$ ; desarrolle el resultado aplicando un producto notable.

2. **Electrónica.** La corriente  $i$  en amperes, en cierto circuito varía con el tiempo, en segundos, según la ecuación:  $i = 0.7t^2 - 2.1t - 2.8$ . Factorice el miembro derecho de esta ecuación.
3. **Termodinámica.** La cantidad de calor necesaria para fundir un objeto metálico esta dada por la fórmula  $Q = mc\Delta t + mL_f$ . Factorice el miembro derecho de esta ecuación
4. **Ecología.** Un centro ecológico quiere hacer un jardín experimental. Alrededor del jardín se colocará un límite de grava ancho uniforme. El jardín mide 10 metros de largo por 6 de ancho. Sin embargo sólo se cuenta con una grava suficiente para cubrir  $36 \text{ m}^2$  de profundidad. Para determinar el ancho del límite es necesario resolver la ecuación:
  - a) Simplifique esta ecuación
  - b) Factorice su respuesta



### Modulo III. ECUACIONES DE PRIMER Y DE SEGUNDO GRADO

Una expresión algebraica es una representación de las operaciones básicas de suma, sustracción, producto y división excepto entre 0, o la extracción de raíces sobre cualquier conjunto de variables y números.

Ejemplos:  $8x + 9$ ,  $\sqrt{y} + 4$ ,  $\frac{x^5 y^8}{z}$

Las aplicaciones de las Matemáticas con frecuencia conducen a ecuaciones, formulaciones en las que dos expresiones algebraicas son iguales.

Una ecuación lineal (o de primer grado) en una variable incluye sólo números reales y una variable.

$$ax + b = c \quad a, b, c \in R, \quad a \neq 0$$

Solución de la ecuación lineal: Si la variable en la ecuación se reemplaza por un número real que hace que la proposición sea verdadera.

Una ecuación se resuelve determinando su conjunto solución o el conjunto de todas las soluciones.

Ecuaciones equivalentes: Son ecuaciones con el mismo conjunto solución.

Por lo general, para resolver las ecuaciones se inicia con una ecuación determinada y se produce una serie de ecuaciones equivalentes más sencillas.

$$\begin{aligned} 8x + 1 &= 17 \\ 8x + 1 - 1 &= 17 - 1 \\ 8x &= 16 \\ \frac{8x}{8} &= \frac{16}{8} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Propiedad de la suma de igualdades:

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$$

Propiedad de la multiplicación de igualdades:

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 4x - 2x - 5 &= 4 + 6x + 3 \\ 2x - 5 &= 6x + 7 \\ 2x - 5 + 5 &= 6x + 7 + 5 \\ 2x &= 6x + 12 \\ 2x - 6x &= 6x + 12 - 6x \\ -4x &= 12 \\ \frac{-4x}{-4} &= \frac{12}{-4} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Pasos para resolver una ecuación lineal en una variable

- 1.- Elimine las fracciones,
- 2.- Simplifique cada lado por separado,
- 3.- Aísle los términos que incluyan la variable en un lado,
- 4.- Haga una transformación de modo que el coeficiente de la variable sea 1,
- 5.- Compruébela.

Ejercicios:  $2(k - 5) + 3k = k + 6$  ,  $\frac{x+7}{6} + \frac{2x-8}{2} = -4$

$$.06x + .09(15 - x) = .07(15)$$

Tipos de ecuaciones

Ecuación condicional: Una ecuación que posee un número finito (pero diferente de cero) de elementos en su conjunto solución.

Contradicción: Ecuación que no tiene solución. ( $\emptyset$ )

Identidad: Una ecuación que tiene un número infinito de soluciones.

Ejercicios:  $5x - 9 = 4(x - 3)$ ,  $5x - 15 = 5(x - 4)$ ,

$5x - 15 = 5(x - 3)$

La solución de un problema en el Álgebra con frecuencia depende del uso de un enunciado matemático o fórmula en la que se utiliza más de una letra para expresar una relación.

Ejemplo:  $d = rt$ ,  $I = prt$ ,  $P = 2L + 2W$

### Ejercicios.

Resuelva las ecuaciones dadas.

- 1)  $2x + 7 = 31$     2)  $5d - 3 = 4$     3)  $4r = r + 9$     4)  $\frac{1}{3}z - 5 = 3 - 4z$   
 5)  $6x + 3 = 18x - 1$     6)  $4c + 7 = 9c - 3$     7)  $\frac{1}{2}s - 2 = \frac{1}{3}s$   
 8)  $\frac{2t+1}{3} = 3t - 16$     9)  $\frac{3y-2}{4} + 3 = y - \frac{1}{2}$     10)  $\frac{2a-1}{a+2} = \frac{4}{5}$   
 11)  $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$     12)  $\frac{r}{5} = \frac{3}{10}r + 7$     13)  $\frac{s-3}{5} = \frac{4-2s}{3}$     14)  $\frac{y+4}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2y-2}{3}$   
 15)  $\frac{3z+5}{4} - \frac{2z-3}{8} = 3$     16)  $2x - \frac{x}{2} + \frac{x+1}{4} = 6x$     17)  $\frac{2}{3}s - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}s = s - \frac{5}{4}$   
 18)  $2(1 - k) = 3(1 + 2k) + 5$     19)  $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y+1}{4}$   
 20)  $1 - [2 - (3 - a)] = 4a - (6 + a)$     21)  $\left[3 + \left(5 - \frac{2}{3}m\right) + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2} + 4(m - 1)$   
 22)  $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y$     23)  $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$   
 24)  $(5 - 3x) - (-4x + 6) = (8x + 11) - (3x - 6)$   
 25)  $x - [5 + 3x - \{5x - (6 + x)\}] = -3$   
 26)  $16x - [3x - (6 - 9x)] = 30x + [-(3x + 2) - (x + 3)]$

Resuelva la ecuación para la variable indicada.

- 27)  $PV = nRT$ ; para R    28)  $F = G \frac{mM}{r^2}$  ; para m    29)  $\frac{ax+b}{cx+d} = 2$  ; para x  
 30)  $P = 2l + 2w$  ; para w    31)  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$  ; para  $R_1$

### Aplicaciones de las ecuaciones lineales.

Pasos para la resolución de problemas de aplicaciones

- 1.- Determine lo que se pide que encuentre; dale una variable,
- 2.- Escriba cualquier otra información pertinente,
- 3.- Escriba una ecuación,

- 4.- Resuelva la ecuación,
- 5.- Responda la o las preguntas del problema.
- 6.- Verifique.

Ejemplos:

1.- Los hermanos Jim y Gaylord Perry fueron dos lanzadores destacados en las ligas mayores durante las últimas décadas. Juntos ganaron 529 juegos. Gaylord ganó 99 juegos más que Jim. ¿Cuántos juegos ganó cada uno de los hermanos?.

Sea  $j$  = número de victorias de Jim  
 $j+99$  = número de victorias de Gaylor

$$j + (j + 99) = 529$$

$$2j + 99 = 529$$

$$2j = 430$$

$$j = 215$$

$$j + 99 = 314$$

2.- a) Si un Químico tiene 40 lt. de una solución de ácido al 35%, encuentre la cantidad de ácido puro en la solución.

b) Si se invierten \$1300.00 durante un año al 7% de interés simple, cuál es la cantidad de interés devengado al año?

c) Si un recipiente contiene 37 monedas de cuarto de dólar, cuál es el valor total de las monedas?

a)  $(40)(.35) = 14 \text{ lt.}$

b)  $(1300)(.07) = 91$

c)  $(37)(.25) = 9.25$

3.- a) La velocidad del sonido es de  $1088 \frac{\text{ft}}{\text{seg}}$  al nivel del mar y a  $32^\circ\text{F}$ . En estas condiciones, en 5 seg. cuánto recorre el sonido?

b) En distancias cortas, un elefante puede viajar a una velocidad de  $25 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}$ . Cuánto le tomaría al elefante recorrer un cuarto de milla?

c) En los juegos olímpicos de 1988, la ex URSS ganó la carrera de 400 metros de relevos con un tiempo de 38.19 seg., cuál fue la velocidad del equipo?.

a)  $(1088)(5) = 5440 \text{ pies}$

b)  $t = \frac{d}{v}$ ,  $t = \frac{\frac{1}{4}}{25} = \frac{1}{100} \text{ hora} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \text{ min} = \frac{180}{5} = 36 \text{ seg.}$

c)  $v = \frac{d}{t} = \frac{400}{38.19} = 10.47 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$

4.- Dos automóviles salen de Baton Rouge, Louisiana, al mismo tiempo y viajan hacia el este por la carretera interestatal 12. Uno se desplaza a una velocidad constante de  $55 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}$ , y el otro a una velocidad constante de  $63 \frac{\text{millas}}{\text{hora}}$ . ¿En cuántas horas será la distancia entre ellos de  $24 \text{ millas}$ ?

t=número de horas,  
 $63t$ ,  
 $55t$ ,  
 $63t - 55t = 24$   
 $8t = 24$   
 $t = 3$

La representación gráfica de de una ecuación lineal es una línea recta.

Por Geometría, con mínimo dos puntos en el plano cartesiano determinan una recta, si estos puntos son las intersecciones con los ejes coordenados (coordenadas en el origen), podemos trazar la gráfica correspondiente.

1.- Trazar la gráfica de la ecuación  $2x + 3y = 6$

Intersecciones con los ejes coordenados:

Si  $x = 0$ ,  $3y = 6$ , entonces  $y = 2$ . Por tanto el punto es  $(0,2)$

Si  $y = 0$ ,  $2x = 6$ , entonces  $x = 3$ . Por tanto el punto es  $(3,0)$ .

Entonces ya es posible trazar la recta de la ecuación.

2.-  $3x - 4y = 7$

Si  $x = 0$ ,  $-4y = 7$  entonces  $y = -\frac{7}{4}$ ; el punto es  $(0, -\frac{7}{4})$

Si  $y = 0$ ,  $3x = 7$  entonces  $x = \frac{7}{3}$ ; el punto es  $(\frac{7}{3}, 0)$ .

Por tanto, ya puedes trazar la grafica de la recta que pasa por esos puntos.

3.-  $2y - 3 = 0$

Como nada más aparece una variable, entonces la despejamos;

$$2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2}$$

La gráfica es una recta horizontal que pasa por  $y = \frac{3}{2}$ .

$$4.- \quad 2x + 8 = 0$$

Despejando la variable:

$$2x = -8$$

$$x = -4$$

La gráfica es una recta vertical que pasa por  $x = -4$ .

### Ejercicios.

Aplicaciones.

- 1) Dos hermanos ganaron \$1,300.00 durante sus vacaciones de verano. El mayor ganó  $1\frac{1}{2}$  veces más que el otro. Determínese la ganancia de cada uno.
- 2) En un grupo de 35 estudiantes había 10 hombres menos que el doble de mujeres. Determínese cuantos había de cada sexo.
- 3) ¿Cuánta agua se debe agregar a 20 onzas de una solución de alcohol al 15% para obtener alcohol al 10%?.
- 4) ¿Cuánta agua se debe agregar a 20 litros de una solución de alcohol al 20% para rebajarla al 8%?.
- 5) Calcule dos números cuya suma es 55 y cuyo producto es 684.
- 6) Un Químico necesita conocer el peso molecular, en  $\frac{\text{gramos}}{\text{mol}}$  de un sólido. Consultando en sus manuales, pudo deducir que la suma de la tercera parte y la mitad del peso molecular es de  $90 \frac{\text{gr}}{\text{mol}}$ . Calcula el peso molecular del sólido.
- 7) En 60 onzas de aleación para cajas de reloj, hay 20 onzas de oro. ¿Cuánto cobre se debe agregar a esa aleación para que una caja de reloj que pesa 4 onzas, con la aleación nueva contenga exactamente 1 onza de oro?.
- 8) Un plomero y su ayudante trabajan juntos para reemplazar la tubería de una casa vieja. El plomero gana 45 dólares por hora por su trabajo y 25 dólares su ayudante. El plomero trabaja el doble del tiempo que su ayudante y el cargo final por mano de obra es de 4025 dólares . ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en esta casa?.

- 9) El ancho de un jardín rectangular es de 25 pies. Si el área es de 1125 pies cuadrados, ¿cuál es el largo del jardín?.
- 10) El largo de un terreno de medio acre es cinco veces lo que mide el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones?.
- 11) Una escalera de  $19\frac{1}{2}$  pies se apoya contra una construcción. La base de la escalera está a  $7\frac{1}{2}$  pies a partir del edificio. ¿Qué altura del edificio alcanza la escalera?.
- 12) Juan tiene 12 monedas más que Enrique y entre ambos tienen 78. Determínese cuántas monedas tiene cada uno.
- 13) Durante su carrera en las ligas mayores, Hank Aaron lanzó 41 jonrones más que Babe Ruth en toda su carrera. Entre los dos colocaron 1459 jonrones. ¿Cuántos jonrones colocó Babe Ruth?.
- 14) Dentro de la ciudad, cierto automóvil rinde 6 kms por litro; en cambio en carretera rinde 8.5 kms por litro. Si el automóvil consumió 90 litros en un recorrido de 690 kms. Determínese que parte del recorrido fue en la ciudad.
- 15) Un actor de cine, decidido a no revelar su edad, le dijo el siguiente acertijo a un articulista de chismes: “Hace siete años, yo tenía once veces la edad de mi hija. Ahora tengo cuatro veces la edad de ella”. ¿Cuántos años tenía el actor?.

Representa gráficamente las ecuaciones dadas.

- |                       |                    |                                           |
|-----------------------|--------------------|-------------------------------------------|
| 16) $x + y = 3$       | 17) $3x - 2y = 12$ | 18) $x + 3y = 0$                          |
| 19) $2x - 5y = 0$     | 20) $3x - 4y = 12$ | 21) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$ |
| 22) $3x + 4y - 1 = 0$ | 23) $4x + 5y = 10$ | 24) $-3x - 5y + 30 = 0$                   |
| 25) $3x + y = -2$     | 26) $2x - y = 3$   | 27) $4y - 8 = 0$                          |
| 28) $8x - 4y - 4 = 0$ | 29) $6x - 3y = -6$ | 30) $-4x - 5y - 1 = 0$                    |

### Sistemas de ecuaciones

Un conjunto de ecuaciones simultáneas que tienen muchas variables, se llama sistema de ecuaciones.

Ecuación lineal generalizada:  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ,  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$  no todos cero.

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

donde,  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ .

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar los valores de  $x$  y  $y$ , tales que cumplan con las dos ecuaciones dadas. No siempre es posible eso, por tanto, hay tres casos posibles de soluciones:

**Solución única:** cuando existen un valor para  $x$ , y un valor para  $y$  que cumplan con el sistema. Geométricamente la solución se obtiene en el punto donde las dos rectas se cortan

**Infinidad de soluciones (Dependientes):** Cuando una ecuación es un múltiplo de la otra; es decir, que existe un número real diferente de cero, que multiplica a una ecuación y se obtiene la otra ecuación del sistema. Geométricamente, las dos ecuaciones se representan gráficamente en una sola recta.

**Inconsistente (no tiene solución):** cuando no existen un valor para  $x$ , y un valor para  $y$  que cumplan con el sistema. En este caso, las dos rectas nunca se cortan.

Veamos usando ejemplos, los métodos para resolver estos sistemas de ecuaciones.

Método de eliminación:

$$\begin{array}{l} 1.- \quad 2x + 3y = 2 \\ \quad \quad x - 3y = 10 \end{array}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\begin{array}{l} 3x = 12 \\ x = 4 \end{array}$$

Sustituyendo  $x = 4$  en la segunda ecuación y despejando  $y$  obtenemos:

$$\begin{array}{l} 4 - 3y = 10 \\ -3y = 6 \\ y = -2 \end{array}$$

Así, la solución del sistema es el punto  $(4, -2)$ .

Aquí la opción a utilizar es eliminar una variable de ambas ecuaciones, multiplicando por un número real adecuado para que esa variable a eliminar tenga el mismo coeficiente y diferente signo ( haríamos una suma de ecuaciones) o bien mismo coeficiente y mismo signo (haríamos una resta de ecuaciones), para así obtener el valor de la variable que no se elimina.

Conociendo el valor de una de las variables, sustituimos en cualesquiera de las ecuaciones del sistema y encontramos el valor que falta.

$$\begin{array}{l} 2.- \quad 3x - 2y = 4 \\ \quad \quad -6x + 4y = 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(3x - 2y = 4) \quad (2) \\ -6x + 4y = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6x - 4y = 8 \\ -6x + 4y = 7 \quad +\end{aligned}$$

---

$$0 = 15$$

Esta es una contradicción, por tanto el sistema es inconsistente, no tiene solución.

Método de sustitución:

$$\begin{aligned}3.- \quad 3x + 2y = 13 \\ 4x - y = -1\end{aligned}$$

Despejamos una variable de una de las ecuaciones del sistema y la sustituimos en la otra ecuación.

Despejando  $y$  de la segunda ecuación:

$$4x + 1 = y$$

Sustituyendo en la primera ecuación, desarrollamos y despejamos  $x$ :

$$\begin{aligned}3x + 2(4x + 1) &= 13 \\ 3x + 8x + 2 &= 13 \\ 11x &= 11 \\ x &= 1\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación donde  $y$  está despejada obtenemos:

$$\begin{aligned}4(1) + 1 &= y \\ 5 &= y\end{aligned}$$

Entonces la solución del sistema es  $(1,5)$ .

$$\begin{aligned}4.- \quad -4x + y = 2 \\ 8x - 2y = -4\end{aligned}$$

Despejando  $y$  de la primera ecuación:

$$y = 2 + 4x$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}8x - 2(2 + 4x) &= -4 \\ 8x - 4 - 8x &= -4\end{aligned}$$

$$-4 = -4$$

Una identidad, entonces el sistema tiene una infinidad de soluciones. Una opción de solución es  $(x, 2 + 4x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ .

Otro método a usar es el método gráfico, no es muy común ya que si la solución del sistema no son números enteros, entonces no es muy factible encontrar el valor exacto de la solución.

Muchos problemas abarcan más de una cantidad; aunque ciertos problemas con dos incógnitas pueden resolverse con una sola variable, muchas veces es más fácil usar dos variables.

1.- La suma de dos números es 63. Su diferencia es 19. Encuentre los dos números.

$x$  = un número  
 $y$  = otro número

$$x + y = 63$$

$$x - y = 19$$

Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$2x = 82$$

$$x = 41$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$41 + y = 63$$

$$y = 63 - 41$$

$$y = 22$$

2.- Los precios de admisión a un juego de futbol fueron de \$6 para adultos y \$2 para niños. El valor total de los boletos vendidos fue de \$2,528 y se vendieron 454 boletos. ¿Cuántos adultos y cuántos niños asistieron al evento?.

$a$  = número de boletos vendidos de adultos  
 $b$  = número de boletos vendidos de niños

$$a + b = 454$$

$$6a + 2b = 2528$$

$$(a + b = 454) (2)$$

$$6a + 2b = 2528$$

$$\begin{array}{r}
 2a + 2b = 908 \\
 6a + 2b = 2528 \\
 \hline
 -4a \quad = -1620
 \end{array}$$

$$a = 405$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$405 + b = 454$$

$$b = 454 - 405$$

$$b = 49$$

Entonces, se vendieron 405 boletos de adultos y 49 boletos de niños.

3.- Una farmacéutica necesita 100 lt. de solución de alcohol al 50%. Tiene a la mano soluciones de alcohol al 30% y al 80%, que puede mezclar. ¿Cuántos litros de cada uno se requerirán para hacer los 100 lts. De la solución al 50%?

$x$  = número necesario de litros de alcohol al 30%

$y$  = número necesario de litros de alcohol al 80%

$$x + y = 100$$

$$.30x + .80y = .50(100)$$

Despejando  $x$  de la primera ecuación:

$$x = 100 - y$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$.30(100 - y) + .80y = 50$$

$$30 - .30y + .80y = 50$$

$$.50y = 20$$

$$y = 40$$

Sustituyendo en la ecuación donde despejamos  $x$ :

$$x = 100 - 40$$

$$x = 60$$

Por tanto, se necesitan 40 litros de alcohol al 30% y 60 litros de alcohol al 80%.

### Ejercicios:

Sistemas de ecuaciones con dos variables.

1) 
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

3) 
$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 14 \end{cases}$$

4) 
$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

5) 
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 8x + y = -4 \end{cases}$$

6) 
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$$

7) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 1 \end{cases}$$

8) 
$$\begin{cases} x - 5y = 7 \\ 3x + 7y = 6 \end{cases}$$

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área Ciencias Biológicas y de la Salud**

- 9)  $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ 3x + 7y = 8 \end{cases}$       10)  $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$       11)  $\begin{cases} 2x + 8y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$       12)  $\begin{cases} -4x + 6y = 12 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$
- 13)  $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$       14)  $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$       15)  $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$       16)  $\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$
- 17)  $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ 3y - \frac{x}{14} = 26 \end{cases}$       18)  $\begin{cases} \frac{3}{5}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ 2x = \frac{5}{2}y \end{cases}$

Aplicaciones.

19. Si una sala tuviera 2m mas de largo y 3m mas de ancho, el area seria de  $40 \text{ m}^2$  mayor de lo que es ahora y si tuviera 2 metros menos de largo y 3 metros mas de ancho, el area seria  $8 \text{ m}^2$  mayor que ahora. Hallar las dimensiones de la sala.
20. La suma de dos cifras de un numero es 9 y si al número se le resta 27 las cifras se invierten. Hallar el número.
21. 6 Kg. de café y 5kg de te cuestan \$56.4kg de te y 7 Kg. de café cuestan \$58. ¿Cuanto cuesta 1 Kg. de café y cuanto cuesta un 1kg de te?
22. Un comerciante gasto \$950 en comprar 35 trajes de a \$30 y de a \$25. ¿Cuantos trajes de cada precio compro?
23. Roberto gano ayer \$6 más que hoy. Si lo que gano hoy es lo  $\frac{2}{3}$  de lo que gano ayer ¿Cuánto ganó cada día?
24. La diferencia entre la cifra de las unidades y la cifra de las decenas de un numero es 7 y si el numero se suma con el numero que resulta de invertir sus cifras la suma es 99. Hallar el número.
25. El perímetro de un rectángulo es 36 metros. Si el largo se aumenta en 2 metros y el ancho se disminuye en 3 metros, el area se disminuye en  $20 \text{ m}^2$ . Hallar las dimensiones del rectángulo.
26. si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el y el resto es 9 y si 6 veces el menor se divide por el mayor el cociente es 2 y el resto es 16. Hallar los números.
27. La edad de Ana excede en 33 años a la edad de Rosa y si la edad de Ana se divide entre el tripe de la de Rosa el cociente es 1 y el resto 17. Hallar ambas edades.
28. Dos veces el ancho de una sala excede en 3m a la longitud de la sala y si la longitud aumentada en 4 se divide entre el ancho, el cociente es 2 y el residuo 1. Hallar las dimensiones de la sala.

29. En un cine hay 500 personas entre adultos y niños. Cada adulto pago \$3 y cada niño pago \$2 por su entrada. La recaudación es de \$1300. ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine?

### Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación que puede ser escrita con la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , es una ecuación cuadrática.

El método más sencillo para resolver una ecuación cuadrática, que no siempre es fácil de aplicar, es factorizar.

Propiedad del factor cero: Si  $ab=0$ , entonces  $a=0$  o  $b=0$  o ambos.

Ejemplos:

$6x^2 + 7x = 3$ $6x^2 + 7x - 3 = 0$ $(3x - 1)(2x + 3) = 0$ $3x - 1 = 0 \quad , \quad 2x + 3 = 0$ $x = \frac{1}{3} \quad \quad \quad x = -\frac{3}{2}$	$x^2 = 25$ $x^2 - 25 = 0$ $(x - 5)(x + 5) = 0$ $x - 5 = 0 \quad , \quad x + 5 = 0$ $x = 5 \quad \quad \quad x = -5$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Propiedad de la raíz cuadrada: Si  $k \geq 0$ , las soluciones de  $x^2 = k$  son  $x = \pm\sqrt{k}$ .

$$x^2 = k$$

$$x^2 - k = 0$$

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$$

$$x = \sqrt{k}, \quad x = -\sqrt{k}$$

Ejemplos:

$z^3 = -3$ $-3 < 0$ $\{\emptyset\}$	$(y - 4)^2 = 12$ $y - 4 = \pm\sqrt{12}$ $y = 4 \pm \sqrt{12}$ $y = 4 \pm 2\sqrt{3}$
-------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

Otra forma de resolver una ecuación cuadrática, es usando la fórmula general; ésta formula se obtiene de completar el cuadrado.

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

$x^2 - 4x + 2 = 0$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2}$	$2y^2 = y + 4$ $2y^2 - y - 4 = 0$
--------------------------------------------------------	-----------------------------------

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{4}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

Aplicaciones

1.- Hallar el número que sumado con su cuadrado nos da 72.

Sea  $x$  = número que buscamos

$$x + x^2 = 72$$

$$x^2 + x - 72 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-72)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 17}{2}$$

$$x = 8, \quad x = -9$$

2.- El producto de dos números enteros consecutivos es 240. Hallar los números.

Sea  $x$  = uno de los números buscados

$x + 1$  = el otro número

$$x(x + 1) = 240$$

$$x^2 + x - 240 = 0$$

$$(x - 15)(x + 16) = 0$$

$$x = 15, \quad x = -16$$

3.- Un rectángulo tiene un área de 800 unidades cuadradas. Si el largo es el doble del ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

$$A = bh$$

$$800 = (2x)x$$

$$800 = 2x^2$$

$$2x^2 - 800 = 0$$

$$x^2 - 400 = 0$$

$$(x - 20)(x + 20) = 0$$

$$x = \pm 20$$

4.- Un terreno tiene la forma de un triángulo rectángulo. El cateto más grande del triángulo es 20 mt. mayor que el doble de la longitud del cateto más corto. La hipotenusa es 10 mt. mayor que el cateto más grande. Determine las longitudes de los tres lados del terreno.

$s$  = longitud del cateto más corto  
 $20 + 2s$  = longitud del cateto más largo  
 $30 + 2s$  = longitud de la hipotenusa

Usando el Teorema de Pitágoras:

$$s^2 + (20 + 2s)^2 = (30 + 2s)^2$$

$$s = 50$$

5.- Si un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de  $100 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ , descartando la resistencia al aire, su altura  $s$  (en pies) sobre la tierra después de  $t$  seg. de ser lanzado está dado por:

$$s = -16t^2 + 100t$$

a) ¿Después de cuantos segundos estará a 50 pies de altura?

b) ¿Cuánto le tomará al proyectil regresar a la tierra?

a)  $50 = -16t^2 + 100t$   
 $16t^2 - 100t + 50 = 0$   
 $8t^2 - 50t + 25 = 0$

$$t = \frac{50 \pm \sqrt{(50)^2 - 32(50)}}{16}$$

$$t = \frac{50 \pm \sqrt{1700}}{16}$$

$$t = .55 \quad \text{y} \quad t = 5.70$$

b)  $0 = -16t^2 + 100t$   
 $0 = -4t(4t - 25)$   
 $t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{25}{4} = 6.25$

$$t = 6.25$$

### Ejercicios:

Resuelva las ecuaciones cuadráticas. Usando la fórmula general.

- |                          |                           |                           |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 1) $x^2 - 2x - 3 = 0$    | 2) $x^2 + 3x - 4 = 0$     | 3) $x^2 + x - 6 = 0$      |
| 4) $3x^2 + 5x = 2$       | 5) $x^2 + 8x + 12 = 0$    | 6) $2x^2 + 3x = 9$        |
| 7) $x^2 + 3x - 10 = 0$   | 8) $x^2 + x - 12 = 0$     | 9) $3x^2 + 10x - 8 = 0$   |
| 10) $4x^2 + 4x - 15 = 0$ | 11) $4x^2 - x = 0$        | 12) $2x^2 + 3x = 0$       |
| 13) $x^2 + 4x = 0$       | 14) $12x^2 + 12 = 25x$    | 15) $10x^2 + 21x + 9 = 0$ |
| 16) $6x^2 + 5x - 4 = 0$  | 17) $x^2 + 24x + 143 = 0$ | 18) $x^2 - 26x - 155 = 0$ |

Reescriba y resuelva las siguientes ecuaciones.

- |                            |                                     |                                    |
|----------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 19) $(x - 1)(x + 2) = 0$   | 20) $(x - 3)(x - 2) = 0$            | 21) $x(x + 4) = 0$                 |
| 22) $(2x + 1)(x - 3) = 0$  | 23) $(x - \frac{3}{4})(3x + 2) = 0$ | 24) $(x + \frac{5}{3})(x + 2) = 0$ |
| 25) $(2x + 5)(4x + 3) = 0$ | 26) $(2x)(x + 1) = 0$               | 27) $x = -2, x = -5$               |
| 28) $x = 3, x = -1$        | 29) $x = \frac{2}{3}, x = 1$        | 30) $x = 0, x = 2$                 |
| 31) $x = -3, x = -2$       | 32) $x = -1, x = 4$                 | 33) $x = -1, x = \frac{1}{2}$      |

Aplicaciones.

34) Si a un número se le agrega su cuadrado se obtiene 90. Encuentre el número.

35) Hallar el número cuyo cuadrado disminuido en el doble del número da 15.

- 36) Hallar dos números que sumados den 12 y multiplicados den 35.
- 37) El producto de dos números enteros consecutivos es 600. Hallar los dos números.
- 38) Si al largo de un rectángulo se le restan 3 m. se obtiene un cuadrado de  $225 \text{ m}^2$  de área. Hallar las dimensiones y el área del rectángulo.
- 39) La base de un rectángulo es el doble de su altura y el área es de  $288 \text{ m}^2$ . Calcular sus dimensiones.
- 40) En un triángulo rectángulo el cateto mayor excede en 2 cm. al menor y la hipotenusa supera en 2 cm. al cateto mayor. Calcular la medida de cada lado.
- 41) Hallar el lado de un cuadrado; si su área se aumenta en el producto de dicho lado por 5 se hace igual a  $500 \text{ m}^2$ .
- 42) Desde el suelo se lanza un proyectil hacia arriba con una velocidad de  $34.3 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ . ¿Dentro de cuánto tiempo estará a 49 mt. de altura sobre el suelo? Sugerencia: use  $h = vt - 4.9t^2$ .
- 43) Desde el suelo se lanza un proyectil hacia arriba con una velocidad de  $39.2 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ , ¿al cabo de cuánto tiempo estará a 58.8 mt. de altura sobre el suelo? Sugerencia: use  $h = vt - 4.9t^2$ .



## Modulo IV . TRIGONOMETRIA

La **trigonometría** es una rama de la matemática, cuyo significado etimológico es "la medición de los triángulos".

La trigonometría es la rama de las **matemáticas** que estudia las relaciones entre los **ángulos** y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos.

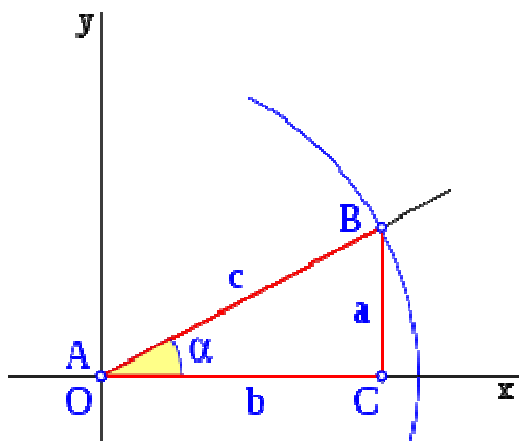
### Unidades angulares

En la medida de **ángulos**, y por tanto en trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado sexagesimal, en matemáticas es el Radián la más utilizada, y se define como la unidad natural para medir ángulos, el

Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próxima al **sistema decimal**, se usa en topografía, arquitectura o en construcción.

- **Radián**: unidad angular natural en trigonometría, será la que aquí utilizemos. En una circunferencia completa hay  $2\pi$  radianes.
- **Grado sexagesimal**: unidad angular que divide una circunferencia en 360 grados.
- **Grado centesimal**: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.

### Razones trigonométricas



El triángulo ABC es un **triángulo rectángulo** en C; lo usaremos para definir las **razones seno**, **coseno** y **tangente**, del ángulo  $\alpha$ , correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.

- El **seno** (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el **cateto** opuesto sobre la **hipotenusa**,

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$$

- El **coseno** (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente sobre la hipotenusa,

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

- La **tangente** (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$\text{tan } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

### Razones trigonométricas recíprocas

Se definen la **cosecante**, la **secante** y la **cotangente**, como las razones recíprocas al **seno**, **coseno** y **tangente**, del siguiente modo:

- **cosecante**: (abreviado como *csc* o *cosec*) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo:

$$\csc \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{a}$$

- **secante**: (abreviado como *sec*) es la razón recíproca de coseno, o también su inverso multiplicativo:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{c}{b}$$

- **cotangente**: (abreviado como *cot* o *cta*) es la razón recíproca de la tangente, o también su inverso multiplicativo:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\operatorname{tan} \alpha} = \frac{b}{a}$$

Normalmente se emplean las relaciones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente**, y salvo que haya un interés específico en hablar de ellos o las expresiones matemáticas se simplifiquen mucho, los términos cosecante, secante y cotangente no suelen utilizarse.

### Funciones trigonométricas inversas

En trigonometría, cuando el ángulo se expresa en **radianes** (dado que un radián es el **arco** de **circunferencia** de longitud igual al **radio**), suele denominarse arco a cualquier cantidad expresada en radianes; por eso las funciones inversas se denominan con el prefijo arco, así si:

$$y = \operatorname{sen} x$$

y es igual al **seno** de **x**, la función inversa:

$$x = \operatorname{arcsen} y$$

**x** es el **arco** cuyo seno vale **y**, o también **x** es el **arcoseno** de **y**.

si:

$$y = \operatorname{cos} x$$

y es igual al **coseno** de **x**, la función inversa:

$$x = \operatorname{arccos} y$$

**x** es el **arco** cuyo coseno vale **y**, que se dice: **x** es el **arcocoseno** de **y**.

si:

$$y = \tan x$$

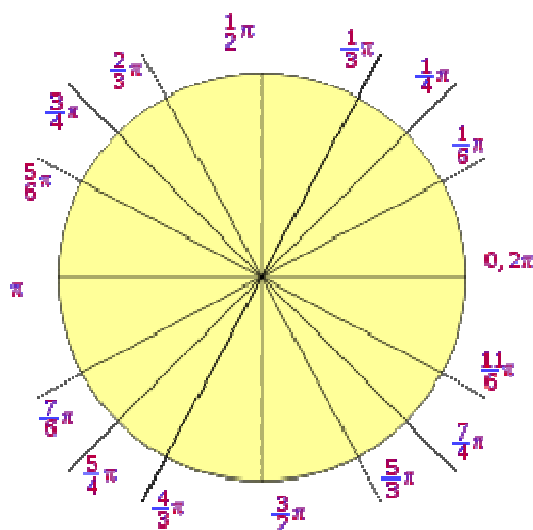
y es igual al **tangente** de x, la función inversa:

$$x = \arctan y$$

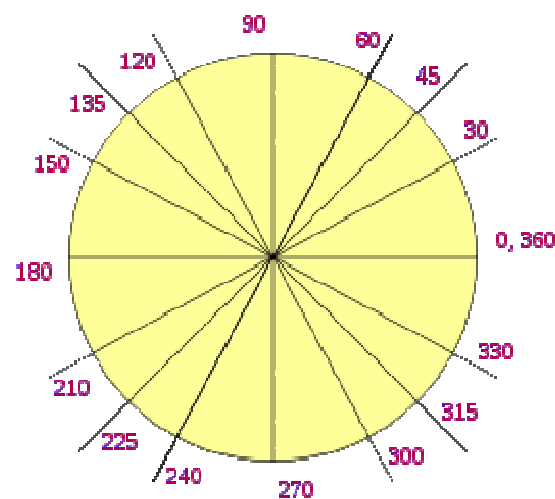
x es el **arco** cuya tangente vale y, ó x es igual al **arcotangente** de y.

### Valor de las funciones trigonométricas

A continuación algunos valores de las funciones que es conveniente recordar:



Circunferencia en **radianes**.



Circunferencia en **Grado sexagesimal**.

<b>Radianes</b>	<b>Grados sexag.</b>	<b>seno</b>	<b>coseno</b>	<b>tangente</b>
0	0°	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0

$\frac{1}{6}\pi$	$30^\circ$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	$90^\circ$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\mathbb{A}(\pm\infty)$

Representación de las funciones trigonométricas en el plano xy, los valores en el eje x multiplicados por  $\pi$  radianes.

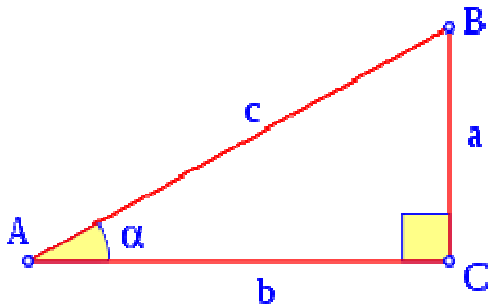
### Identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad en que se cumple para todos los valores permisibles de la variable. En trigonometría existen seis identidades fundamentales:

### Recíprocas

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{csc}(\alpha) &= 1 \\ \operatorname{cos}(\alpha) \cdot \operatorname{sec}(\alpha) &= 1 \\ \operatorname{tan}(\alpha) \cdot \operatorname{cot}(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

### De división



$$\operatorname{tan}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{cos}(\alpha)}$$

### Por el teorema de Pitágoras

Como en el triángulo rectángulo cumple la función que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

de la figura anterior se tiene que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \operatorname{cos}(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ c &= 1\end{aligned}$$

entonces para todo ángulo  $\alpha$ , se cumple la identidad Pitagórica :

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

que también puede expresarse:

$$\begin{aligned}\tan^2 \alpha + 1 &= \sec^2 \alpha \\ 1 + \cot^2 \alpha &= \operatorname{csc}^2 \alpha\end{aligned}$$

### Ejercicios.

#### Teorema de Pitágoras.

1. Encuentra el valor del lado que falta en los siguientes triángulos rectángulos. (considera C como el ángulo recto)

- a)  $a = 12$ ,  $b = 5$
- a.  $c = 20$ ,  $a = 12$
- b.  $a = 8$ ,  $b = 6$
- c.  $c = 56$ ,  $a = 39$
- d.  $c = 76$ ,  $b = 60$
- e.  $a = 16$ ,  $b = 24$
- f.  $b = 92$ ,  $c = 120$
- g.  $a = 34$ ,  $c = 48$

#### Razones trigonométricas.

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos. (considera C como el ángulo recto).

1.  $b = 20$ ,  $a = 39^\circ 25'$
2.  $a = 85$ ,  $b = 70$

3.  $b = 16, B = 26^{\circ}48'$
4.  $c = 45, b = 28$
5.  $c = 60, A = 55^{\circ}$
6.  $c = 140, A = 30^{\circ}48'$
7.  $c = 100, B = 64.3^{\circ}$
8.  $a = 24, b = 70$
9.  $a = 10, A = 39.8^{\circ}$
10.  $b = 24, B = 37^{\circ}$
11.  $a = 23, b = 26$
12.  $b = 13, A = 30^{\circ}$
13.  $c = 38, B = 60^{\circ}$
14.  $c = 67, B = 55^{\circ}$
15.  $a = 12, A = 60^{\circ}$

### Ecuaciones e identidades trigonométricas.

3. Utiliza las identidades trigonométricas para simplificar las siguientes expresiones:

- a)  $\frac{\sec \theta}{\tan \theta}$
- b)  $\frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\tan^2 \theta}$
- c)  $\frac{\cot \theta}{\csc \theta}$
- d)  $\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\tan^2 x + 1}$
- e)  $\tan \theta \cos \theta$
- f)  $\sec \theta (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)$
- g)  $\cos \theta \sec \theta$
- h)  $\operatorname{sen} \theta (1 + \cot^2 \theta)$
- i)  $\frac{\tan \theta}{\sec \theta}$
- j)  $\csc \theta (1 - \cos^2 \theta)$

4. Verifica las siguientes identidades trigonométricas

- k)  $\tan \theta + \cot \theta = \csc \theta \cdot \sec \theta$
- l)  $\frac{\sec \theta}{\tan \theta} - \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \cos \theta \cdot \cot \theta$
- m)  $\cot^2 \theta \cdot \sec^2 \theta = \csc^2 \theta$
- n)  $1 - (\cos \theta \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot \tan \theta) = \cos^2 \theta$
- o)  $\cos^2 \theta (\tan^2 \theta + 1) = 1$
- p)  $1 - \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \cot x = \operatorname{sen}^2 x$
- q)  $\frac{\operatorname{sen} x}{\tan x \cdot \sec x} = \cos^2 x$
- r)  $(\sec^2 \theta - 1) \cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$
- s)  $\frac{(1 + \operatorname{sen} \theta)(1 - \operatorname{sen} \theta)}{\cos \theta} = \cos \theta$
- t)  $\frac{1 - \cos^4 \theta}{1 + \cos^2 \theta} = \operatorname{sen}^2 \theta$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas para todos los valores de  $\theta$  tal que  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .

- a)  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$
- b)  $2\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$
- c)  $\cos 2\theta + \cos \theta = 0$  (sugerencia:  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ )
- d)  $2\operatorname{sen} \theta + 1 = 0$
- e)  $(2\cos \theta - \sqrt{3})(\tan \theta - 1) = 0$
- f)  $2\operatorname{sen} \theta - \sqrt{3} = 0$
- g)  $\cos \theta \tan \theta - \cos \theta = 0$
- h)  $\operatorname{sen} \theta \tan \theta + \operatorname{sen} \theta = 0$
- i)  $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} \theta = 0$  (sugerencia:  $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen} \theta \cos \theta$ )

### Leyes de los senos y cosenos

6. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos  $ABC$ , dados:

- j)  $a = 125$ ,  $A = 54^\circ 40'$ ,  $B = 65^\circ 10'$

**UNIVERSIDAD DE SONORA**  
**Curso Propedéutico de Matemáticas**  
**Área Ciencias Biológicas y de la Salud**

- k)  $b = 321, A = 75^{\circ}20', C = 38^{\circ}30'$
- l)  $b = 215, c = 150, B = 42^{\circ}40'$
- m)  $a = 512, b = 426, A = 48^{\circ}50'$
- n)  $b = 50.4, c = 33.3, B = 118^{\circ}30'$
- o)  $b = 40.2, a = 31.5, B = 112^{\circ}20'$
- p)  $b = 51.5, a = 62.5, B = 40^{\circ}40'$
- q)  $c = 16.0, A = 127^{\circ}40', C = 11^{\circ}40'$
- r)  $a = 320, c = 475, A = 35^{\circ}20'$
- s)  $b = 224, B = 23^{\circ}50', C = 120^{\circ}50'$
- t)  $b = 120, c = 270, A = 118^{\circ}40'$
- u)  $a = 24.5, b = 18.6, c = 26.4$
- v)  $a = 6.34, b = 7.30, c = 9.98$

**Aplicaciones.**

- 7. Expresar en radianes cada uno de los siguientes ángulos:  
(a)  $25^{\circ}$ , (b)  $160^{\circ}$ , (c)  $75^{\circ}30'$ , (d)  $112^{\circ}40'$  (e)  $12^{\circ}12'20''$ , (f)  $18.34^{\circ}$
- 8. Expresar en grados cada uno de los siguientes ángulos:  
(a)  $\pi/4$  rad, (b)  $7\pi/10$  rad, (c)  $5\pi/6$  rad, (d)  $1/4$  rad, (e)  $7/5$  rad
- 9. Un hombre maneja 500 m a lo largo de un camino inclinado  $20^{\circ}$  con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida?
- 10. Dos caminos rectos se cortan formando un ángulo entre ellos de  $75^{\circ}$ . Encuentre la distancia más corta desde un camino hasta una estación de gasolina situada en el otro camino a 1000 m del punto de intersección.
- 11. Dos edificios con el techo plano se encuentran a una distancia de 60m. Desde el techo del edificio más bajo, de 40 m de altura, el ángulo de elevación hasta el borde del techo del edificio más alto es de  $40^{\circ}$ . ¿Cuál es la altura del edificio más alto?
- 12. Una escalera, cuya base está en el punto medio de una calle forma un ángulo de  $30^{\circ}$  con el piso cuando su parte superior descansa contra un edificio, y forma un ángulo de  $40^{\circ}$  con el piso cuando descansa contra un edificio al otro lado de la calle. Si la escalera mide 50 pies de largo. ¿Cuál es el ancho de la calle?

13. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm y cuyos ángulos en la base miden  $70^\circ$ ?
14. Dos barcos tienen equipos de radio cuyo alcance es de 200 km. Uno de los barcos se encuentra a 155km en  $N42^\circ40'E$  y el otro está a 165 km en dirección  $N45^\circ10'O$  de una estación costera. ¿Pueden los dos barcos comunicarse entre sí directamente?
15. Un barco navega 15.0 mi en dirección  $S40^\circ10'O$  y después 21.0 mi en dirección  $N28^\circ20'O$ . Encuentra la distancia y la dirección de la última posición con respecto a la primera.



## Modulo V. Logaritmos

### ❖ Definición y cálculo de logaritmos

Podemos definir el **logaritmo de base  $a$**  de un número  $y$  igual a  $x$  si se cumple que  $y = a^x$ . En términos matemáticos esto se expresa como sigue:  $\log_a y = x$  si  $a^x = y$ .

Pero ¿qué significa esto?, supón que necesitamos calcular  $\log_3 9$ ; para resolverlo debemos preguntarnos lo siguiente: ¿a qué potencia tengo que elevar el 3 para obtener 9 por resultado?. A la potencia 2, ya que  $3^2 = 9$ . Por consiguiente, la solución de  $\log_3 9 = 2$ .

Por tanto, podemos decir que el logaritmo de cualquier número equivale a la potencia a la que debe elevarse la base para encontrar dicho número.

**Ejemplos:** Calculemos los siguientes logaritmos

1.  $\log_2 8 =$  (¿a qué potencia debemos elevar el 2 para obtener 8?)
2.  $\log_5 625 =$  (¿a qué potencia debemos elevar el 5 para obtener 625?)
3.  $\log_{10} 100 =$  (¿a qué potencia debemos elevar el 10 para obtener 100?)

Es importante destacar que cuando en un logaritmo la base es 10, el logaritmo se llama **logaritmo común** o vulgar, pues es el que se utiliza de manera ordinaria. También existen los **logaritmos naturales**, los cuales tienen por base el valor  $e$  y se representan de la siguiente manera:

$$\log_e b = \ln b, \text{ que se lee logaritmo natural de } b$$

**Nota:** estos dos los logaritmos se pueden resolver con la calculadora.

Cuando en un logaritmo la base no aparece, automáticamente deduciremos que se trata de base 10, es decir,

$$\log 100 = \log_{10} 100 = 2, \text{ ya que } 10^2 = 100$$

$$\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3, \text{ ya que } 10^3 = 1000$$

**Nota:** debido a que el logaritmo es la función inversa de la exponencial, y como la gráfica de  $y = a^x$  jamás toca el eje  $x$ , podemos decir que no existe el logaritmo de cero o de un número negativo, en cualquier base.

- $\log_a(0) = \text{no existe}$
- $\log_a(\text{número negativo}) = \text{no existe}$

#### ❖ Propiedades de los logaritmos

Con base en las leyes de los exponentes podemos enunciar las propiedades de los logaritmos, las cuales nos servirán para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Aunque nos referiremos a los logaritmos comunes, es importante aclarar que se aplican también a los naturales.

➤ Multiplicación:  $\log[ab] = \log a + \log b$

➤ División:  $\log\left[\frac{a}{b}\right] = \log a - \log b$

➤ Potencia:  $\log a^n = n \log(a)$

➤ Raíz:  $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log x$

**Nota:** para poder aplicar estas leyes, los logaritmos necesariamente deben tener la misma base.

**Ejemplos:** Transformaremos las siguientes expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos.

1.  $\log 3x$ . como este logaritmo se refiere a una multiplicación, aplicaremos la siguiente propiedad:  $\log[ab] = \log a + \log b$ . Por consiguiente:

$$\log 3x = \log 3 + \log x.$$

2.  $\ln 5x^3$ . Aplicando la misma propiedad obtenemos  $\ln 5x^3 = \ln 5 + \ln x^3$ . Recordamos ahora la propiedad  $\log a^n = n \log(a)$  y la aplicamos en  $\ln x^3$ , obteniendo así

$$\ln 5x^3 = \ln 5 + 3 \ln x$$

3.  $\log \frac{x^3 y}{z}$ . Ahora aplicaremos la propiedad  $\log \left[ \frac{a}{b} \right] = \log a - \log b$ . Tenemos

entonces

$$\log \frac{x^3 y}{z} = \log x^3 y - \log z$$

Pero como  $\log x^3 y$  es un producto, entonces

$$\log \frac{x^3 y}{z} = \log x^3 + \log y - \log z$$

Finalmente,

$$\log \frac{x^3 y}{z} = 3 \log x + \log y - \log z$$

4.  $\ln \sqrt[3]{x^5}$ . En este caso aplicaremos la propiedad  $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log x$ . Tenemos entonces que

$$\ln \sqrt[3]{x^5} = \frac{5}{3} \ln x$$

### ❖ Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En este tema aprenderemos a resolver ecuaciones donde la incognita aparece como exponente o dentro de una expresión logarítmica. Para ello, es necesario que tengas a mano tu calculadora y que recuerdes las leyes de los logaritmos.

1. Primero ejemplificaremos la resolución de ecuaciones logarítmicas
- a.  $\log_2 x + \log_2 8x = 3$ . Como se presenta una suma de logaritmos, podemos convertirla en producto de la siguiente manera:

$$\log_2(x)(8x) = 3.$$
$$\log_2 8x^2 = 3$$

Ahora despejamos x elevando la base en ambos miembros, nos queda

$$2^{\log_2 8x^2} = 2^3$$

$$8x^2 = 2^3$$

Resolvemos para x:

$$8x^2 = 2^3$$

$$x^2 = \frac{8}{8} = 1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

Al obtener la raíz queda  $x_1 = 1$  y  $x_2 = -1$ . Estos valores son la solución del ejemplo.

b.  $\log_3(4x + 2)^3 = 6$

c.  $\ln(3x - 8) - \ln(5x - 4) = 1$

2. Ahora aprenderemos a resolver ecuaciones exponenciales

a.  $5^{3x-4} = 2$ . Aplicamos logaritmo a cada miembro:

$$\log 5^{3x-4} = \log 2$$

Ahora aplicamos la regla del exponente:

$$(3x - 4)\log 5 = \log 2$$

Resolvemos para x

$$3x - 4 = \frac{\log 2}{\log 5}$$

$$3x = \frac{\log 2}{\log 5} + 4$$

$$x = \frac{\frac{\log 2}{\log 5} + 4}{3}$$

$$x = 1.4768$$

b.  $e^{2x-8} = 4$

### Ejercicios.

1. Expresar las siguiente potencias como logaritmos

- a)  $3^3 = 27$
- b)  $5^4 = 625$
- c)  $2^5 = 32$
- d)  $a^2 = x$
- e)  $n^x = y$

2. Expresar los siguientes logaritmos como potencias

- a)  $\text{Log}_3 81 = 4$
- b)  $\text{Log}_x 8 = n$
- c)  $\text{Log}_7 x = y$
- d)  $\text{Log}_a z = n$
- e)  $\text{Log}_x y = a$

3. Resolver los siguientes logaritmos por definición

- a)  $\text{Log}_2 8 =$
- b)  $\text{Log}_3 9 =$
- c)  $\text{Log}_4 64 =$
- d)  $\text{Log}_5 25 =$
- e)  $\text{Log}_7 49 =$

4. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

- a)  $\text{Log}_2 (x-3) = 2$
- b)  $\text{Log}_3 (2x+1) = 1$
- c)  $\text{Log}_5 (4-x) = 2$
- d)  $\text{Log}_6 (7-3x) = 0$
- e)  $\text{Log}_4 (4x-18) = 3$

5. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

- a)  $2^{x+1} = 8$
- b)  $3^{2x+1} = 27$
- c)  $8^{x+1} = 4^{3-2s}$
- d)  $9^{3x-2} = 27^{4x-5}$
- e)  $25^{3-7x} = 5^{6x-1}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

- a)  $2^{x+1} = 8$
- b)  $3^{2x+1} = 27$
- c)  $8^{x+1} = 4^{3-2s}$
- d)  $9^{3x-2} = 27^{4x-5}$
- e)  $25^{3-7x} = 5^{6x-1}$

7. Encuentre el valor de x que resuelva las ecuaciones indicadas.

- a)  $e^{3x+1} = 2$
- b)  $2^{x^2+1} = 10$
- c)  $\ln(5x+1) = 8$
- d)  $\ln(x+1) - \ln(x-1) = 9$
- e)  $e^{4x+1} = 5e^x$
- f)  $2\log(2x+2) = \log\left(1 + \frac{12x}{25}\right) + 2$

### Aplicaciones.

8. Un fármaco se elimina del organismo mediante la orina. Suponga que para una dosis de 10 mg, la cantidad,  $A(t) = 10(0.8)^t$ ; para que sea eficaz ese medicamento, debe existir cuando menos 2 mg en el organismo.
- a) Calcule cuando 2 mg en el organismo.
  - b) ¿Cuál es la semivida del medicamento?
9. Se sabe que el organismo elimina un cierto medicamento de acuerdo con la función exponencial  $M(t) = P_0(0.5)^t$ , donde t se mide en horas.
- a) Si después de 2 horas quedan 100 mg (miligramos) de medicamento en el cuerpo, ¿qué cantidad de medicamento había inicialmente?
  - b) ¿Qué cantidad de medicamento hay en el organismo después de 3 horas?
10. Las células cancerosas de un tumor crecen en forma exponencial diariamente de acuerdo con la función  $f(t) = P_0(1.35)^t$ . Cuando se descubre este tumor se calcula que hay 235 000 células cancerosas.

a) ¿Cuántas células cancerosas habrá después de 3 días?

b) ¿Cuántas células cancerosas habrá después de 8 días?

11. Una población de bacterias tiene un tamaño dado por la fórmula:

$$P = 40,000e^{kt}$$

donde  $P$  es la población después de  $t$  horas, y  $K$  es una constante. Si en 40 horas hay 60,000 bacterias ¿Cuándo habrá 80,000?



### **BIBLIOGRAFÍA:**

- 1.- ÁLGEBRA, Aurelio Baldor, 2da. ed., Grupo Editorial Patria, S. A. de C. V., 2007.
- 2.- ÁLGEBRA, Paul K. Rees, Fred W. Sparks, 4ta. ed., Editorial Reverté, 1995.
- 3.- MATEMÁTICAS – 2 ÁLGEBRA y FUNCIONES, Francisco José Ortiz Campos, 7ma. reimpresión, Grupo Patria Cultural, 2004.
- 4.- MATEMÁTICA: RAZONAMIENTO y APLICACIONES, Charles D. Miller, Vern E. Heeren y E. Jonh Hornsby, Jr., 8ª. ed , Addison Wesley Longman., 1999.
- 5.. MATEMÁTICAS BÁSICAS. ALGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. John C. Peterson. Segunda Edición. Ed. CECSA, 2006. pp. 257-268.