Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas.

Problemas Resueltos de Funciones

Para: Cálculo Diferencial
Químico Biólogo

Dr. José Luis Díaz Gómez

Problemas Resueltos de Funciones

Contenido

José Luis Díaz Gómez

1. Definición y Notación Funcional.

Problema. 1.

La palabra *función* se usa con frecuencia para indicar una relación o dependencia de una cantidad respecto de otra, estudia los siguientes ejemplos:

a) El área de un círculo es una función de su radio. Es decir el área depende del valor del radio.
b) El volumen de una caja cúbica es una función de la longitud de uno de sus lados. Es decir, el volumen depende del valor de la longitud de uno de sus lados.
c) La fuerza entre dos partículas con carga eléctrica opuesta es una función de su distancia.
d) La intensidad del sonido es una función de la distancia desde la fuente sonora.

Problema. 2.

La distancia que recorre un avión que viaja a una velocidad de 500 millas por hora (mph) es una función del tiempo de vuelo. Si *s* representa la distancia en millas y *t* es el tiempo en horas, entonces la función es: $s(t) = 500t$.

Problema. 3.

La circunferencia de un círculo es una función de su radio. Esto se suele expresar por medio de la expresión: $C(r) = 2\pi r$.

Problema. 4.

Los impulsos en las fibras nerviosas viajan a una velocidad de 293 pies/segundo. La distancia recorrida en t segundos está dada por la función: $d(t) = 293t$.

Problema. 5.

Si se sustituye la x por un número en la ecuación $y = x^3 + 6x^2 - 5$, entonces se obtiene un único valor de y. Por lo tanto la ecuación define una función cuya regla es: asigne a un número x en el dominio un único número y tal que $y = x^3 + 6x^2 - 5$. La regla de la función también se puede describir de la siguiente manera $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5$. Por lo tanto:

$$f(0) = 0^3 + 6(0)^2 - 5 = -5 \quad y,$$
$$f(2) = 2^3 + 6(2)^2 - 5 = 27$$

Problema. 6.

La función $f(x) = \frac{x}{2} + 7$

es la regla que toma un número, lo divide por 2 y luego le suma 7 al cociente. Si se da un valor para x, ese valor se sustituye en x en la fórmula, y la ecuación se resuelve para *f*(x), entonces estamos evaluando la función en un valor de su dominio. Por ejemplo, si x = 4,

$$f(4) = \frac{4}{2} + 7 = 9$$

Si x = 6, $$f(6) = \frac{6}{2} + 7 = 10$$

Problema. 7.

Si $f(x) = x^2 + x - 2$. Calcular *f(-x)* y *–f(x)*.

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) - 2 = x^2 - x - 2$

En este caso f (-x) no es lo mismo que –f(x), porque –f(x) es el número negativo de f(x), es decir

$-f(x) = -(x^2 + x - 2) = -x^2 - x + 2$

Problema. 8.

Si x representa el límite de velocidad en millas por hora, entonces el límite de velocidad en kilómetros por hora es una función de x, representada por f(x) = 1.6094x. Si el límite de velocidad en los Estados Unidos es de 55 mph, su equivalente en kilómetros por hora, cuando se redondea al entero más próximo, es

$$f(55) = 1.6094(55) = 89 \text{ km/h}$$

Si x = 60 mph, $f(60) = 1.6094(60) = 97$ km/h

Problema. 9.

Sea t el tiempo en segundos y d(t) "la distancia en metros que una piedra cae después de t segundos". La frase "la distancia que cae la piedra después de t segundos es $5t^2$ metros" se puede escribir como $d(t) = 5t^2$. Por ejemplo,

$$d(1) = 5(1)^2 = 5$$

significa "la distancia que la piedra cae después de 1 segundo es 5 metros"

$$d(4) = 5(4)^2 = 80$$

significa "la distancia que la piedra cae después de 4 segundos es 80 metros"

Problema. 10.

Encuentre el valor de la función $f(x) = 2x^2 – 4x + 1$, cuando x = -1, x = 0, y, x = 2.

Solución.

Cuando x = -1, el valor de f está dado por
$f(-1) = 2(-1)^2 – 4(-1) + 1 = 2 + 4 + 1 = 7$
Cuando x = 0, el valor de f está dado por
$f(0) = 2(0)^2 – 4(0) + 1 = 1$
Cuando x = 2, el valor de f está dado por
$f(2) = 2(2)^2 – 4(2) + 1= 8 -8 + 1 = 1$

Con los datos de la izquierda se puede construir la siguiente tabla:

x	f(x)
-1	7
0	1
2	1

Problema. 11.

Para $f(x) = x^2-2x$, encuentre y simplifique: (a) $f(4)$, (b) $f(4 + h)$, (c) $f(4 + h) – f(4)$, (d) $\dfrac{f(4+h)-f(x)}{h}$

Solución.

(a) $f(4) = 4^2 – 2(4) = 16 – 8 = 8$

(b) $f(4 + h) = (4 + h)^2 – 2(4 + h) = 16 + 8h + h^2 – 8 – 2h$

$$= 8 + 6h + h^2$$

(c) $f(4 + h) – f(4) = 8 + 6h + h^2 – 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h} = \dfrac{6h+h^2}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6+h$

Problema. 12.

Para $g(x) = \dfrac{1}{x}$, encuentre y simplifique $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

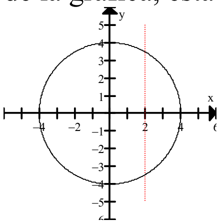
Solución:

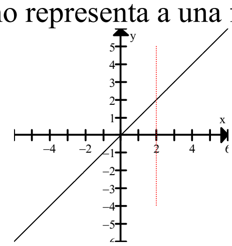
$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$

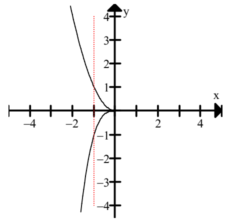
$$= \frac{-h}{(a+h)a}\cdot\frac{1}{h} = \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2+ah}$$

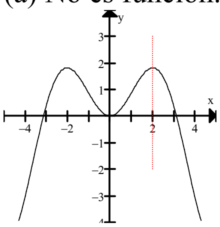
Problema. 13.

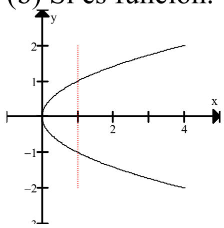
Una función se caracteriza geométricamente por el hecho de que toda recta vertical que corta su grafica lo hace exactamente en un solo punto. Si una recta toca más de un punto de la grafica, esta no representa a una función.

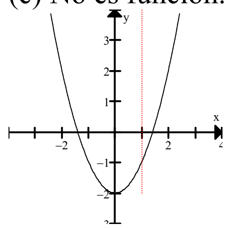

(a) No es función.


(b) Si es función.


(c) No es función.


(d) Si es función.


(e) No es función.

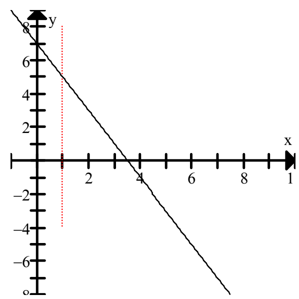

(f) Si es función.

Problema. 14.

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son funciones y por qué?

(*a*) $y = -2x + 7$	(b) $y^2 = x$	(c) $y = x^2 - 2$
(d) $x = 2$	(e) $x^2 + y^2 = 16$	(f) $y = 1$

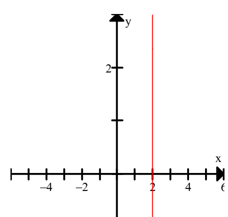
Solución:



(a) $y = -2x + 7$ es una función porque para cada valor de la variable independiente x existe un valor y sólo uno de la variable dependiente y. Por ejemplo, si x = - 2(1) + 7 = 5, la gráfica se muestra a la derecha.

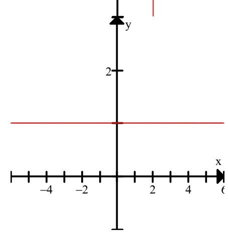
(b) $y^2 = x$, que es equivalente a $y = \pm\sqrt{x}$, no es una función porque cada valor positivo de x, hay dos valores de y. Por ejemplo, si $y^2 = 1$, $y = \pm 1$. La gráfica es como la figura del inciso (e) del problema 12.

(c) $y = x^2 - 2$ es una función. Para cada valor de x existe un solo valor de y. Ejemplo, si x = - 5, y = 23. Esto no importa mientras también se dé que y = 25 cuando x = 5. La definición de una función simplemente exige que cada valor de x haya un solo valor de y, no, que para cada valor de y hay un solo valor de x. La gráfica sería como la figura (f), del problema 12. Demostrando que una parábola con eje paralelo al eje de las y es una función.



(d) $x = 2$ no es una función. La gráfica de x = 2 es una línea vertical. Esto significa que en x = 2, y tiene muchos valores. La gráfica se muestra a la derecha.

(e) $x^2 + y^2 = 16$ no es una función. Si x = 0, $y^2 = 16$ y $y = \pm 4$. La gráfica es un círculo, similar a la figura (a) del problema 12. Un círculo no pasa la prueba de línea vertical.



(f) $y = 1$ es una función. La grafica de y = 1 es una línea horizontal. Esto significa que al valor de y = 1 se le asignan muchos valores de x. La grafica se muestra a la derecha.

2. Dominio y Rango.

La regla de correspondencia es el corazón de una función, pero esta no queda determinada por completo sino hasta cuando se especifica su dominio. El *dominio* de una función es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores. El *rango* es el conjunto de valores obtenidos.
Cuando no se especifica el dominio para una función, siempre supondremos que es el mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido y dé valores de números reales. A este dominio se le llama el ***dominio natural.***

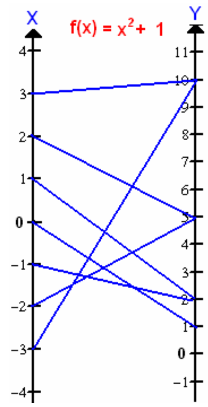
Problema. 15.

Considérese la función $f(x) = x^2 + 1$. Encontrar su dominio y rango.
Los valores de la función se obtienen sustituyendo la x en esta ecuación. Por ejemplo,

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,\ f(2) = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

Evaluando la función en distintos valores obtenemos la siguiente tabla y diagrama.

x	$f(x) = x^2 + 1$
3	10
2	5
1	2
0	1
-1	2
-2	5
-3	10



De aquí observamos que el dominio de la función son todos los números reales, ya que para cada valor de x real su imagen es siempre un número real. En cambio el rango es el intervalo $[1, +\infty)$. Ya que nunca vamos a obtener para un número real x un valor menor de 1.

Problema. 16.

Si se define una función f como: $f(x) = x^2 + 1$ con $-3 \leq x \leq 3$.
Entonces el dominio de f está dado como el intervalo cerrado [-3, 3]. Observa que la expresión algebraica es la misma que la del ejemplo anterior, solo que en este caso, se está limitando el dominio de la función a los valores de x comprendidos entre -3 y 3. El rango de g es el intervalo [1, 10] (ver el diagrama de la figura anterior).

Problema. 17.

Encontrar el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2 + 4$.
Solución: El dominio de f son todos los reales $(-\infty, +\infty)$, puesto que $x^2 + 4$ es un numero real para todo número real x. Puesto que $x^2 \geq 0$, para todo x, entonces $x^2 + 4 \geq 4$, de lo anterior deducimos que $f(x) \geq 4$. Por lo tanto, cualquier número ≥ 4 es la imagen de al menos una x del dominio. Por ejemplo, para encontrar una x tal que $f(x) = 7$, resolvemos la ecuación $7 = x^2 + 4$ para x y obtenemos $x = \pm\sqrt{3}$. En general, para cualquier $k \geq 4$, al hacer $f(x) = k$, obtenemos $k = x^2 + 4$ y eso nos da las soluciones $x = \pm\sqrt{k-4}$. Esto prueba que el rango de la función es el conjunto de todos los números ≥ 4. Es decir el intervalo $[4, +\infty)$.

Observación 1. Hay dos situaciones en las que el dominio de una función no consiste de todos los números reales. Estas situaciones ocurren cuando se tiene una regla de una función que conduce a una división por cero o a la raíz cuadrada de números negativos. Ver los ejemplos 17, 18, 19.

Problema. 18.

Encontrar el dominio de la función siguiente: $h(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 1}$

Solución. Cuando x = 1 el denominador de la función es cero. Pero cuando x ≠ 1 el denominador es siempre un número real. Por lo tanto el dominio de la función h consiste de todos los números reales *excepto el 1*. Esto se puede escribir de las siguientes dos maneras (1) $D_h = \mathbb{R} - \{1\}$, o bien (2) $D_h = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Problema. 19.

Encontrar el dominio de la función f(x) = $\dfrac{1}{x^2 - x}$.

Solución. Dado que $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{x(x-1)}$

y la división entre 0 no está permitida, vemos que f (x) no está definida cuando x = 0 o x = 1.

Así que el dominio de f es: $D_f = R\text{-}\{0, 1\}$ que también se puede expresar en notación de intervalos como $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Problema. 20.

Sea f la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x - 2}$. Determinar su dominio y su rango.

Solución. Debido a que los números se limitan a los números reales, *y* es función de x sólo para x – 2 ≥ 0, ya que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un valor único de *y*. Sin embargo si x< 2, se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo y en consecuencia no existe un numero real y. Por lo tanto x debe de estar restringida a x ≥ 2, así pues, el dominio de f es el intervalo $[2, +\infty)$, y el rango de f es $[0, +\infty)$.

Problema. 21.

Determinar el dominio y el rango de la función $f(x) = 7 + \sqrt{3x - 6}$.

Solución. El radicando 3*x* – 6 debe ser no negativo. Al resolver 3*x* - ≥ 0 se obtiene *x* ≥ 2, por lo cual el dominio de *f* es $[2, +\infty)$. Ahora, por definición $\sqrt{3x-6} \geq 0$ para x ≥ 2, y en consecuencia, $y = 7 + \sqrt{3x - 6} \geq 7$. Puesto que 3x – 6 y $\sqrt{3x-6}$ aumentan cuando *x* aumenta, se concluye que el rango de *f* es $[7, +\infty)$.

Determinar el dominio de h(x) = $\sqrt{2 - x - x^2}$

Solución: Puesto que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de *h* consta de todos los valores de *x* tales que

$$2 - x - x^2 = (2 + x)(1 - x) \geq 0$$

Resolviendo esta desigualdad tenemos que su solución es el intervalo [-2, 1]. Por consiguiente el dominio de h es precisamente este intervalo.

Problema. 22.

Identifique el dominio de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x^2 + 7x - 19$ (b) $y = \sqrt{t - 5}$ (c) $y = \dfrac{6}{x(x+9)}$

(d) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ (e) $y = \dfrac{x}{x^2 - 36}$ (f) $y = \dfrac{7}{x(x - 4)}$

(g) $y = \dfrac{3x}{\sqrt{8 - x}}$ (h) $y = \dfrac{6x}{(x-5)(x-9)}$

Solución: El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente. Si no se especifica el dominio, se supone que éste consta de todos los números reales posibles para que los asuma la variable independiente. Puesto que x puede asumir cualquier valor en (a), el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales.

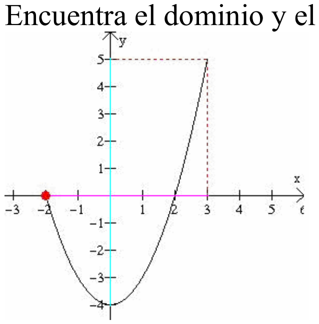
(b) Como una raíz cuadrada se define solamente para números no negativos (es decir, $x \geq 0$), es necesario que $t - 5 \geq 0$, Puesto que esto sólo se cumplirá si ≥ 5, el dominio de la función se expresa como $[t \geq 5]$.

(c) Como no se acepta la división por cero, $x(x + 9)$ no puede ser igual a cero. El dominio de la función excluye $x = 0$ y $x = -9$ que se expresa como $[x \neq 0, -9]$.

(d) $[x > 0]$ (e) $[x \neq \pm 6]$ (f) $[x \neq 0, 4]$ (g) $[x < 8]$ (h) $[x \neq 5, 9]$

Problema. 23.

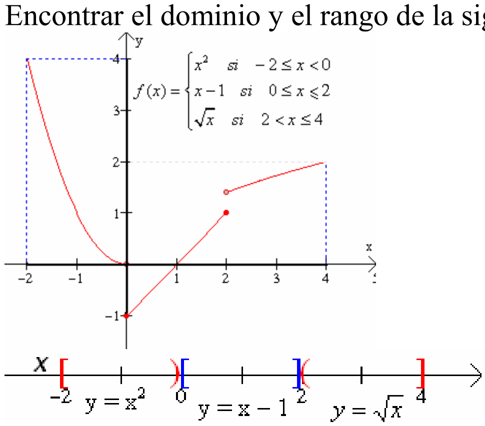
Encuentra el dominio y el rango de la siguiente función:



Solución: Una función también se representa a través de su grafica, el dominio se representa en el eje de las **x**, y el rango en el eje de las **y**. Así pues el dominio de la función que representa esta gráfica está dado por el intervalo **[-2, 3]** y el rango por el intervalo **[-4, 5]**.

Problema. 24.

Encontrar el dominio y el rango de la siguiente función definida por secciones.



Solución: Nótese que f no representa tres funciones sino más bien a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales. Sin embargo, la gráfica de f consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez,

La gráfica de $y = x^2$ para $-2 \leq x < 0$

La gráfica de $y = x - 1$ para $0 \leq x \leq 2$

La gráfica de $y = \sqrt{x}$ para $2 < x \leq 4$

Ver las gráficas de la izquierda.

El dominio de la función es la unión de los tres intervalos: $-2 \leq x < 0$, $0 \leq x < 2$, $2 < x \leq 4$. La cual es el intervalo $-2 < x \leq 4$. El rango es el intervalo $-1 < x \leq 4$.

3. Graficación.

Algunas funciones que se hallan frecuentemente en el Cálculo se enumeran a continuación:

Función Constante:	$f(x) = b$
Función lineal:	$f(x) = mx + b$
Función cuadrática:	$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
Función polinómica de grado n:	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ (n = entero no negativo; $a_n \neq 0$)
Función Racional:	*f(x) = g(x)/(x) donde g(x) y h(x) son polinomios y h(x) ≠ 0*
Función Potencia:	$F(x) = ax^n$ *(n= cualquier número real)*

A. Información acerca de las rectas.

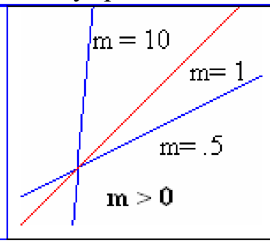
La pendiente de una recta que pasa a través de los puntos (x_1, y_1), y (x_2, y_2) (donde $x_1 \neq x_2$) es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

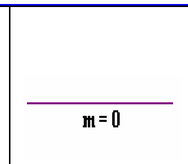
Dos rectas son perpendiculares cuando el producto de sus pendientes es -1. Si una recta L_1 tiene pendiente $m_1 = 2$ y es perpendicular a la recta L_2, entonces $m_1 m_2 = -1$. De donde la pendiente de la recta L_2 es $m_2 = -1/2$.

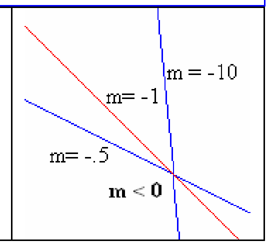
La ecuación de recta que pasa a través de (x_1, y_1) con pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

La ecuación de la recta con pendiente **m** e intersección y en **b** es: $y = mx + b$. La pendiente **m** nos indica hacia donde y que tanto se inclina la recta.

Si **m > 0**, la recta se inclina hacia la derecha.
Si **m < 0**, la recta se inclina hacia la izquierda.
Si **m = 0**, la recta es horizontal.







Problema. 25.

Graficar la función lineal $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 4$.

Solución: para graficar una función lineal se necesita encontrar dos puntos que satisfagan la ecuación y unirlos con una línea recta. Como la gráfica de una función lineal es una línea recta, todos los puntos que satisfacen la ecuación deben estar en la línea. Los dos puntos que encontraremos serán las intersecciones de la línea recta con los ejes coordenados x e y. La intersección x es el punto donde la grafica cruza el eje x; la intersección y es donde la recta cruza el eje y. Como la recta cruza el eje y donde x = 0, la coordenada x de la intersección y es siempre 0. La coordenada y de la intersección y se obtiene, entonces, simplemente igualando x a cero y resolviendo la ecuación para y.

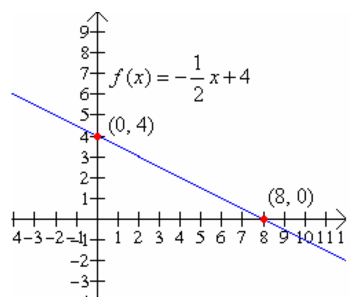
$$y = f(0) = -\frac{1}{2}(0) + 4 = 4$$

Para hallar la intersección con el eje x, hacemos y = 0 y resolvemos para x:

$$0 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = 4$$

$$x = 8$$

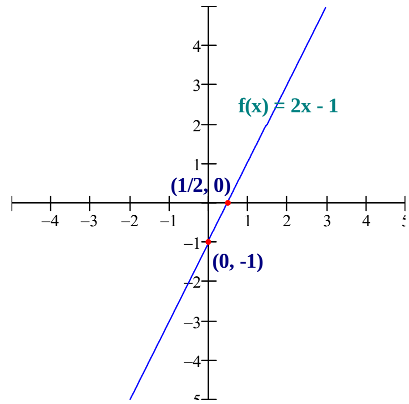


Entonces graficando los puntos (0, 4) y (8, 0) y uniéndolos con una línea recta, tenemos la gráfica de arriba. La pendiente de esta recta es m = -1/2.

Problema. 26.

Trazar la gráfica de la función f (x) = 2 x – 1.

Solución: Una forma de encontrar la grafica de una ecuación lineal es encontrar dos puntos por los cuales pasa la recta. Si estos puntos son las intersecciones con los ejes coordenados, tendremos bien ubicada la posición de la recta. Para encontrar la intersección con el eje ***y*** evaluamos la función en x = 0 y obtenemos f(0) = 2(0) – 1 = -1. Para encontrar la intersección con el eje y, hacemos y = 0, es decir 0 = 2x – 1. Despejamos la variable x obtenemos x = ½.



En conclusión, obtenemos que las intercepciones con los ejes están dadas por los puntos (0, -1) y (½., 0). La pendiente de esta recta es m = 2.

Problema. 27.

Las ventas de una fabrica de productos químicos local crecieron de $6 500 000 en 1980 a $ 11 000 000 en 1990. Suponiendo que las ventas se aproximan a una función lineal (V(t) = mt + b), exprese las ventas S como una función de tiempo *t.*

Solución: Haciendo 0 = 1980 y 10 = 1990 se tiene que la pendiente de la recta es:

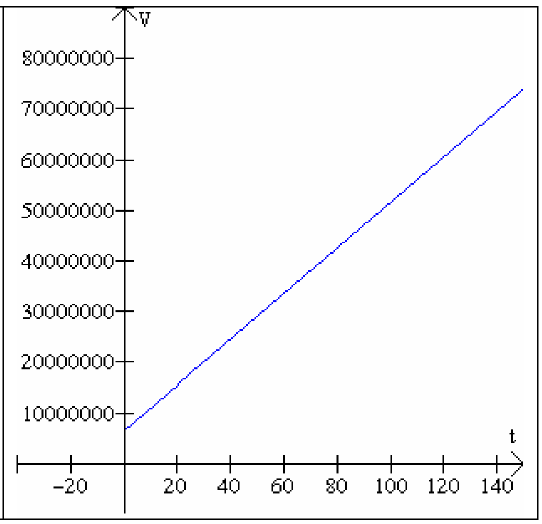
$$m = \frac{1100000 - 6500000}{10 - 0} = \frac{450000}{10} = 450000$$

Sustituyendo por V = 6500000 en t = 0

650000 = m(0) + b, se obtiene

b = 6500000. De donde la función es:

V(t) = 450000t + 500000.



Problema. 28.

Una nutricionista desea mezclar granos de $10.00 el kilo, con otros de $25, con el, fin de obtener 100 kilos de una mezcla de $ 15 el kilo. ¿Cuánto de cada uno de los granos debe ir en la mezcla?

Solución: Sea x = la cantidad de granos de $ 10.00; entonces (100 – x) será la cantidad de granos de $ 25.00 y

m(x) = 10x + 25 (100 – x) = 2500 – 15x

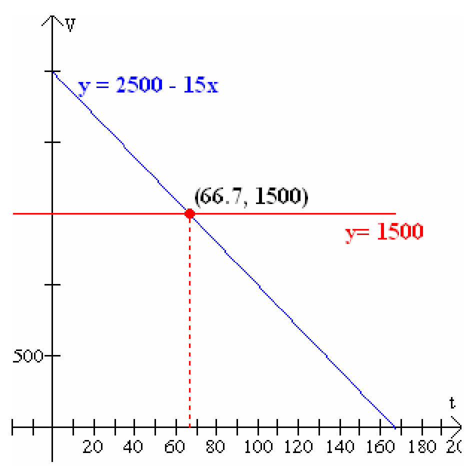
Sustituyendo el valor de la mezcla deseada para m,

15(100) = 2500 – 15x

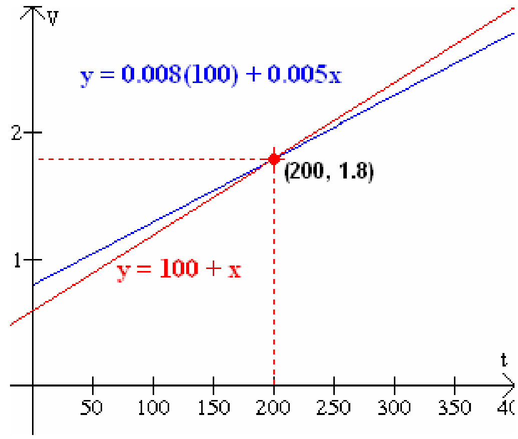
15x = 2500-1500 = 1000

x = 1000/15 = 66.7 kilos de $10.00

100-x =100 – 66.7 = 33.3 kilos de $25.00



Problema. 29.



¿Qué cantidad de aceite con contenido de 0.5% de azufre debe mezclar un químico, en 100 litros con 0.8% de azufre para conseguir un aceite que contenga 0.6%

Solución: Haciendo x = la cantidad de aceite de 0.5% para mezclar, tenemos

$$m(x) = 0.008(100) + 0.005x$$

Luego, sustituyendo la mezcla deseada de (100 + x) litros de 0.6% de azufre para m,

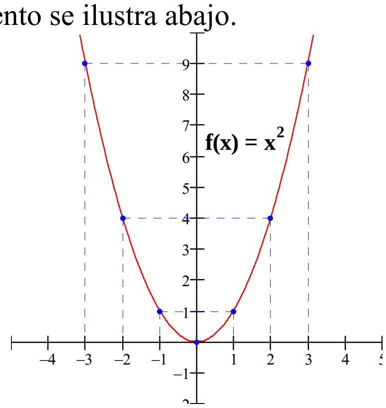
$$0.006(100 + x) = .008(100) + .005x$$
$$0.6 + .006x = 0.8 + .005x$$
$$0.001x = 0.2$$
$$x = 200$$

Problema. 30.

Graficar $f(x) = x^2$.

Para graficar una función no lineal, simplemente escoja algunos valores representativos x del dominio; encuentre $f(x)$ para cada valor, que regularmente se conoce como y en la gráfica; y grafique los pares ordenados resultantes $[x, f(x)]$, y después conecte estos puntos con una línea suave. El procedimiento se ilustra abajo.

x	$f(x) = x^2 = y$	Puntos
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	(-3, 9)
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	(-2, 4)
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	(-1, 1)
0	$f(0) = (0)^2 = 0$	(0, 0)
1	$f(1) = (1)^2 = 1$	(1, 1)
2	$f(2) = (2)^2 = 4$	(2, 4)
3	$f(3) = (3)^2 = 9$	(3, 9)



B. Información acerca de las cuadráticas

La gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola que se abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. El vértice de esta parábola tiene la coordenada x dada por $x = -b/2a$, la coordenada y es $f(-b/2a)$. La intersección de la parábola con el eje x (raíces) se encuentra con la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, si ésta tiene intersecciones.

Problema. 31.

Graficar la función $f(x) = -4x^2 + 12x - 8$.

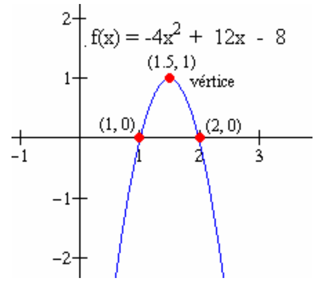
En primer lugar, en este caso los valores de los parámetros de la cuadrática son a = -4, b = 12 y c = -8. Ahora, la gráfica es una parábola que se abre hacia abajo puesto que el coeficiente de x^2 es negativo. Su vértice tiene coordenada x dada por $-\frac{b}{2a} = -\frac{12}{2(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

y su coordenada y es $f\left(\frac{3}{2}\right) = -4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{3}{2}\right) - 8 = 1$.

Las raíces de la parábola se encuentran con la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(-4)(-8)}}{2(-4)} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{-8} = \frac{-12 \pm 4}{-8}$$

De donde se obtienen los valores de dos raíces de la cuadrática, x = 1 y x = 2. Así, las intersecciones con el eje x, son (1, 0) y (2, 0).



Problema. 32.

Suponer que se estima que la cantidad de desperdicios echados a un río es una función cuadrática del tiempo. Si se tiraron 11.5 ton en un periodo de 5 días, y 20.8 ton después de 8 días, hallar la cantidad tirada en t días.

La primera oración nos dice que la función de desperdicio es de la forma:

$$w(t) = at^2 + bt + c$$

Podemos hallar a, b, c para los que son necesarias tres condiciones. Son tres precisamente las que tenemos:

cuando t = 0, w = 0;

cuando t = 5, w = 11.5

cuando t = 8, w = 20.8

Al sustituir estos pares de valores para t y w en la función de desperdicios se tendrá

$0=a\cdot 0+b\cdot 0+c$, así que c = 0

$11.5 = 25a + 5b \qquad (2)$

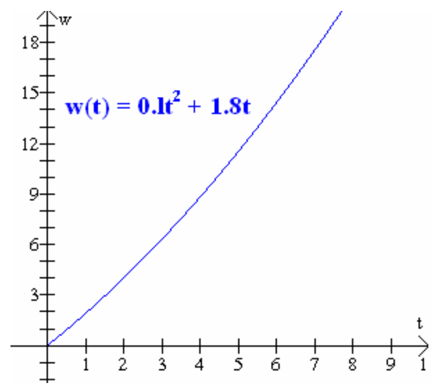
$20.8 = 64a + 8b \qquad (3)$

Resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones (2) y (3) encontramos

a = 0.1 y b = 1.8

La función buscada es pues,

$w(t) = 0.1t^2 + 1.8t$

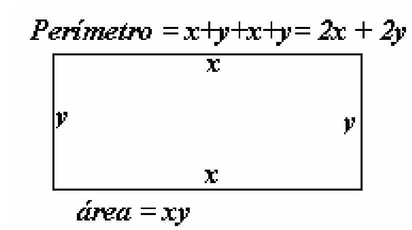


Problema. 33.

Encontrar el área y las dimensiones del mayor campo rectangular que puede cercar con 300 metros de malla.

Solución: Denotemos por **x** el largo y por **y** el ancho del campo, como se muestra en la figura. Puesto que el perímetro es el largo de la malla, 2x + 2y = 3000. Por lo tanto 2y = 3000 – 2x y y = 1500 – x. En consecuencia, el área es,

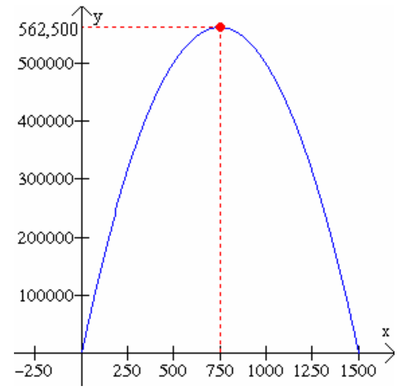
$A = xy = x(1500 - x) = 1500x - x^2 + 1500x.$



El área mayor posible es el valor máximo valor de la función cuadrática A(x) = $-x^2 + 1500x$. El máximo ocurre en el vértice de la gráfica de A(x).

La coordenada del vértice es $-\frac{1500}{2(-1)} = 750$ metros.

Por lo tanto la coordenada y del vértice, el máximo valor de A(x) es: A(750) = $-750^2 + 1500\cdot750$ = 562,500 metros cuadrados. El máximo ocurre cuando el largo es x = 750. En este caso el ancho es y = 1500 – x = 1500 – 750 = 750.



Problema. 34.

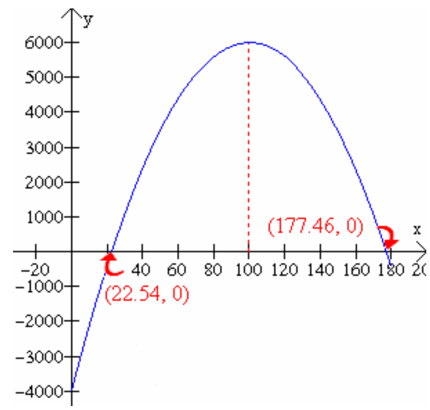
Las ganancias G de una fábrica de reactivos químicos para cada unidad x vendida se ha calculado como

$$G(x) = 200 - x^2 - 4000$$

la cual, completando el cuadrado, se puede expresar como

$G(x) = -(x - 100)^2 + 6000$

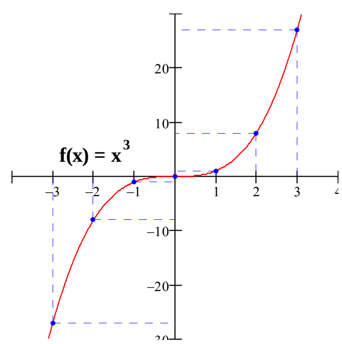
La gráfica de G es una parábola que abre hacia abajo, con vértice en (100, 6000), que significa que, cuando se venden 100 unidades, la ganancia se maximiza en \$ 6000.



Problema. 35.

Graficar $f(x) = x^3$

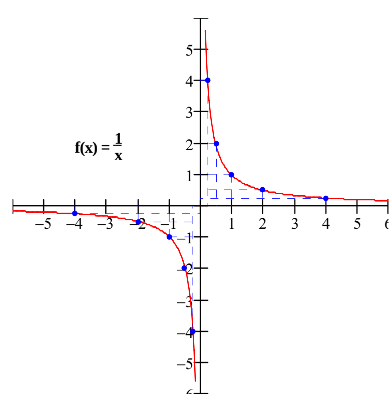
x	$f(x) = x^3 = y$	Puntos
-3	$f(-3) = (-3)^3 = -27$	(-3, -27)
-2	$f(-2) = (-2)^3 = -8$	(-2, -8)
-1	$f(-1) = (-1)^3 = -1$	(-1, -1)
0	$f(0) = (0)^3 = 0$	(0, 0)
1	$f(1) = (1)^3 = 1$	(1, 1)
2	$f(2) = (2)^3 = 8$	(2, 8)
4	$f(3) = (3)^3 = 27$	(3,27)



Problema. 36.

Graficar $f(x) = \frac{1}{x}$

x	f(x) = 1/x = y	Puntos
-4	f(-4) = -¼ = -¼	(-4, -¼)
-2	f(-2) = -½ = -½	(-2, ½)
-1	f(-1) = -1/1 = -1	(-1, -1)
-½	f(-½) =-1/(-½) = -2	(-½, -2)
-¼	f(-¼) =-1/(-¼) = -4	(-¼, -4)
½	f(½) =-1/(½) = 2	(½, -2)
¼	f(¼) =1/(¼) = 4	(¼, 4)
1	f(1) = 1/1 = 1	(1, 1)
2	f(2) = ½ = ½	(2, ½)

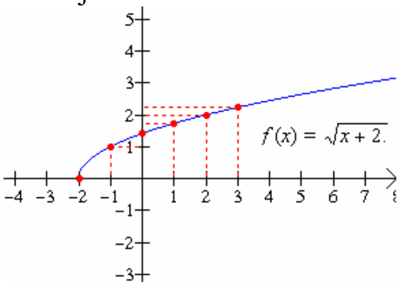


Problema. 37.

Trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x+2}.$

Solución: Primero observamos que $\sqrt{x+2}.$ está definida cuando $x + 2 \geq 0$, así que el dominio de f es el intervalo $[-2, +\infty)$. Esto implica que el rango es el intervalo $[0, +\infty)$. Luego marcamos los puntos proporcionados por la tabla siguiente y los utilizamos para elaborar el dibujo de abajo.

x	$f(x)=\sqrt{x+2}$
-2	0
-1	1
0	$\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}$
2	2
3	$\sqrt{5}$



Problema. 38.

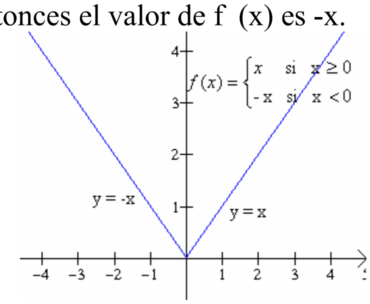
Graficar la función valor absoluto $y = |x|$

Recordemos que el valor absoluto se define de la siguiente manera $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

Por lo tanto tenemos que la función es equivalente a $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

Recordemos también que una función es una regla. Para esta función en particular la regla es la siguiente: Primeramente se considera el valor de entrada x. Si $x \geq 0$, entonces el valor de f (x) es x; por otra parte, si $x < 0$. Entonces el valor de f (x) es -x.

Para trazar la grafica observemos que si $x \geq 0$, entonces f(x) = x, así que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la derecha de x = 0, es la recta y = x que tiene pendiente 1 y que pasa por el origen. Si x < 0 entonces f(x) = -x, de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la recta x = 0 debe coincidir con la gráfica de y = -x, que es una recta con pendiente -1 y que pasa por el origen. Ver la gráfica de la derecha.



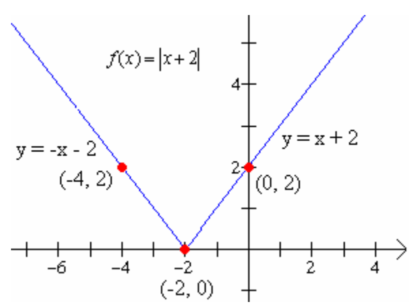
Problema. 39.

Trazar la gráfica de f(x) = |x +2|

Solución: Por la definición de valor absoluto sabemos que |x + 2| = x + 2 cuando $x + 2 \geq 0$, es decir si $x \geq -2$ y = |x + 2| = -(x + 2) = -x – 2, cuando x+2 < 0, esto es si x < -2. En otros términos esta función es equivalente a la función definida por secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x \geq -2 \\ -x-2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

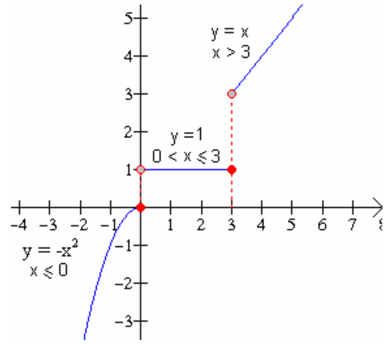
x	f(x)
-4	2
-3	1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4
3	5



Problema. 40.

Trazar la gráfica de la función definida por secciones $f(x)=\begin{cases} -x^2 & si \quad x \le 0 \\ 1 & si \quad 0 < x \le 3 \\ x & si \quad x > 3 \end{cases}$

Solución: Nótese que f no representa tres funciones sino más bien, a una función cuyo dominio es el conjunto de números reales. Sin embargo, la gráfica de f consta de tres secciones obtenidas trazando, a su vez:
$y = -x^2$ en el intervalo $x \le 0$
$y = 1$ en el intervalo $0 < x \le 3$ y
$y = x$ en el intervalo $x > 3$.
La gráfica se muestra a la derecha.



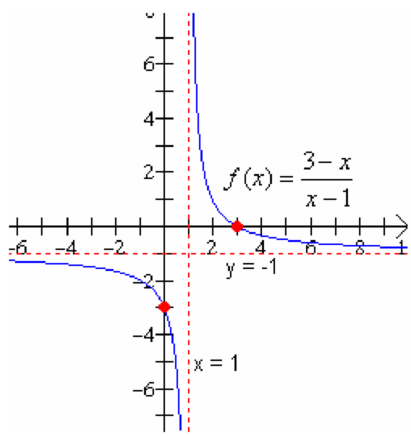
Problema. 41.

Graficar la función racional $f(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$.

Solución: Primero obtenemos las intersecciones con los ejes coordenados. La intersección y es $f(0)=\dfrac{3-0}{0-1}=-3$, y la intersección x se encuentra resolviendo $y=0=\dfrac{3-x}{x-1}$, cuya solución es x = 3. De donde las intersecciones con los ejes están dadas por los puntos (0, -3) y (3, 0). Cuando se trazan gráficas de funciones racionales, es importante tomar nota del dominio; en este caso, es evidente que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto x = 1, ya que para x = 1 la función no está definida. Como se muestra en la tabla 1, cuando x está cerca de 1, los valores del denominador x-1, se encuentran muy cerca de cero y por consiguiente los valores correspondientes de f(x) son grandes en valor absoluto. Es claro que algo dramático sucede cuando x se acerca a 1. En efecto, la tabla 1 nos indica que los valores de f(x) aumentan sin límite. Hemos indicado esto dibujando una línea punteada vertical, llamada **asíntota vertical**, en x = 1. Cuando x se aproxima a 1, la gráfica se acerca cada vez más a esta recta, pero esta recta no es pare de la gráfica de la función, es sólo una guía. Obsérvese que la función también tiene una **asíntota horizontal**, concretamente la recta y = -1. Esto puede verse en la tabla 2, cuando la x toma valores positivos muy grandes (p. e. x= 300), el valor de la función f(x) se acerca a la recta y = -1, y cuando la x toma valores grandes pero negativos (p. e. x = -300), la función también se acerca a la recta y = -1.

Tabla 1	
x	f(x)
0.60000	-6.00000
0.80000	-11.00000
0.98000	-101.00000
0.99333	-301.00000
1.00000	Indefinido
1.00667	299.00000
1.02000	99.00000
1.20000	9.00000
1.40000	4.00000

Tabla 2	
x	f(x)
273.33333	-0.99266
280.00000	-0.99283
286.66667	-0.99300
293.33333	-0.99316
300.00000	-0.99331
-300.00000	-1.00664
-293.33333	-1.00680
-286.66667	-1.00695
-280.00000	-1.00712



C. Asíntotas verticales y horizontales.

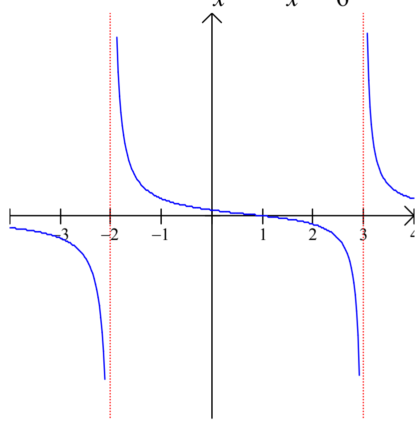
La función $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ tiene una asíntota vertical en todo número que es una raíz del denominador h(x), pero no del denominador g(x).

La función racional $f(x)=\dfrac{ax^n+\cdots}{cx^k+\cdots}$ cuyo numerador tiene grado n y denominador grado k, tiene:

(a) Una asíntota horizontal en la recta y = a/c, si n = k.
(b) Al eje x como una asíntota horizontal, si n < k, y,
(c) No tiene Asíntotas horizontales si n > k.

Problema. 42.

Encuentra las asíntotas verticales y horizontales de la función $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$



Solución: Primero factoricemos el denominador de la función para encontrar las raíces.

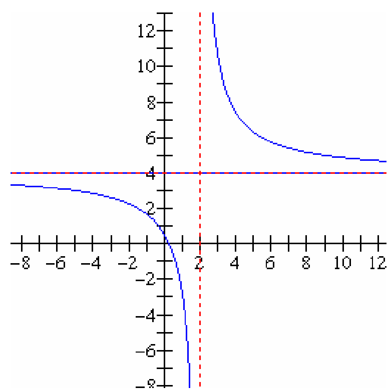
$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}=\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

La forma factorizada de la función nos permite leer la información necesaria.

Asíntotas verticales: los valores x = -2, y x = 3, son raíces del denominador pero no del numerador, por lo tanto son asíntotas verticales. ***Asíntotas horizontales***: puesto que el denominador tiene un grado mayor que el numerador, el eje x es una asíntota horizontal de la función. Ver grafica de la derecha.

Problema. 43.

Encontrar las asíntotas de la siguiente función: $h(x)=\dfrac{4x-1}{x-2}$



Solución: ***Asíntotas verticales***: El valor x = 2, es una raíz del denominador pero no del numerador, por lo tanto es una asíntota vertical.

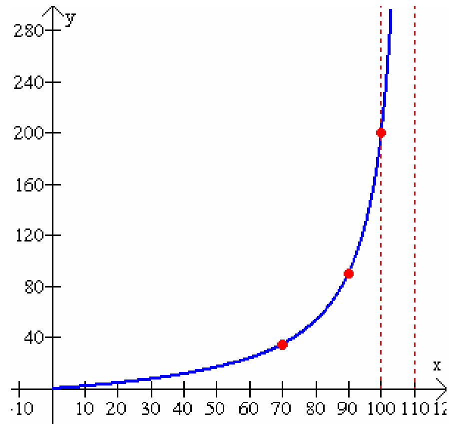
Asíntotas horizontales: puesto que el denominador tiene el mismo grado que el numerador, la recta y = 4 es una asíntota horizontal. Ver la grafica de la derecha.

Problema. 44.

Suponga que el costo C en miles de dólares de la expulsión de x por ciento de dióxido de azufre del escape de una planta de fundición de cobre se expresa con la función racional

$$C(x) = \frac{20x}{110 - x} \quad (0 \le x \le 100)$$

Hallando la asíntota vertical, aunque sea por fuera del dominio limitado, y graficando se pueden observar los costos elevados de la limpieza de la parte final del agente contaminante.



D. Funciones Pares e Impares.

Una función es par si f(-x) = f(x) para toda x en el dominio de f. La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.
Una función es impar si f(-x) = -f(x) para toda x en el dominio de f. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Problema. 45.

Determine si las siguientes funciones son par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^2 - |x|$, (b) $g(x) = \frac{3x}{x^2+1}$, (c) $h(x) = \frac{x^2+2}{x-7}$

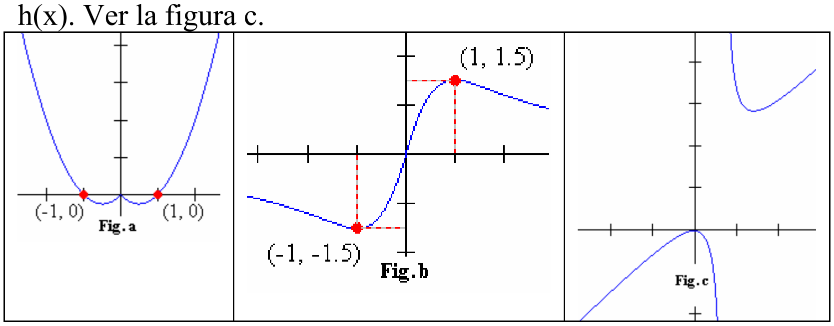
Solución:

(a) La función $f(x) = x^2 - |x|$ es una función par porque:
$f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$. Por lo tanto es simétrica con respecto al eje y, ver la figura a.

b) La función $g(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ es impar, porque $g(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-3x}{x^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -g(x)$ La gráfica es simétrica con respecto al eje y, ver figura b.

(c) La función $h(x) = \frac{x^2+2}{x-7}$ no es par ni impar.

$h(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)-7} = \frac{x^2+2}{-x-7} = \frac{x^2+2}{-(x+7)} = -\frac{x^2+2}{x+7}$. Esto muestra que $h(-x) \neq h(x)$, y $h(-x) \neq -h(x)$. Ver la figura c.



Problema. 46.

Determinar si las funciones siguientes son pares o impares.

$$(a)\ f(x) = \frac{3x}{x^2+1}, \qquad (b)\ f(x)\ \frac{x^2}{x^3+1}.$$

Solución:

$$(a)\ \ f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -f(x).$$

La función es impar

$$(b)\ f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^3+1} = \frac{x^2}{-x^3+1} \neq \pm f(x)$$

La función no es par ni impar

4. Gráficas y Transformaciones.

Sea f(x) una función y c ε D_f.

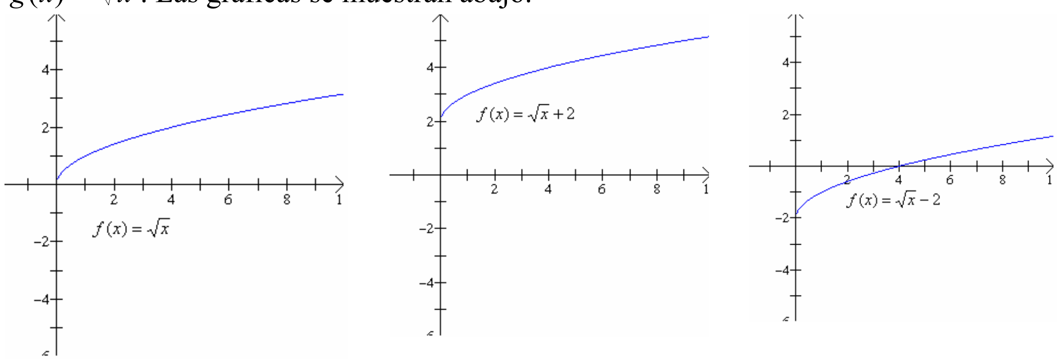
A. Traslaciones verticales.

Si c > 0, entonces la grafica de f(x) + c es una traslación de f, c unidades hacia arriba.
Si c < 0, entonces la grafica de f(x) + c es una traslación de f, c unidades hacia abajo.

Problema. 47.

Encontrar la gráfica de (a) $f(x) = \sqrt{x}$, (b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$, (c) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

Solución: Observa que los incisos (b) y (c) son una traslación vertical de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Las gráficas se muestran abajo.



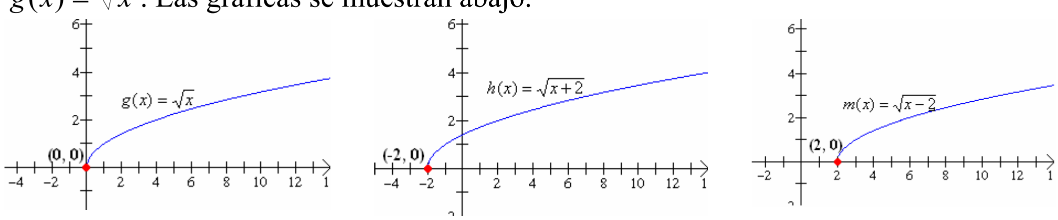
B. Traslaciones horizontales.

Si c > 0, entonces la grafica de f(x-c) es una traslación de f, c unidades hacia la derecha.
Si c < 0, entonces la grafica de f(x-c) es una traslación de f, c unidades hacia la izquierda.

Problema. 48.

Grafica las siguientes funciones (a) $g(x) = \sqrt{x}$, (b) $h(x) = \sqrt{x+2}$, (c) $m(x) = \sqrt{x-2}$

Solución: Observa que los incisos (b) y (c) son una traslación horizontal de la función $g(x) = \sqrt{x}$. Las graficas se muestran abajo.



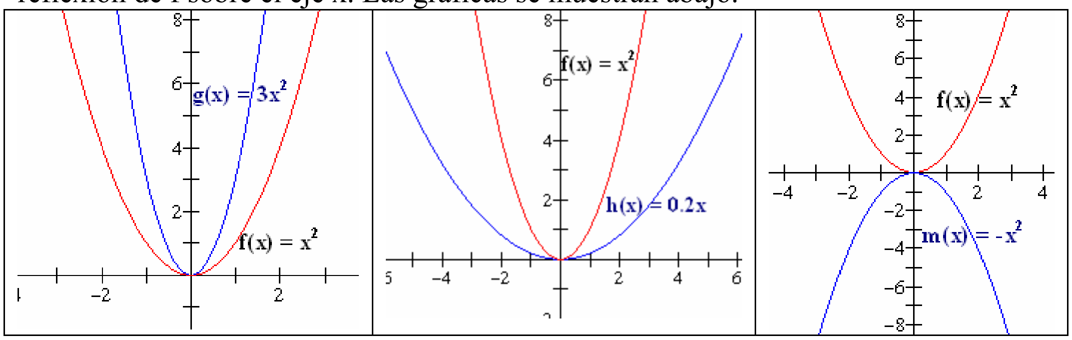
C. Expansiones y Contracciones

Si $c > 1$, entonces la gráfica de $cf(x)$, es un alargamiento vertical de la gráfica de f por un factor de c unidades.
Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de $cf(x)$, es una reducción vertical de la gráfica de f por un factor de c unidades.
Si $c < 0$ entonces $cf(x)$ es una reflexión sobre el eje x de la función f.

Problema. 49.

Grafica las siguientes funciones: (a) $\mathbf{f(x) = x^2}$**,** (b) $g(x) = 3x^2$, (c) $\mathbf{h(x) = 0.2x}$**,** (d) $\mathbf{m(x) = -x^2}$.

Solución: La grafica de f es una parábola que se abre hacia arriba y tiene su vértice en el eje x. (b) La gráfica de g es un alargamiento vertical de la función f por factor de 3; (c) la gráfica de h es una reducción vertical de f por factor de 0.5; (d) la gráfica de m es una reflexión de f sobre el eje x. Las gráficas se muestran abajo.

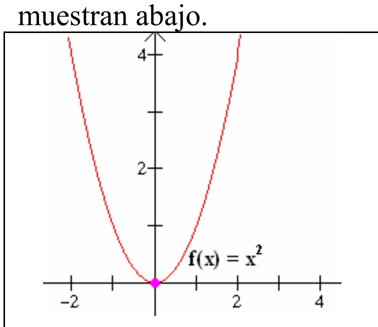


Problema. 50.

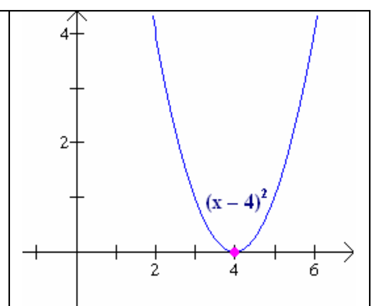
Graficar $g(x) = 2(x – 4)^2 – 2$, utilizando transformaciones.
Solución: Observa que la función g se puede obtener a partir de la función $\mathbf{f(x) = x^2}$ e tres pasos: $\mathbf{g(x) = 5(x – 4)^2 - 2}$

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{Paso 1}} (x-4)^2 \xrightarrow{\text{Paso 2}} 2(x-4)^2 \xrightarrow{\text{Paso 3}} 2(x-4)^2 - 2 = g(x)$$

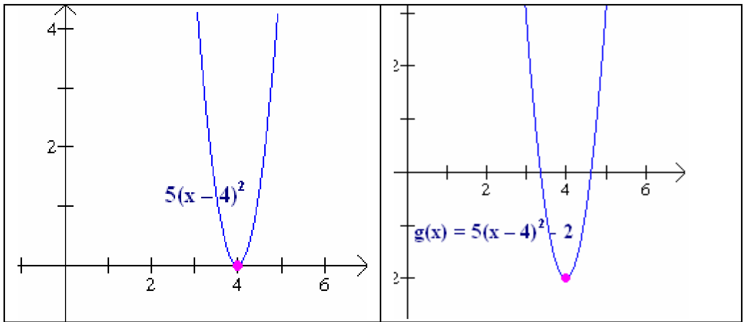
El primer paso traslada la grafica de f horizontalmente 4 unidades hacia la derecha; el paso 2, alarga verticalmente la función f desde el eje x por un factor de 2; el paso 3 traslada a la función f 3 unidades hacia abajo. Los pasos gráficos y la grafica de g se muestran abajo.



$f(x) = x^2$



Paso 1



Paso 2 | Paso 3

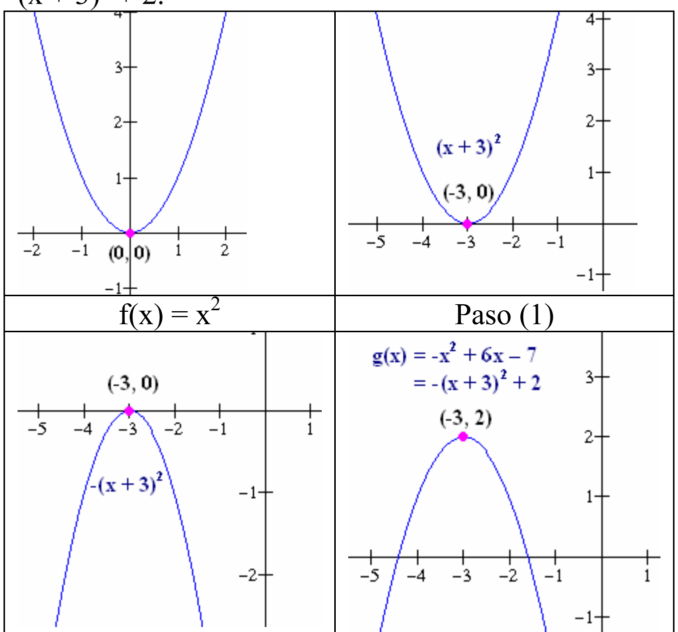
Problema. 51.

Trazar la gráfica de la función **$g(x) = -x^2 + 6x - 7$**, utilizando transformaciones.

Solución: Primero completamos el cuadrado perfecto.

$g(x) = -(x^2 + 2(3)x) - 7 = -(x^2 + 2(3)x + (3)^2) - 7 + 9 = -(x + 3)^2 + 2$. De esta manera la función se reescribe como **$g(x) = -(x + 3)^2 + 2$**.

Así la gráfica de la función g la obtenemos a partir de la función $f(x) = x^2$, (1) trasladando f, 3 unidades hacia la izquierda, $(x + 3)^2$; (2) efectuando una reflexión de f sobre el eje x, $-(x + 3)^2$ y (3) efectuado una traslación vertical hacia arriba 2 unidades, $-(x + 3)^2 + 2$.



$f(x) = x^2$ | Paso (1) | Paso (2) | Paso (3)

5. Operaciones con funciones.

Problema. 52.

Sea $f(x) = \sqrt{5 - x}$, $g(x) = x^2 - 1$. Encuentra (1) $(f + g)(x)$, (2) $(fg)(x)$, $(f/g)(x)$ y sus respectivos dominios.

Solución: Primero se debe de encontrar el dominio de cada función. El dominio de f es $D_f = (-\infty, 5]$ y el de g es $D_g = (-\infty, \infty)$. Después calculamos la intersección de estos dos intervalos, $(-\infty, 5] \cap (-\infty, \infty) = (-\infty, 5]$.

(1) $(f + g)(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{5 - x} + x^2 - 1$, y su dominio es $(-\infty, 5]$.

(2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{5 - x})(x^2 - 1)$, y su dominio es $(-\infty, 5]$.

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{5-x}}{x^2-1}$. Sabemos que la división entre cero no está definida, por esta razón debemos de quitar del dominio de la función aquellos valores para los cuales el denominador de la división es igual a cero. Estos valores son x = 1 y x = -1, por lo tanto al intervalo (-∞, 5] debemos de quitarle estos valores, y nos queda que el dominio de la función f/g es (-∞, -1)∪(-1, 1)∪(1, 5].

Problema. 53.

Sean $g(x)=\sqrt{16-x^2}$ y $h(x)=\sqrt{x+1}$. Encontrar (a) (g-h)(x), (b) (g·h)(x), (c) (h/g)(x).

Solución: Primero debemos de encontrar los dominios de las funciones g y h. Para hacerlo debemos de resolver las desigualdades $16 - x^2 \geq 0$ y $x + 1 \geq 0$. Así el dominio de g es Dg = [-4, 4] y el Dh = [-1, +∞). Ahora la intersección de estos dos intervalos es el intervalo [-1, 4].

(a) $(g-h)(x)=\sqrt{16-x^2}-\sqrt{x+1}$, y su dominio es el intervalo [-1, 4].

(b) $(f\cdot g)(x)=\sqrt{16-x^2}\sqrt{x+1}=\sqrt{(1-x^2)(x+1)}$, y su dominio es el intervalo [-1, 4].

(c) $\left(\frac{h}{g}\right)(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{16-x^2}}=\sqrt{\frac{x+1}{16-x^2}}$. Quitando los valores para los cuales el denominador de esta división es cero, el dominio de la función es el intervalo [-1, 4).

Problema. 54.

Si f(x) = 3x + 2, y g(x) = x^2 + 1. Encuentre (a) (f + g)(-1), (b) (g-f)(2), (c) (f·g)(0), (d) (f/g)(3)

Solución:

(a) (f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = [3(-1) + 2] + [$(-1)^2$ + 1] = [-3 + 2] + [1 + 1] = -1 + 2 = 3

(b) (f - g)(2) = f(2) + g(2) = [3(2) + 2] + [$(2)^2$ + 1] = [6 + 2] + [4 + 1] = 8 + 5 = 13

(c) (f·g)(0)= f(0)·g(0) = [3(0) + 2]·[$(0)^2$ + 1] = [2][1] = 2

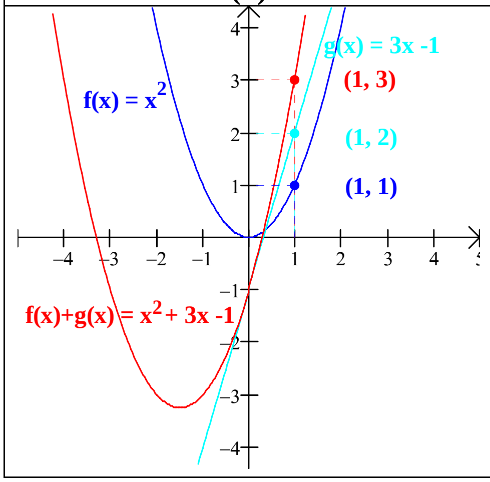
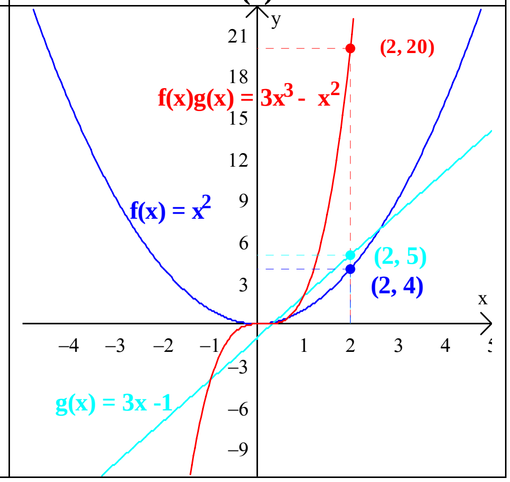
(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(3)=\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{3(3)+2}{(3)^2+1}=\frac{9+2}{9+1}=\frac{11}{10}$

Problema. 55.

Sean f(x) = x^2 y g(x) = 3x -1. Encontrar: (a) (f + g)(x) y (f·g)(x) para los valores de x dados en la tabla. En un mismo sistema grafique, (b) f, g, y (f+g) y en otro (c) f, g, y (f·g).

Solución: (a)

x	f(x) = x^2	g(x)= 3x -1	f(x) + g(x) = x^2 + 3x -1	f(x)·g(x) = $3x^3 - x^2$
0	0	-1	-1	0
1	1	2	3	2
2	4	5	9	20
3	9	8	17	72
-1	1	-4	-3	-4
-2	4	-7	-3	-28
-3	9	-10	-1	-90

(b)	(c)
	

6. Composición de Funciones.

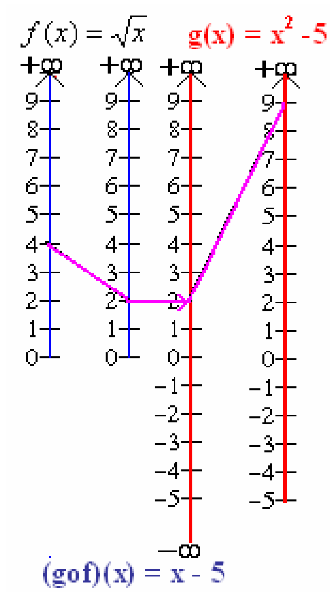
Problema. 56.

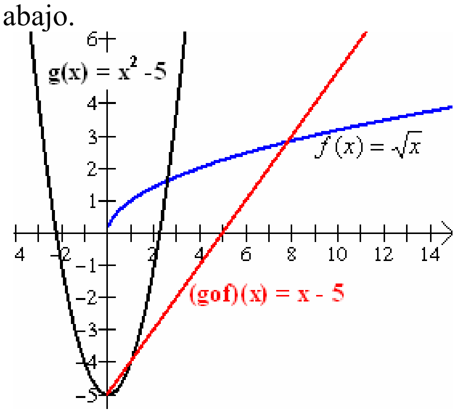
Si $f(x) = \sqrt{x}$ y g(x) = x^2 -5, calcular (gof) y su dominio

Solución: Tenemos,

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 5 = x - 5$

Aunque x-5 está definida para todos los números reales, el dominio de gof **no es el conjunto de los números reales**. El dominio de g es el conjunto de todos los números reales y su rango el intervalo [-5, +∞), pero la función $f(x) = \sqrt{x}$ sólo está definida para los números x ≥ 0 y su rango es igual. Así que el dominio de gof es el conjunto de los números reales positivos, es decir, el intervalo (0, +∞). Observa la representación de los dominios de las funciónes f, g, y gof de la derecha y la grafica de las tres funciones abajo.





Problema. 57.

Sean f(x) = x^2 – 2x, y g(x) = x + 3. Encontrar las funciones compuestas (a) (fog)(x), y (b) (gof)(x) y sus dominios.

Solución: Tenemos

(a) (fog)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = $(x + 3)^2$ – 2(x+3) = x^2 + 6x + 9 – 2x - 6 = x^2 + 4x +3.

(b) (gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 – 2x) = (x^2 – 2x) + 3 = x^2 – 2x + 3.

El dominio de f y de g son los reales, y por lo tanto también de (fog) y de (gof). **Observa que las funciones gof y fog no son iguales.**

Problema. 58.

En un cierto lago, el pez róbalo se alimenta del pez pequeño gobio, y el gobio se alimenta de plankton. Supongamos que el tamaño de la población del róbalo es una función f(n) del número n de gobios presentes en el lago, y el número de de gobios es una función g(x) de la cantidad x de plankton en el lago. Exprese el tamaño de la población del róbalo como una función de la cantidad de plankton, si $f(n) = 50 + \sqrt{n/150}$ y g(x) = 4x + 3.

Solución: Tenemos que n = g(x). Sustituyendo g(x)por n en f(n), encontramos que el tamaño de la población de róbalos está dado por

$$f(g(x)) = 50 + \sqrt{\frac{g(x)}{150}} = 50 + \sqrt{\frac{4x+3}{150}}$$

Problema. 59.

Sea f(x) = 4 y g(x) = -2x^2 -6x. Calcular: (a) (fog)(x), (b) (gof)(x) y sus dominios.

Solución:

(a) (fog)(x) = f(g(x)) = f(-2x^2 -6x) = 4.

(b) (gof)(x) = g(f(x)) = g(4) = -2(4)^2 – 6(4) = -56.

Puesto que el dominio de las funciones f y g son los números reales, el dominio de las funciones fog y gof también son los números reales.

Problema. 60.

Sean h(x) = -2 y m(x) = 5. Calcular: (a) (hom)(x), y (b) (moh)(x) y sus dominios.

Solución:

(a) (hom)(x) = h(m(x)) = h(5) = -2

(b) (moh)(x) = m(h(x)) = m(2) = 5

Puesto que el dominio de las funciones h y m son los números reales, el dominio de las funciones compuestas hom y moh también son los números reales.

Problema. 61.

Sean f(x) = x^2 -1 y g(x) = x + 2. Calcular: (a) (fog)(-2), (b) (fof)(0), (c) (gof)(3), (d) (gog)(-1).

Solución:

(a) (fog)(-2) = f(g(-2))= f(-2 +2) = f(0) = (0)^2 – 1 = -1

(b) (fof)(0) = f(f(0)) = f((0)^2 – 1) = f(-1)= (-1)^2 – 1 = 1-1 = 0

(c) (gof)(3) = g(f(3)) = g((3)^2 -1) = g(9 – 1) = g(8) = 8 + 2 = 10

(d) (gog)(-1) = g(g(-1)) = g(-1 + 2) = g(1) = 1 + 2 = 3

Problema. 62.

Si $h(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$, entonces f puede ser considerada como una función compuesta gof, donde f(x) = 2x^2 -1 y $g(x) = \sqrt{x}$, así:

$h(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 1) = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Otra forma de considerar $h(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ como una función compuesta es considerar las siguientes dos funciones f(x) = 2x^2 y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, de esta manera:

$h(x) = g(f(x)) = g(2x^2) = \sqrt{2x^2 - 1}$.

Problema. 63.
Sea f(x) = $(2x + 3)^5$. Encuentre dos funciones f y g tal que F = fog.
Solución: Esto se puede hacer de más de una forma, pero la forma más natural es la siguiente:
F(x) = 2x + 3 y g(x) = x^5
Entonces (gof)(x) = g(f(x)) = $(2x + 3)^5$ = F(x)
Problema. 64.
Un charco circular de agua se está evaporando y disminuye lentamente su tamaño. Después de t minutos, el radio del charco mide $\frac{18}{2t+3}$ pulgadas; en otras palabras, el radio es una función del tiempo. El área A del charco está dado por A = πr^2, es decir, el área es una función del radio r. Podemos expresar el área como una función del tiempo sustituyendo $r = \left(\frac{18}{2t+3}\right)^2$ en la ecuación del área.

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{18}{2t+3}\right)^2$$

Lo anterior nos permite formar la función compuesta fog, donde f(r) = πr^2 y g(t) = $g(t) = \left(\frac{18}{2t+3}\right)$:

$$(f \circ g)(t) = f(g(t)) = f\left(\frac{18}{2t+3}\right) = \pi\left(\frac{18}{27+3}\right)^2$$

Cuando el área se expresa en función del tiempo, es fácil calcular el área del charco en cualquier tiempo. Por ejemplo, después de 10 minitos el área de charco es

$$A = \pi\left(\frac{18}{2t+3}\right)^2 = \pi\left(\frac{18}{2.10+3}\right)^2 \cong 1.941 \text{ pulgadas cuadradas}$$

Problema. 65.
Los defensores del medio ambiente han estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es M(m) = (1 + 0.6m) partes por millón cuando el número de personas es m-miles. Si la población en miles en el momento t es P(t) = 400 + 30t + $0.5t^2$, (a) exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo y (b) calcule el nivel de monóxido de carbono en t = 5.
Solución: (a) Para expresar el monóxido de carbono en función del tiempo se requiere establecer la función compuesta (MoP)(t) = M[P(t)]. Sustituyendo P(t) en M(m), tenemos:
M[P(t)] = M[400 + 30t + $0.5t^2$] = 1 + 0.6(400 + 30t + $0.5t^2$) = 241 + 18t + $0.09t^2$
(b) Se nos pide evaluar la función compuesta en t = 5.
M[P(5)] = = 241 + 18(5) + $0.09(5)^2$ = 333.25 ppm.
Problema. 66.
Se conoce que la población de ranas R calculada en miles en una determinada región depende de la población de insectos **m** en millones. La población de insectos I a su vez varía con la cantidad de lluvia **c** dada en centímetros. Si la población de ranas es $R(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$ y la población de insectos es I(c) = 43c + 7.5. (a) Exprese la población de ranas como una función de la lluvia y (b) estime la población de ranas cuando la lluvia es de 1.5 centímetros.

Solución: (a) Para expresar la población de ranas en función de la lluvia se requiere establecer la siguiente función compuesta (RoI)(c) = R[I(c)]. Sustituyendo I(c) para cada caso de c en R(m), se tiene:

$$(RoI)(c) = R[I(c)] = R[43c + 7.5] = 65 + \sqrt{\frac{43c + 75}{8}}$$

(b) $(RoI)(1.5) = R[I(1.5)] = 65 + \sqrt{\frac{43(1.5) + 75}{8}} = 65 + 3 = 68$

Cuando la lluvia es de 1.5 centímetros la población de ranas es aproximadamente de 68000 ranas.

7. Funciones Uno a Uno (Inyectivas).

Una función f con dominio A se llama uno a uno (o inyectiva) si no existen dos elementos de A con una misma imagen; es decir

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que } x_1 \neq x_2.$$

Otra forma de expresarlo es: F es uno a uno si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

La última frase de la definición anterior significa que:

Una función es uno a uno si y solo si ninguna recta horizontal corta a su gráfica más de una vez.

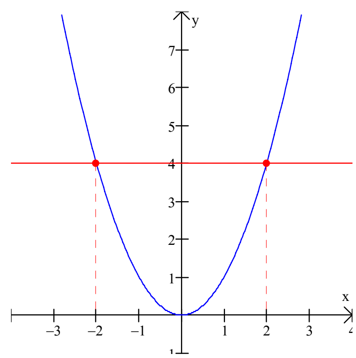
Problema. 67.

Determinar si la función m(x) = 2x, es uno a uno.

Solución: Observa que si, calculamos e igualamos $m(x_1) = (x_2)$, tenemos $2x_1 = 2x_2$. Por lo tanto $x_1 = x_2$, y por consiguiente la función m es uno a uno.

Problema. 68.

Determinar si la función $h(x) = x^2$ es uno a uno.

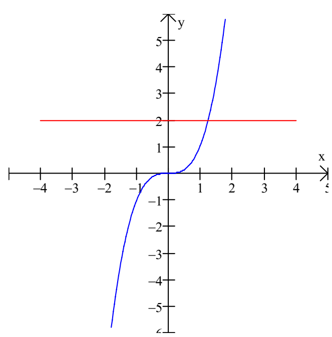


Solución: Esta función no es uno a uno. Observa que $h(x_1) = h(x_2)$ implica que $(x_1)^2 = (x_2)^2$ y por lo tanto, x1 = ± x2, y la función $h(x) = x^2$ no es uno a uno. Por ejemplo, $h(2) = 2^2 = h(-2) = (-2)^2 = 4$.

Es decir, dados $x_1 = 2 \neq x_2 = -2$, se tiene que $h(x_1) = h(x_2) = 4$. En otras palabras dos números distintos x del dominio tienen el mismo valor de y. Observa que cualquier línea horizontal que se trace sobre la curva toca más de un punto de la curva.

Problema. 69.

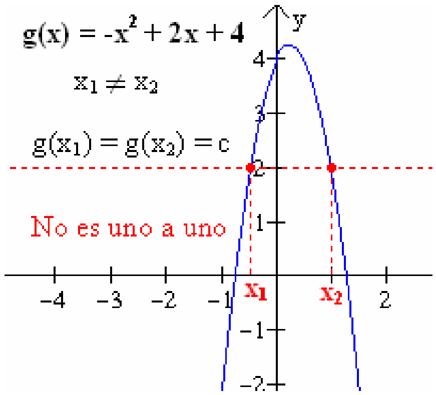
Determinar si la función $f(x) = x^3$ es uno a uno.

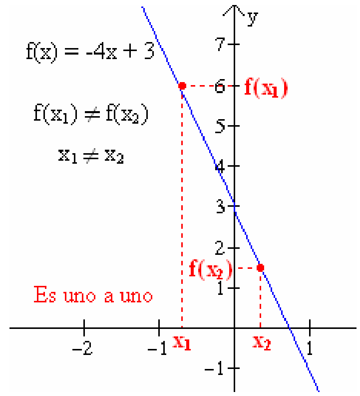


Solución: Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener potencias cúbicas iguales). Por lo tanto $f(x) = x^3$ es uno a uno. Observa que cualquier línea horizontal que se trace sobre la curva toca únicamente un punto de ella. x_1 x_2

Problema. 70.

Las gráficas de **g(x) = -x² + 2x + 4** y f(x) = -4x + 3, mostradas indican que hay dos elementos x_1 y x_2 en el dominio de g, para los cuales $g(x_1) = g(x_2) = c$, pero solamente un elemento x_1 en el dominio de f para el cual $f(x_1) = c$. por lo tanto, g no es inyectiva pero f sí lo es.





8. Funciones Inversas.

Sea f una función inyectiva (uno a uno) con dominio A y contradominio B. Entonces su **función inversa f^{-1}** tiene dominio B y contradominio A y está definida mediante

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y sólo si } f(x) = y$$

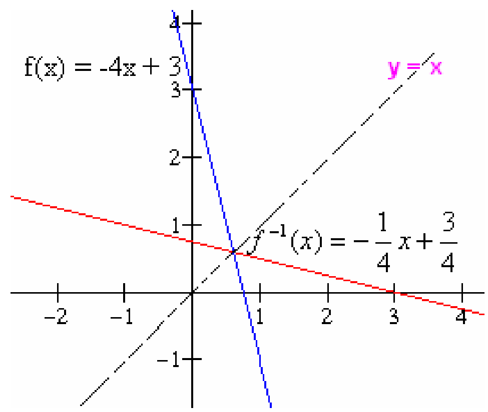
para cualquier y en B.

Problema. 71.

Obtener la inversa de la función f(x) = -4x + 3, y graficar la función f y su inversa.

Solución: Por el problema anterior sabemos que f es uno a uno y por lo tanto tiene inversa. Ahora escribimos a f como y = -4x + 3, e intercambiamos las variables x e y para obtener x = -4y + 3.

De esta última ecuación despejamos y para obtener la inversa $y = \frac{-x+3}{4}$ o bien $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$.



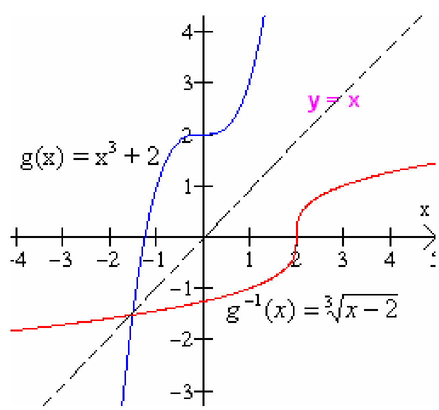
Problema. 72.

Encontrar la función inversa de g(x) = x^3 + 2 y graficar la función g y su inversa.

Solución: Primero debemos de mostrar que es uno a uno. Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Es decir que, $(x_1)^3 + 2 = (x_2)^3 + 2$. Esto claramente implica que $x_1 = x_2$. Para calcular la inversa primero escribimos la función como y = x^3 + 2. Luego intercambiamos las variables x y y, para obtener x = y^3 + 2. De aquí despejamos la variable y para obtener la inversa.

y^3 = x -2;

$y = \sqrt[3]{x-2}$ o bien $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.



Problema. 73.

En el problema anterior encontramos que la inversa de la función g(x) = x^3 + 2 es $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Demuestre que las compuestas (a) $(gog^{-1})(x)$ = x , y (b) $(g^{-1}og)(x)$ = x

Solución: (a) $(gog^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$

(b) $(g^{-1}og)(x) = (g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^3 + 2) = \sqrt[3]{x^3 - 2 + 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$

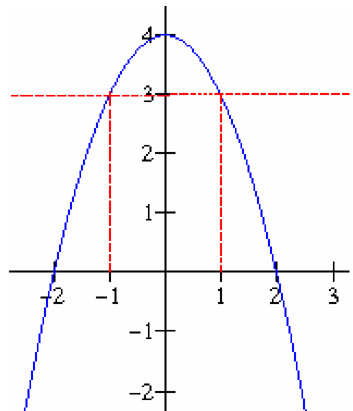
Problema. 74.

Encuentre la inversa (si existe) de la función dada por $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Solución: Una función tiene inversa si ésta cumple con la condición de ser uno a uno. Así primero veremos si la función g dada es uno a uno. Supongamos que si lo es, entonces se debe cumplir la siguiente condición: si $g(x_1) = g(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$. Ahora $g(x_1) = 3(x_1)^2 - 2(x_1) + 1$, y $g(x_2) = 3(x_2)^2 - 2(x_2) + 1$, igualando $g(x_1)$ y $g(x_2)$ tenemos $3(x_1)^2 - 2(x_1) + 1 = 3(x_2)^2 - 2(x_2) + 1$. Simplificando llegamos a $(x_1)^2 = (x_2)^2$. De aquí obtenemos que $x1 = \pm x_2$, lo cual contradice nuestra suposición. Esto demuestra que la función g no es uno a uno. Por consiguiente la función g, **no tiene inversa.**

Problema. 75.

Sea $h(x) = 4 - x^2$. (a) Demostrar que h no es una función uno a uno; (b) restringir el dominio de la función para que sea uno a uno; (c) calcular la inversa en dicho dominio.



Solución: (a) Para mostrar que h no es uno a uno, tomemos cualquier valor (distinto de cero) y su negativo, por ejemplo, $h(1) = 3$ y $h(-1) = 3$. Puesto que $1 \neq -1$ la definición de uno a uno no se cumple.

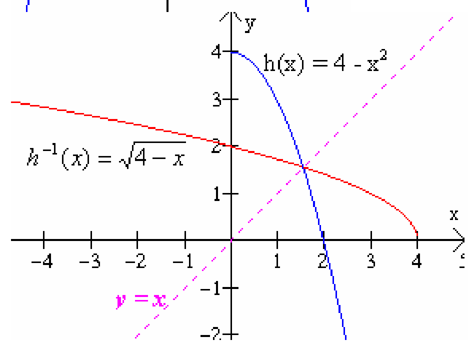
(b) Si restringimos el dominio únicamente a valores no negativos, es decir, al intervalo $[0, +\infty)$, podemos ver en la gráfica que la función es uno a uno. De hecho si x_1 y x_2 son positivos y $h(x_1) = h(x_2)$, tenemos,

$4 - (x_1)^2 = 4 - (x_2)^2$

$(x_1)^2 = (x_2)^2$

$x_1 = x_2$

ya que ni x_1 ni x_2 son negativos. Por lo tanto h es uno a uno en este intervalo.



(c) Redefinimos la función $h(x) = 4 - x^2$ con dominio $[0, +\infty)$, y cuyo rango es el intervalo $(-\infty, 4]$, observa la gráfica. Para calcular la inversa primero escribimos la función como $y = 4 - x^2$, después intercambiamos las variables para obtener $x = 4 - y^2$.

El paso siguiente es despejar la variable y: $x = 4 - y^2$; $x - 4 = -y^2$; $-x + 4 = y^2$; $4 - x = y^2$ de donde $y = \sqrt{4 - x}$. Así, la inversa de la función es $h^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$ con dominio $(-\infty, 4]$, y rango $[0, +\infty)$.

9. Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

La función definida por: $f(x) = b^x$ donde $b > 0$, $b \neq 1$, yel exponente x es un número real, se llama una **función exponencial** con base b.

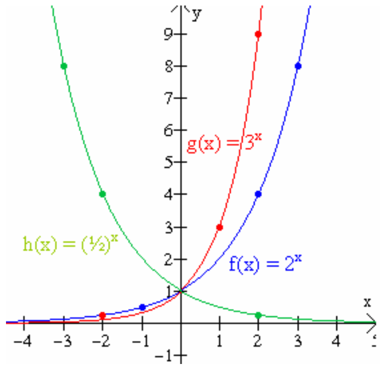
1. El dominio de una función exponencial son todos los reales
2. El rango son todos los números positivos.
3. Puesto que $b^0 = 1$ para toda base b, cada gráfica tiene la intersección-y, (0, 1), no intercepta el eje x.
4. Si $b > 1$, la gráfica de $y = b^x$ crece de izquierda a derecha. Esto es, cuando x aumenta su valor, y también aumenta su valor.
5. $0 < b < 1$, entonces la gráfica de $y = b^x$ decrece de izquierda a derecha. Es decir, cuando x aumenta su valor, entonces y disminuye su valor.

Problema. 76.

Graficar las funciones exponenciales $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^x$, $h(x) = (½)^x$.

Solución: Evaluamos las funciones en varios valores de x reales y los mostramos en la tabla de datos.

x	2^x	3^x	$(½)^x$
-2	¼	$\frac{1}{9}$	4
-1	½	$\frac{1}{3}$	2
0	1	1	1
1	2	3	½
2	4	9	¼
3	8	27	$\frac{1}{8}$

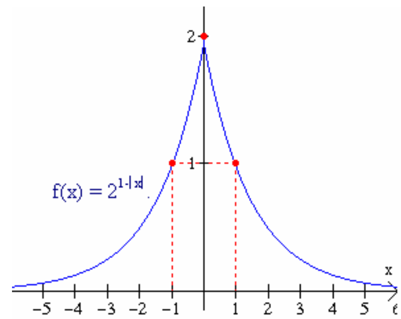


Problema. 77.

Graficar la función definida por: f(x) 21-| x|

Solución: Primero hacemos una tabla de datos.

x	f(x)	x	f(x)
0	2	0	2
1	1	-1	1
2	½	-2	½
3	½	-3	½
4	⅛	-4	⅛



Observa que la función es par. También observa que cuando x aumenta en valor absoluto, y se aproxima acero. Así que el eje x es una asíntota horizontal. La gráfica se muestra a la derecha.

Problema. 78.

Un cultivo de bacterias, con un número inicial de 1000 bacterias, dobla su tamaño cada hora. Encuentra una fórmula para el número N(t) de bacterias presentes después de t horas. Cuantas bacterias estarán presentes después de 8 horas.

Solución: después de una hora se tiene

$$N(1) = 1000(2)$$

bacterias presentes. Después de 2 horas este número se dobla, dando,

$$N(2) = 1000(2)(2) = 1000(2^2)$$

Después de 3 horas, se dobla de nuevo, dando,

$$N(3) = 1000(2^3)$$

Continuando de esta manera, obtenemos la fórmula

$$N(t) = 1000(2^t)$$

Así que después de 8 horas, la cantidad de bacterias es

$$N(8) = 1000(28) = 256{,}000.$$

Problema. 79.

Supongamos que una cantidad de azúcar se coloca en agua, y que el 10% se disuelve cada minito. Sea Q(t) la cantidad de azúcar presente después de t minitos. Si inicialmente hay 5 kilos de azúcar, es decir, Q(0) = 5, encuentre aproximadamente cuanta azúcar estará presente después de 15 minutos.

Solución: cada minuto se disuelve el 10% de azúcar, así que el 90% permanece sin disolver. Así después de un minuto la cantidad presente de azúcar es

$$Q(1) = 5(0.9)$$

Y después de 2 minutos, el 90% de Q(1) es

$$Q(2) = 5(0.9)(0.9) = 5(0.9)^2$$

Continuando de esta manera, obtenemos

$$Q(t) = 5(0.9)^t$$

Así,

$$Q(15) = 5(0.9)15 \approx 1.03 \text{ kilos.}$$

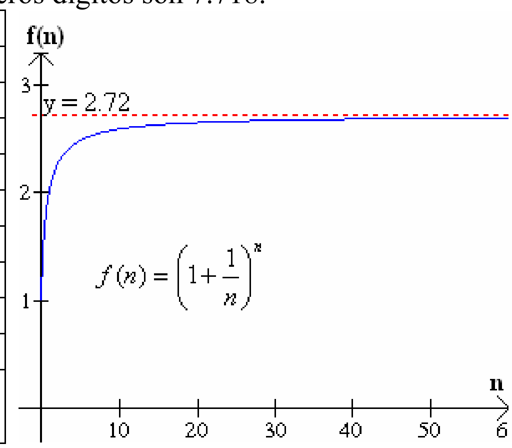
Problema. 80.

Entre todas las posibles bases de las funciones exponenciales, sin duda destaca una que es muy importante en las matemáticas y en las aplicaciones a fenómenos del mundo real. Este es un número irracional que está designado por la letra *e* y su valor es aproximadamente 2.71828. La siguiente es una forma de definir el número e. Consideremos la expresión

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Donde n designa a cualquier número entero positivo. Evaluamos esta expresión para algunos valores de n en la tabla de abajo. Esto debe de convencernos (aunque esto no es prueba) de que cuando *n* se hace cada vez más grande [1 + / (1/n)] se aproxima cada vez más a un número cuyos primeros dígitos son 7.718.

n	f(n)
1	2
2	2.25
3	2.3707
4	2.44141
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1,000	2.71692
10,000	2.71815
1,000,000	2.71828



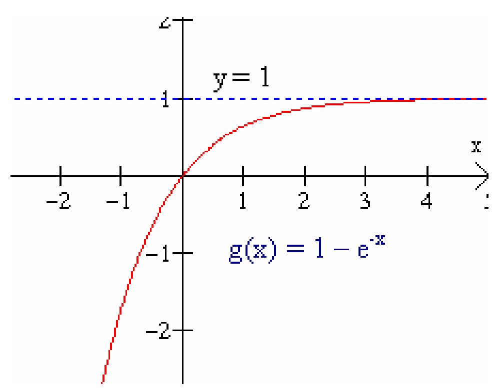
Decimos que el límite de [1+(1/n)] cuando n tiende al infinito es *e* y escribimos

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Problema. 81.

Graficar la función $g(x) = 1 - e^{-x}$.

Solución: La curva es asintótica, hacia la derecha, a la recta y = 1, ya que cuando x crece indefinidamente, $e^{-x} = 1/e^x$ se aproxima a cero, así que $1 - e^{-x}$ se aproxima a 1. También se puede graficar como una sucesión de transformaciones de la función $f(x) = e^x$. (1) $f(-x) = e^{-x}$, una reflexión sobre el eje y; (2) $-f(-x) = -e^{-x}$, una reflexión sobre el eje x; (3) $-f(-x) + 1 = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x} = g(x)$, una traslación vertical hacia arriba.



Problema. 82.

La población proyectada P de una ciudad esta dada por
$P = 100{,}000e^{0.05t}$,
Donde t es el número de años después de 1990. Predecir la población para el año 2010.
Solución: El número de años desde 1990 a 2010 es 20, así que t = 20. Entonces

$$P = 100{,}000e^{0.05(20)} = 100{,}000e^{1} = 100{,}000e$$

Puesto que $e \approx 2.1828$,

$$P \approx 100{,}000(2.71828) = 271.828.$$

Muchas predicciones se basan en estudios de población.

Problema. 83.

Un elemento radioactivo decae de tal manera que después de t días el número de N miligramos presentes, está dado por

$$N = 100e^{-0.062t},$$

(a) ¿Cuantos miligramos están presentes inicialmente?
(b) ¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?
Solución: (a) Para calcular la cantidad inicial debemos de considerar el tiempo igual a cero, es decir, calcular N cuando t = 0. Así, si t = 0, entonces $N(0) = 100e^{-0.062(0)} = 100$ miligramos están inicialmente presentes.
(b) Cuando t = 10,

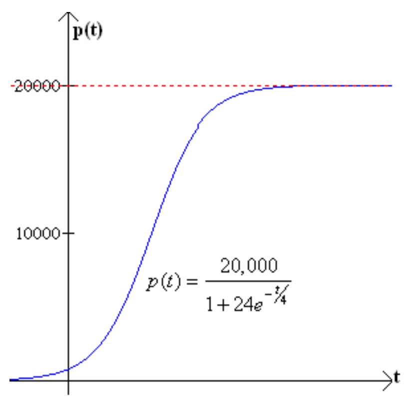
$$N = 100e^{-0.062(10)} = 100e^{-0.62}$$
$$\approx 100(0.53794) \approx 53.8$$

Problema. 84.

Hay un límite máximo sobre la población de peces en un cierto lago debido a la cantidad de oxigeno, alimentación, etc. proporcionadas. La población de peces en este lago en el tiempo t, en meses está dado por la función

$$p(t) = \frac{20{,}000}{1+24e^{-t/4}} \quad [\, t \geq 0]$$

¿Cuál es el límite máximo de la población de peces?



Solución: La gráfica de p(t) nos sugiere que la línea horizontal y = 20,000 es una asíntota de la gráfica. En otras palabras, la población de peces nunca crecerá arriba de 20,000. Esto se puede confirmar algebraicamente reescribiendo la regla de p en la siguiente forma:

$$p(t) = \frac{20{,}000}{1+24e^{-t/4}} = \frac{20{,}000}{1+\frac{24}{e^{t/4}}}$$

Cuando t es muy grande, entonces t/4 también lo es. Por lo tanto $\frac{24}{e^{t/4}}$ es un número muy cerca de $\frac{20{,}000}{1+0} = 20{,}000$. Puesto que $e^{t/4}$ es positivo, el denominador de p(t) es ligeramente mayor de 1, así que p(t) es siempre menor que 20,000.

Funciones Logarítmicas.

Intercambiando las variables de una función exponencial f definida por $y = b^x$, es posible obtener una nueva función g definida por $x = a^y$ tal que cualquier par ordenado de números en f también se hallen en g, en orden invertido. Por ejemplo, si f(2) = 4, entonces, g(4) = 2; si f(3) = 8, entonces g(8) = 3, como se ve en la figura de abajo. La nueva función g, la *inversa* de la función exponencial f, se denomina una *función logarítmica con base b.* En lugar de $x = b^y$, la función logarítmica con base b se expresa más comúnmente

$y = \log_b x \quad b > 0, b \neq 1.$

Expresar un logaritmo con base b de número x es el exponente al que debe de elevarse para obtener x.

Características de las funciones $y = \log_b x$

1. El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales positivos; el rango es el conjunto de todos los números reales.
2. Para la base b > 1, f(x) es creciente y cóncava hacia abajo. Para 0 < b < 1, f(x) es decreciente y cóncava hacia arriba.

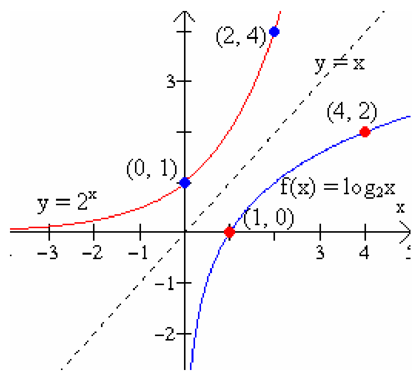
Problema. 85.

Graficar $f(x) = \log_2 x$.

Solución: primero escribimos la función como $y = \log_2 x$, después expresamos la función en forma exponencial $x = 2^y$. Después hacemos dos tablas de datos, una con valores para la función $x = 2^y$,y otra con los valores de y y x invertidos, que serán los de la función exponencial.

x	2^y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
-1	-½
-2	-¼
-3	-⅛
-4	$-\frac{1}{16}$

x	$\log_2 x$
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
-½	-1
-¼	-2
-⅛	-3
$-\frac{1}{16}$	-4



Observa que las funciones $y = 2^x$ y, $y = \log_2 x$, son inversas una de la otra.

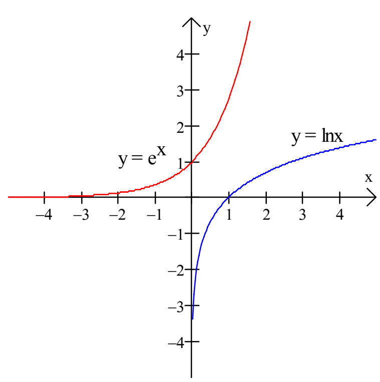
Problema. 86.

Trazar la gráfica de la función f(x) = ln(x).

Solución: La inversa de la función ln(x) es la función exponencial $y = e^x$, para graficar y = ln(x), hacemos una tabla de la función $y = e^x$ y después invertimos los datos de la tabla para graficar y = ln(x).

x	$y = e^x$
0	1
1	2.71
2	7.38
3	20.08
4	54.59
-1	0.36
-2	0.13
-3	0.04
-4	0.01

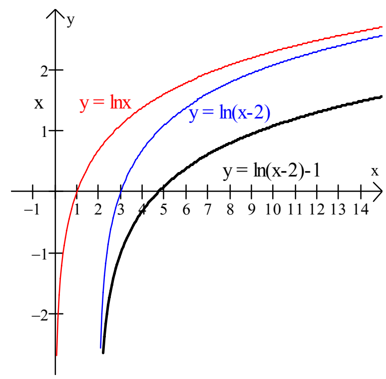
x	y = lnx
1	0
2.71	1
7.38	2
20.08	3
54.59	4
0.36	-1
0.13	-2
0.04	-3
0.01	-4



Problema. 87.

Trazar la grafica de la función g(x) = ln(x – 2) – 1. Utilizando transformaciones.

Solución: Se empieza con la gráfica de y = ln(x) anterior, y usando la transformaciones, (1) se traslada dicha gráfica dos unidades a la derecha para obtener la gráfica de y = ln(x – 2) y luego (2) se traslada ésta una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de y = ln(x – 2) – 1.



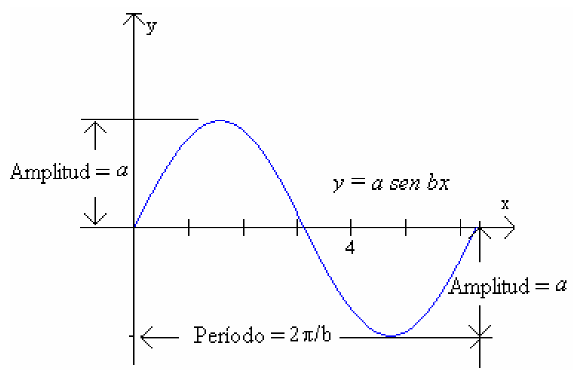
10. Funciones Trigonométricas.

Problema. 88.

Analizar la función f(x) = a sen b(x- h) + c

Solución:

Consideremos primero la gráfica de **f(x) = *a* sen *bx*,** donde *a* y *b* son constantes positivas. El factor *a* causa una expansión o contracción vertical de la gráfica, dependiendo de si *a* > 1 o 0 < *b* < 1. En particular, cuando la curva seno básica tiene su altura máxima 1, la nueva curva alcaza la altura *a*. El factor *b* causa una expansión horizontal si 0 < *b* < 1 y una contracción si b > 1.



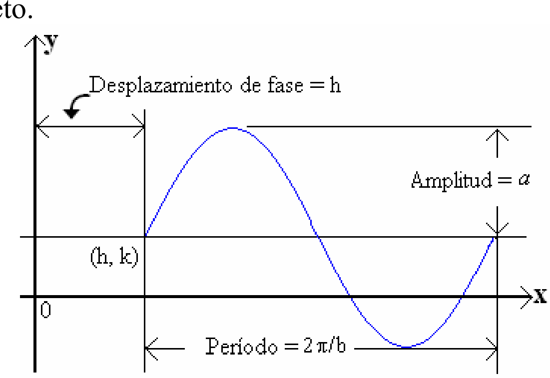
Por periodicidad entendemos que sen (bx +2π) = sen bx. Si reescribimos la parte izquierda de esta ecuación como sen b(x +2π/b). Tenemos

$$sen\,b\left(x+\frac{2\pi}{b}\right)=sen\,bx$$

Así, la gráfica de *y = a sen bx* se repite cada 2π/b unidades. Esto es, el período es 2π/b. La figura ilustra una gráfica típica de la forma *y = a sen bx*.

Si en la ecuación *y = a sen bx* el número *a* es negativo, entonces la gráfica se refleja sobre el eje x. Si b < 0, utilizamos el hecho de que *sen bx* = -*sen*(- *bx*), así que de nuevo tenemos una reflexión. Por ejemplo, la gráfica de y = 2sen (-3x) es la misma que la de y = -2sen3x, que es la reflexión de y = 2sen 3x. Por supuesto, si *a* < 0 y *b* < 0, no hay una reflexión, y por tanto no hay un cambio neto.

Si reemplazamos x por x – h y, *y* por y – k, entonces obtenemos una traslación de la grafica h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente. La gráfica de y – k = a sen b(x – h). o equivalentemente,
y = a sen b(x – h) + k.
la figura que se muestra es para los valores de a > 0 y b > 0. El valor h se conoce como el *desplazamiento de fase.*



Problema. 89.

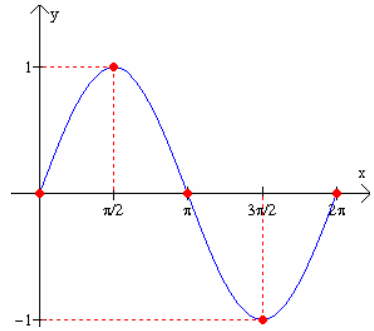
Graficar f(x) = sen x.

Solución:

Consideremos la función en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$.

Su amplitud es 1 y su periodo es 2π. La tabla de la izquierda muestra los valores interesantes de la gráfica.

x	y
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0

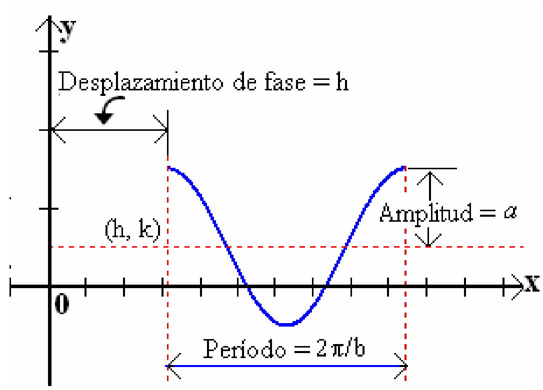


Problema. 90.

Analizar la función g(x) = acosb(x – h)+c

Solución:

Un análisis similar puede hacerse para la función coseno, una grafica usual de la ecuación de la forma y = a cos b(x – h) se muestra en la figura adjunta. Puesto que la función coseno es una función par, entonces cos(-bx) = cos bx, así si b es negativo, la gráfica no se afecta.



Problema. 91.

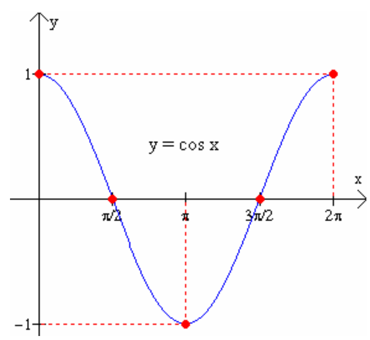
Graficar la función g(x) = cos x.

Solución:

Consideremos la función en el intervalo $0 \le x \le 2\pi$.

Su amplitud es 1 y su periodo es 2π. La tabla de la derecha muestra los valores interesantes de la gráfica.

x	y
0	0
$\pi/2$	1
π	0
$3\pi/2$	-1
2π	0



Problema. 92.

Bosqueje la gráfica de f(x) = 3 sen (½)x

Solución: La amplitud es 3 y el período es $2\pi/(½) = 4\pi$. La gráfica se muestra en la figura.

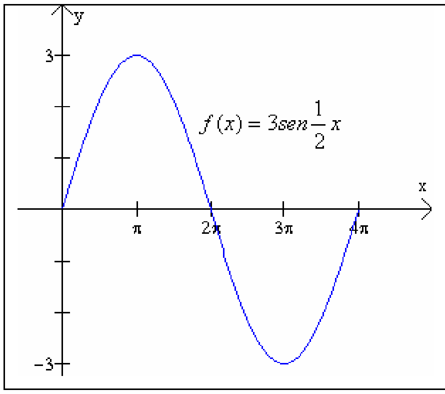
Problema. 93.

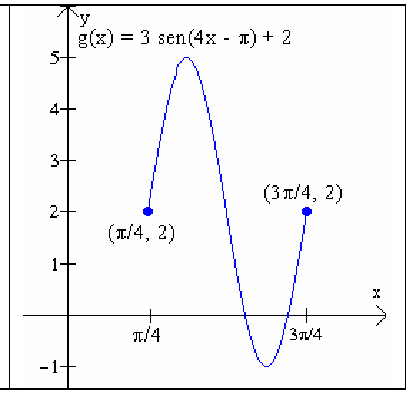
Bosqueje la gráfica de la función $g(x) = 3\ \text{sen}(4x - \pi) + 2$.

Solución: Primero reescribimos la función para identificar los datos importantes de la gráfica, para ello factorizamos el 4 para reescribir la función en la forma siguiente:

$$g(x) = 3sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$$

Esta es una función seno con amplitud 3, y período $p = 2\pi/4 = \pi/2$, y desplazamiento de fase $\pi/4$ unidades hacia la derecha, y trasladada verticalmente 2 unidades hacia arriba.



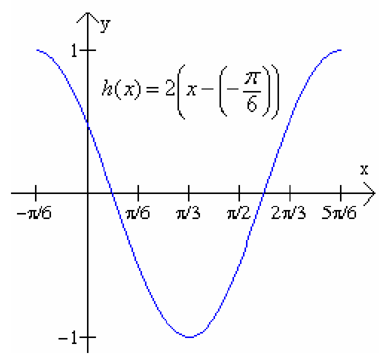


Problema. 94.

Graficar la función h(x) = cos(2x + π/3).

Solución: Primero escribimos la ecuación en la forma

$$h(x) = 2\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$



En esta ecuación identificamos que el desplazamiento de fase es -π/6. Esto indica que la curva se desplazó π/6 unidades a la izquierda. La amplitud es 1, y el período es 2π/2 = π.

A. Una forma distinta para graficar funciones senos y cosenos

El siguiente ejemplo ilustra una forma para graficar las funciones f(x) = a sen b(x +c) + d, y g(x) = a cos b(x + c) + d.

Problema. 95.

Graficar f(x) = 2 sen (4x + π) -1.

Solución: Observe que el valor de b, representado aquí por 4, es positivo. Si b < 0, el método se puede utilizar después de aplicar las propiedades de las funciones trigonométricas correspondientes.

Para bosquejar un período de la gráfica de la función, se seguirán los siguientes pasos.

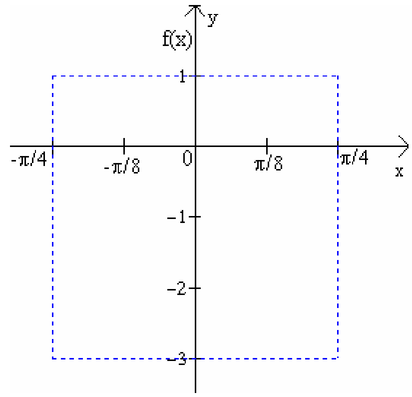
Paso 1. Determine un intervalo cuya longitud es un período de la función, resolviendo la desigualdad siguiente:

$0 \le 4x + \pi \le 2\pi$

Este método funciona porque todos los valores de las funciones seno y coseno se encuentran en el intervalo [0, 2π]. La solución de la desigualdad es

$$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$$

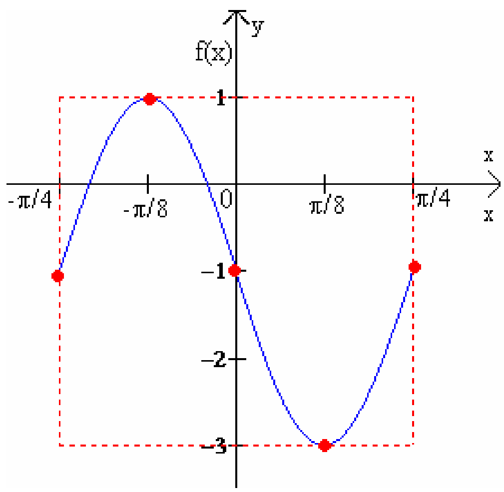
El período de la función es la longitud de este intervalo, -π/4 – (-π/4) = π/2. El *desplazamiento de fase* es -π/4, el valor izquierdo del intervalo.



Paso 2. Determine el rango de f reemplazando sen (4x + π) en la función por sus valores mínimo, y máximo, -1, y 1, respectivamente, es decir: 2(-1) -1 = -2 – 1 = -3; y 2(1) – 1 = 2 – 1 = 1. Así pues encontramos que el rango, es el intervalo, [-3, 1].
La *amplitud* de la gráfica es la mitad de la diferencia de los valores máximo y mínimo de la función, que en este ejemplo es [1 – (-3)]/2 = 2
Paso 3. En un sistema de coordenadas, bosqueje con líneas punteadas el rectángulo formado por las rectas x = -π/4 y x = π/4 (son los extremos del intervalo que se obtuvo en el paso 1) y las rectas horizontales y = -3 y, y = 1 (son los extremos del intervalo del rango que se obtuvo en el paso 2.)

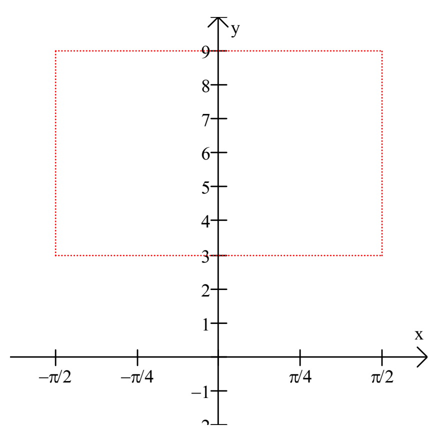
Paso 4. Divida el intervalo que se obtuvo en el paso 1 en cuatro partes. Al dividir el intervalo en cuatro obtenemos los siguientes valores, -π/4, -π/8, 0, π/8, y π/4. Luego evaluamos la función en estos cinco valores como se muestra en a tabla.
Paso 5. Dibuje los cinco puntos obtenidos en el paso 4 y únalos con una curva suave, como se muestra en la gráfica

x	f(x)=2sen(4x+π)-1
$\frac{-\pi}{4}$	2sen(0)–1=2(0)–1=-1
$\frac{-\pi}{8}$	$2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)-1$=2(1)–1=1
0	$2sen(\pi)-1$=2(0)–1=-1
$\frac{\pi}{8}$	$2sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)-1$=2(-1)–1=-3
$\frac{\pi}{4}$	$2sen(2\pi)-1$=2(0)–1= -1



Problema. 96.

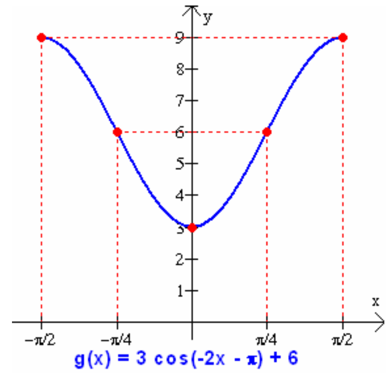
Graficar la función **g(x) = 3 cos(-2x - π) + 6**
Solución: Primero reescribimos la función aplicando la identidad cos (-u) = cos u.
g(x) = 3 cos [- (2x + π)] + 6 = 3 cos (2x + π) + 6.
Después le aplicamos el método anterior.



Paso1. Determine un intervalo cuya longitud es un período de la función, resolviendo la desigualdad siguiente; 0 ≤ 2x + π) ≤ 2π, cuya solución es -π/2 ≤ x ≤ π/2. El período de la función es (π/2)-(- π/2) = π.
Paso 2. Determinamos el rango. (a) 3(1) + 6 = 9; (b) 3(-1) + 6 = 3. Así el rango es el intervalo [9, 3]. La amplitud de la función es 9 – 3 = 6.
Paso 3. Bosquejamos un rectángulo formado por los intervalos -π/2 ≤ x ≤ π/2, y [3, 9].

Paso 4. Dividimos el intervalo $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, 1 en cuatro partes. Al dividir el intervalo en cuatro obtenemos los siguientes valores, $-\pi/2$, $-\pi/4$, 0, $\pi/4$, y $\pi/2$. Luego evaluamos la función en estos cinco valores como se muestra en a tabla.

Paso 5. Dibuje los cinco puntos obtenidos en el paso 4 y únalos con una curva suave, como se muestra en la gráfica



x	$g(x) = 3\cos(2x + \pi) + 6$
$-\pi/2$	$g(-\pi/2)=3\cos(0)+6=3(1)+6=9$
$-\pi/4$	$g(-\pi/4)=3\cos(\pi/2)+6=3(0)+6=6$
0	$g(0)=3\cos(\pi)+6=3(-1)+6=3$
$\pi/4$	$g(\pi/4)=3\cos(3\pi/2)+6=3(0)+6=6$
$\pi/2$	$g(\pi/2)=3\cos(2\pi)+6=3(1)+6=9$

Problema. 97.

Graficar f(x) =tan x.

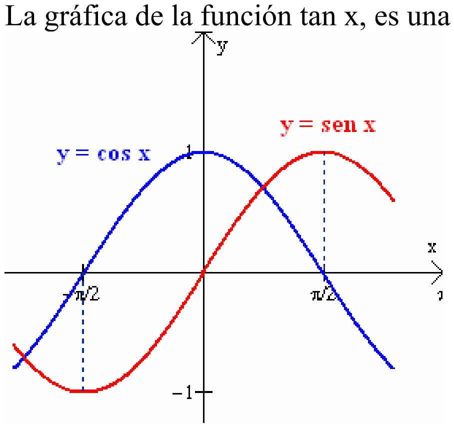
Solución: La tangente se puede definir de la siguiente manera $\tan x = \dfrac{senx}{\cos x}$ De aquí observamos que la tangente está definida para toda x excepto aquellos para los cuales el cos x = 0, es decir para los valores de $\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$, etc., en general para aquellos valores $\pm(2n+1)\pi/2$, para algún entero n. Estos valores son asíntotas verticales de la función. La siguiente tabla muestra algunos valores de la tangente en el intervalo de $-\pi/2 < x < \pi/2$.

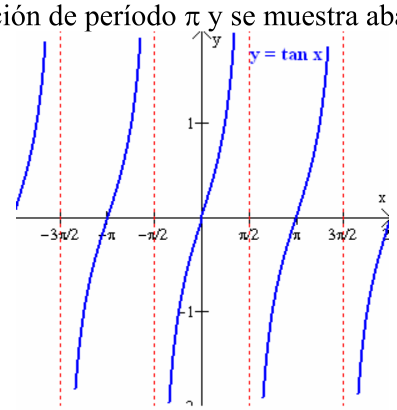
x	tanx
0	0
$\pm\pi/6$	$\pm 1/\sqrt{3}$
$\pm\pi/4$	± 1
$\pm\pi/3$	$\pm 1/\sqrt{3}$

Analicemos la tangente en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Si x está cerca de $-\pi/2$, entonces la tangente es negativa y muy grande, puesto que cos x está cerca de cero y sen x está cerca de -1. Si x está cerca de $\pi/2$, entonces la tangente es positiva y muy grande, ya que cos x está muy cerca de cero y sen x muy cerca de 1. Observa la figura donde estan las funciones seno y coseno.

La gráfica de la función tan x, es una función de período π y se muestra abajo.

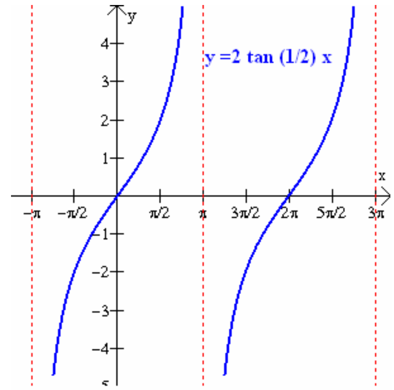




Problema. 98.

Graficar la función t(x) = 2 tan ψx.

Solución: No hay una amplitud definida para la curva de la tangente pero el efecto de la multiplicación por el 2, es el de alargar la curva. Puesto que el período fundamental de la función tangente básica es π, el periodo de esta curva es π/(1/2) = 2π. La gráfica se muestra a la derecha.



11. Problemas para resolver

I. Para cada una de las funciones, calcule los valores indicados.

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2;$ f(1), f(0), f(-2), f(a + h)
2. $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ g(2), g(0), g(-1), g(a – h)
3. $h(x)=\begin{cases} -2x & +4 \quad si \quad x \le 1 \\ x^2 & +1 \quad si \quad x > 1 \end{cases}$ h(3), h(1), h(0), h(-3)

II. Especifique el dominio, el rango y la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x)=\sqrt{2x-4}$
2. $g(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$
3. $h(x) = 3x^2 - 6$
4. $I(x)=\dfrac{1}{4-x}$
5. $J(x) = x^3 - 2x + x^2$
6. $K(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}$

III. Determine si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los casos.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x$
2. $g(x)=|x|+5$
3. $h(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$
4. $I(x) = x^2 + 2x + 2$

IV. Graficación con transformaciones.

1. Represente gráficamente la función $f(x) = x^2$. Luego, sin cálculos adicionales, represente gráficamente.
   (a) $f(x) = -x^2$ (b) $f(x) = x^2 + 3$ (c) $f(x) = 4 - (x+1)^2$
2. Represente gráficamente la función $f(x)=\sqrt{x^2-4}$. Luego, sin cálculos adicionales, represente gráficamente.
   (a) $g(x)=4+\sqrt{x^2-4}$ (b) $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ (c) $g(x) = \sqrt{(x-1)^2 - 4}$
3. Represente gráficamente la función $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Luego, sin cálculos adicionales represente gráficamente.
   (a) $h(x)=\dfrac{1}{x^2}-1$ (b) $h(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ (c) $h(x)=2+\dfrac{1}{(x-2)^2}$

V. En los problemas 1 – 3 encuentre f + g, f – g, f · g, f / g, f·(g-f), g.(g/f) y especifique su dominio:

1. f/x) = $3x^2$, $g(x)=\frac{1}{2x-3}$
2. f(x) = $x^3 + 3x$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$
3. $f(x)=\sqrt{3x-5}$, g(x) = 2x + 1

VI. Dadas f y g funciones, encuentre (f o g)(x) y (g o f)(x)

1. f(x) = x^3 , g(x) = x + 1
2. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$, g(x) = $7x^2 + 1$
3. f(x) = $x^3 – 1$, $g(x)=\sqrt{x+1}$

VII. Para cada una de las siguientes funciones investigue si son uno a uno. En tal caso, encuentre su inversa y verifique que lo son

1. $f(x)=\sqrt{x-1}$ 3. h(x) = $x^3 – 2$
2. $g(x)=|x+1|$ 4. I(x) = (x – 1) (x + 1)

VIII. En los siguientes problemas trace la gráfica de la función dada. Además determine la amplitud, el período y el desplazamiento de fase.

1) y = 1 + sen(x) 2) y = 1 + sen(x) 3) y = 2 – sen(x)
4) y = 2 + cos(x) 5) y = 3cos(2π + x) 6) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$
7) y = 2tan(x + π) 8) y = 4 – 3tan(2π -x) 9) y = 2 + tan(x)
10) y = cot(3x) 11) y = 2cot(x +π) 12) y = -3cot(x)
13) y = sec(x + π) 14) y = -3sec(2x) 15) y = 2 + sec(x)

IX. Resuelva los siguientes problemas.

1. La densidad (p) del dióxido de carbono varía con su calor específico a volumen constante (Cv) según la ecuación:
$$Cv = 0.691 + 0.889p + 1.42p^2$$
Construir la gráfica de esta ecuación para los valores de p entre 0.1 y 0.4 gml^{-1} y así hallar la densidad cuando Cv = 0.88jg^{-1} C.
2. El incremento del calor emitido (ΔH) para la reacción
$$N_2(g) + 3H_2(g) = 2NH_3(g)$$
a la temperatura T, en grados Kelvin, está dado por
$$\Delta H = 3.4 \times 10^{-6}\, T^3 - 1.15 \times 10^{-3} T^2 - 9.92\, T - 19000$$
Construir una gráfica ΔH en función de T, para valores de T comprendidos entre T = 300^0K y T = 1400^0K. De aquí hallar ΔH cuando T = 980^0K, ΔH está en calorías.
3. La relación entre la presión (p) y el volumen (v) de un gas perfecto está dado por la expresión
$$pv = 24.6$$
Donde p se mide en atmósferas y v en litros. Hacer una gráfica de v en función de p, para los valores de p comprendidas entre 0.1 y 10 atm. Hallar el volumen del gas cuando p = 0 y p = 1.3.

4. La adsorción (y) de la acetona sobre carbón vegetal en una solución acuosa de concentración C, está dada por la ecuación:

$$C = 38.4\ y^{1.85}$$

Dibujar una gráfica en C en función de y, y hallar y cuando C = 84 milimol^{-1}. Utilizar valores de y entre 0.5 y 10 milimoles. Hallar C cuando y = 3.50.

5. La velocidad de descomposición del ácido dibromoniccinico en disolución acuosa obedece a la ley $c = 5\ e^{-0.03t}$ donde c es la concentración de ácido en mililitros, que permanece después de t minutos. Dibujar el gráfico de c en función de t y determinar cuánto tiempo tarda en descomponerse la mitad de la concentración del ácido.

6. La densidad (p) de una disolución de éter etil-vinilo en alcohol varía con el porcentaje de la descomposición (c) de éter de la manera siguiente:

p	0.822	0.815	0.80	0.785	0.778	0.763	0.748
c	0	10	30	50	60	80	100

Hallar la relación entre p y c y también la densidad p cuando c = 70.

7. El calor específico cp del hidrógeno, a presión constante, varía con la temperatura (t) en grados Kelvin como sigue:

cp	6.68	6.77	6.86	6.95	7.175	7.4	7.49
t	200	300	400	500	750	1000	1000

Demostrar que estos valores obedecen la ley cp = aA + b y hallar a y b.

8. La solubilidad de la sacarosa en agua, se cree que obedece a la ley

$$S = 64.4 + 0.130t + 0{,}00054t^2,$$

donde s es la solubilidad en gramos por 100g de agua a la temperatura de t^0C. Dibujar una gráfica de S en función de t, entre t = 0^0C y t = 100^0C. Igualmente hallar el valor de t cuando S = 67.37.

9. Una mol de Cl_5P se descompone para formar X moles de Cl_3P y Cl_2, siendo V el volumen total de gas. V está relacionado con X por la siguiente expresión.:

$$V = \frac{125X^2}{(1-X)}$$

donde la constante de equilibrio K = 1/125. Indicar gráficamente la relación entre V y X, para los valores de X comprendidos entre 0 y 1. Hallar V cuando x=0.32 mol.

10. En la hidrólisis de 2 moles de m-nitrobenzoato de etilo la cantidad éster (c) que permanece en cualquier tiempo está relacionado con la intensidad de la reacción (t) por la ecuación

$$t = -8.13 \times 10^2 C^2$$

dibujar una gráfica de t en función de c y hallar el valor de c cuando $t=-20.8\text{x}10^2$

11. El volumen V de una disolución de cloruro sódico, de concentración m a 4^0C está dada por

$$V = 1000 + 16.4m + 2.5m^2 - 1.2m^3$$

Dibujar una gráfica de V en función de m y hallar m cuando V = 1004.24.

12. Un cierto tipo de organismo es liberado sobre un área de 2 millas cuadradas. Crece y se propaga sobre más área. El área cubierta por el organismo después de un tiempo t está dado por a(t) = 1.1t + 2; donde a(t) = área cubierta, en millas cuadradas después de un tiempo t en años.
    (a) Encuentre: a(0), a(1), a(10).
    (b) Grafique a(t).
    (c) Porque el dominio debe restringirse a $[0,\alpha)$?
13. Un solucionante importante producido al quemar combustibles fósiles es el dióxido sulfuroso (SO_2). Una investigación en Oslo, Noruega, mostró que el número N de muertes por semana es una función lineal de la concentración media C de SO_2 medida en $\mu g/m^3$. La función empírica es N= 94 +(0.031)C. El dominio es $\{C|\ 50 < C < 700\}$.
    a) Dibujar la gráfica de esta función.
    b) Calcular el rango.
14. La cantidad de cloroformo x, que se requiere para dormir a una persona h horas puede encontrarse por la ecuación 3x – 5 = 4x + 7 + h. Encuentre el dominio, rango y la gráfica de la función.
15. Un biólogo encuentra que bajo un conjunto específico de condiciones físicas la tasa de cambio bajo la cual se reproduce una célula cancerosa está dada por $R=t^2 + 2t + 1$, donde t está medida en horas y R en unidades de 100 células por hora. Encuentre R en t = 0, t = 1, t = 3; el dominio, el rango y la gráfica de la función.
16. Se tiene en observación un cultivo de bacterias y se efectúa un conteo de las bacterias cada hora. Con esta información se ha determinado que la ecuación $N = 50\sqrt{t + 300}$ estima el número de bacterias después de t horas. Encuentre la población de bacterias en t = 0, t = 4, t = 16 horas. Dibuje una gráfica que muestre el crecimiento de la población con respecto al tiempo.
17. La temperatura T de una persona durante una enfermedad está dada por
    $$T(t)=-0.1t^2 +1.2t + 98.6$$
    donde T es la temperatura en (^oF) en el tiempo t, medido en días. Dibuje una gráfica que muestre como cambia la temperatura de la persona en el tiempo t. Cuáles son el dominio y el rango de esta función.
18. La superficie del cuerpo humano (SCH) medida en metros cuadrados se relaciona con el peso P del cuerpo desnudo por la función $SCH = 0.29P^{0.425}$. Calcule su SCH. Grafique la SCH. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función?.
19. Un laboratorio realiza una serie de pruebas para determinar la tasa de cambio por medio de la cual absorbe la corriente sanguínea una nueva droga, que se administra intramuscularmente. El modelo matemático construido por el laboratorio presenta la concentración de la droga C como una función del tiempo t (en horas) dada por la ecuación $C=\dfrac{2t}{t^2+4}$ $t\geq 0$. Dibuje la gráfica que muestra la concentración de la sangre en el tiempo t.

20. Después de muchas investigaciones una compañía farmacéutica determinó que la concentración de una droga en la corriente sanguínea puede calcularse de la siguiente manera: concentración igual a dos veces el tiempo transcurrido desde la inyección dividido entre el tiempo transcurrido al cubo.
    a) Encuentre la ecuación de la concentración con respecto al tiempo.
    b) Encuentre el dominio, el rango y gráfica de la función.
21. Se ha encontrado que la cantidad de alivio que una aspirina proporciona es igual a cuatro veces el número de horas transcurridas desde que se tomó el medicamento menos el cuadrado de las horas transcurridas. Determine la cantidad de alivio en función del tiempo. Encuentre el dominio, el rango y la gráfica de la función.
22. En un experimento metabólico la masa M de glucosa decrece según la fórmula $M = 4.5 - (0.30)t^2$, t en horas. Dibuje la gráfica de M e interprétala. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función?
23. Supongamos que una proteína (masa M en gramos) se disgrega en aminoácidos según la fórmula $M = \frac{28}{t} + 2$ donde el tiempo está medido en horas. Encuentre el dominio el rango y la gráfica de M.

Bibliografía:

1. James Steward. **Cálculo**. Grupo Editorial Iberoamericana. Pp. 13-48, pp. 346-350, 391-396, 1009-1018
2. Dennis G. Zill. **Cálculo**. Grupo Editorial Iberoamericana. Pp. 27-58, 381-395, 407-421.
3. E. Purcell y D. Varberg. **Cálculo.** Prentice Hall. Pp. 21-61, 335-342, 361-368.
4. L. Leithold. El Cálculo. Harla. Pp. 42-73.
5. Dowling Edward T. **Cálculo.** MacGraw Hill. 192. pp. 62-67, pp. 191-199.

Captura Edición y Formación:
José Luis Díaz Gómez. Profesor Titular del Departamento de Matemáticas.
Alicia Hernández Ochoa. Secretaria del Departamento de Matemáticas.

Versión 1. Octubre 2003.